

苏州市昆山市 2023-2024 学年第二学期初一数学期末考试模拟试卷

(考试时间: 100 分钟 试卷总分 150 分)

班级_____姓名_____得分_____

一. 选择题 (每小题 3 分, 计 24 分)

1. 中国“二十四节气”已被列入联合国教科文组织人类非物质文化遗产代表作名录, 下列四幅作品分别代表“立春”、“立夏”、“芒种”、“大雪”, 其中既是轴对称图形, 又是中心对称图形的是.... ()



2. 下列计算正确的是..... ()

A. $a^2 + a^3 = 2a^5$ B. $a^4 \div a^3 = a^2$ C. $a^4 \cdot a^3 = a^7$ D. $(-a^2)^3 = a^6$

3. 下列计算结果等于 $25y^2 - x^2$ 的是..... ()

A. $(-x+5y)(-x+5y)$ B. $(-x-5y)(-x+5y)$ C. $(x-25y)(x+25y)$ D. $(x-5y)(-5y-x)$

4. 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 是二元一次方程 $y+kx=7$ 的解, 则 k 的值是..... ()

A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

5. 若 $a < b$, 则下列式子中一定成立的是..... ()

A. $a+3 > b+3$ B. $a-3 < b-3$ C. $-3a < -3b$ D. $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$

6. 下列命题: ①互为补角的两个角都是锐角; ②相等的角是对顶角; ③两条直线被第三条直线所截, 内错角相等; ④在同一平面内, 平行于同一条直线的两条直线平行; ⑤在同一平面内, 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直. 其中是真命题的个数为..... ()

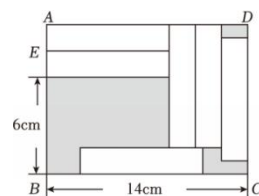
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 若 $4y^2 - my + 16$ 可以配成一个完全平方公式, 则 m 的值为..... ()

A. -8 B. ± 8 C. 16 D. ± 16

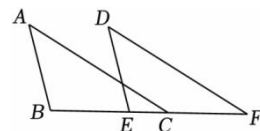
8. 如图, 在大长方形中放入 6 个形状、大小相同的小长方形, 所标尺寸如图所示, 则图中阴影部分的面积之和为..... ()

A. 48cm^2 B. 44cm^2 C. 36cm^2 D. 24cm^2



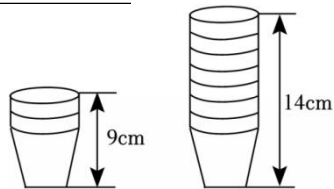
二. 填空题 (每小题 3 分, 计 24 分)

9. 如图, 将三角形 ABC 沿 BC 方向平移到三角形 DEF 的位置, 若 $BF=15$, $EC=3$, 则 A, D 两点之间的距离为_____.

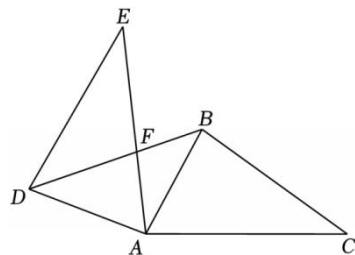
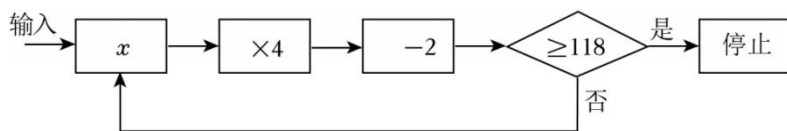


10. 若不等式 $(a-3)x > 2(a-3)$ 的解集为 $x < 2$, 则 a 的取值范围是_____.

11. 已知命题“若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$ ”, 则它的逆命题是_____ (填“真”或“假”) 命题.
12. 设 $M = (x+3)(x-7)$, $N = (x+1)(x-5)$, 则 M 与 N 的大小关系为_____.
13. 规定两数 a 、 b 之间的一种运算, 记作 (a, b) : 如果 $a^c = b$, 那么 $(a, b) = c$. 例如: 因为 $2^3 = 8$, 所以 $(2, 8) = 3$. 根据上述规定, 若 $(2, 10) = x$, $(2, 5) = y$, 则 2^{x-y} 的值为_____.
14. 小明在超市帮妈妈买回一袋纸杯, 他把纸杯整齐地叠放在一起, 如图所示, 请你根据图中的信息, 若小明把 50 个纸杯整齐叠放在一起时, 它的高度约是_____ cm.



15. 运行某个程序如图所示, 若规定从“输入一个值 x ”到“结果是否 ≥ 118 ”为一次程序操作, 如果程序操作进行了两次才停止, 那么 x 的取值范围是_____.



16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 64^\circ$, $\angle C = 36^\circ$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转后得 $\triangle ADE$, AE 与 BD 相交于点 F . 当 $DE \parallel AB$ 时, $\angle AFD =$ _____ $^\circ$.

三. 解答题 (本大题共 10 小题, 总分 102 分)

17. (8 分) 解方程组或不等式组: (1) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} \\ 2(x-y) = 11-3y \end{cases}$. (2) $\begin{cases} 3x-1 < x+3 \\ \frac{3x-1}{3} + \frac{2-9x}{6} \leq 1 \end{cases}$.

18. (24 分) 计算或化简:

(1) $x^3 \cdot x^2 \cdot x + (x^3)^2 + (-2x^2)^3$.

(2) $-a^2 \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^4$;

(3) $-1^{2025} + 24 + (-2)^3 - 3^2 \times (-\frac{1}{3})^2$.

(4) $(a+2b)(a-2b) + (a-b)^2$.

(5) $(x-1)(5x+3)-(2x+4)(3x-2)$.

(6) $(3x+y)^2-(x+2y)(2x-y)$.

19. (9分) 图1、图2、图3均是 2×2 的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点，点A、O均在格点上，点B在格线上. 只用无刻度的直尺，在给定的网格中，分别按下列要求画图，保留作图痕迹.

(1) 在图1中，作出点A关于点O的对称点C，连结AC.

(2) 在图2中，作出线段AB关于点O的成中心对称线段DE.

(3) 在图3中，已知点F是线段AB上的任意一点，作出一条线段OG，使得 $OG=OF$.

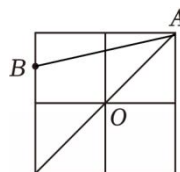


图1

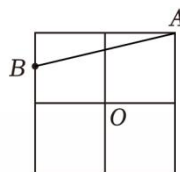


图2

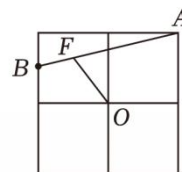


图3

20. (9分) 综合与探究

【问题情境】

如图1，长方形的两边长分别为 $m+2$ ， $m+8$. 如图2，长方形的两边长分别为 $m+3$ ， $m+5$. (其中 m 为正数)

【猜想证明】

(1) (4分) 判断 S_1 与 S_2 的大小关系，并说明理由.

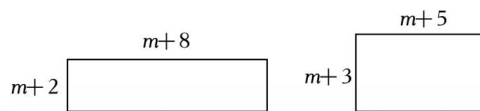


图1

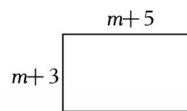


图2

【深入探究】

(2) 现有一正方形，其周长与图1中的长方形的周长相等.

①(3分) 求正方形的边长. (用含 m 的代数式表示)

②(2分) 试探究: 该正方形的面积 S 与图1中长方形的面积 S_1 的差 $(S - S_1)$ 是一个常数, 则该常数是_____.

21. (6 分) 若 $a^m = a^n$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, m, n 是正整数), 则 $m = n$. 利用上面结论解决下面的问题:

(1) (3 分) 若 $3^x \times 9^x \times 27^x = 3^{12}$, 求 x 的值.

(2) (3 分) 若 $x = 3^m + 2$, $y = 9^m + 3^m$, 用含 x 的代数式表示 y .

22. (7 分) 定义: 二元一次方程 $y = ax + b$ 与二元一次方程 $y = bx + a$ 互为“反对称二元一次方程”, 如二元一次方程 $y = 2x + 1$ 与二元一次方程 $y = x + 2$ 互为“反对称二元一次方程”.

(1) (3 分) 直接写出二元一次方程 $y = 4x - 1$ 的“反对称二元一次方程”: _____.

(2) (4 分) 二元一次方程 $y = 3x + 5$ 的解 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$, 又是它的“反对称二元一次方程”的解, 求 m, n 的值.

23. (8 分) 某中学新建了一栋 4 层的教学楼, 每层楼有 8 间教室, 共有 4 道门可进出这栋大楼, 其中两道正门大小相同, 两道侧门大小也相同. 安全检查中, 对 4 道门进行了测试: 当同时开启一道正门和两道侧门时, 1 分钟内可以通过 140 名学生; 当同时开启一道正门和一道侧门时, 4 分钟内可通过 400 名学生.

(1) (3 分) 平均每分钟一道正门和一道侧门各可以通过多少名学生?

(2) (5 分) 检查中发现, 紧急情况时因学生拥挤, 出门的效率降低 20%. 安全检查规定, 在紧急情况下全大楼的学生应在 10 分钟内通过这 4 道门安全撤离. 假设这栋教学楼每间教室最多有 45 名学生, 则建造的这 4 道门是否符合安全规定? 请说明理由.

24. (9 分) 某生态园响应国家发展有机农业政策, 大力种植有机蔬菜, 某超市看好甲、乙两种有机蔬菜的市场价值, 经调查甲种蔬菜进价每千克 m 元, 售价每千克 16 元; 乙种蔬菜进价每千克 n 元, 售价每千克 18 元.

(1) (3 分) 该超市购进甲种蔬菜 15 千克和乙种蔬菜 20 千克需要 430 元; 购进甲种蔬菜 10 千克和乙种蔬菜 8 千克需要 212 元, 求 m , n 的值;

(2) (3 分) 该超市决定每天购进甲、乙两种蔬菜共 100 千克, 且购买甲种蔬菜不多于 60 千克, 投入资金不超过 1168 元, 设购买甲种蔬菜 x 千克 (x 为正整数), 求有哪几种购买方案;

(3) (3 分) 在 (2) 的条件下, 超市在获得的利润取得最大值时, 决定售出的甲种蔬菜每千克捐出 $2a$ 元, 乙种蔬菜每千克捐出 a 元给当地福利院, 若在保证捐款后的利润率不低于 20%, 求 a 的最大值.

25. (9分) 【给出定义】如果一元一次方程的解也是一元一次不等式组的解, 则称该一元一次方程为该不等式组的“相伴方程”, 例如: 方程 $2x - 6 = 0$ 的解为 $x = 3$, 不等式组 $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x < 5 \end{cases}$ 的解为 $2 < x < 5$, 因为 $2 < 3 < 5$, 所以称方程 $2x - 6 = 0$ 为不等式组 $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x < 5 \end{cases}$ 的“相伴方程”.

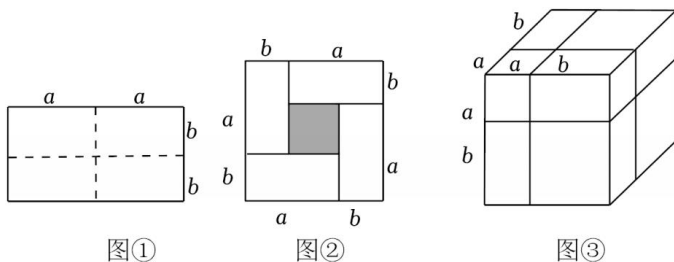
【初步运用】

(1) (2分) 下列方程: ① $x - 1 = 0$; ② $2x + 1 = 0$; ③ $-2x - 2 = 0$. 是不等式组 $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x < 2 \end{cases}$ 的“相伴方程”的是_____;

(2) (3分) 若关于 x 的方程 $2x - k = 2$ 是不等式组 $\begin{cases} 3x - 6 > 4 - x \\ x - 1 \geq 4x - 10 \end{cases}$ 的“相伴方程”, 求 k 的取值范围;

【深入探究】(4分) 若方程 $2x + 6 = 0$, $\frac{2x - 1}{3} = -1$ 都是关于 x 的不等式组 $\begin{cases} (m - 1)x < m - 1 \\ x + 5 \geq m \end{cases}$ 的“相伴方程”, 其中 $m \neq 1$, 求 m 的取值范围.

26. (13 分) 【知识生成】我们知道：对于一个图形，通过不同的方法计算几何图形的面积可以得到一个数学等式，请结合图形解答下列问题：



(1) (3 分) 如图①是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀平均分成四个小长方形，然后按图②的形状拼成一个正方形，用两种不同的方法求阴影部分的面积，得到的数学等式是_____；

【知识应用】

(2) (3 分) 若 $x + y = 7$ ， $xy = \frac{13}{4}$ ，求 $x - y$ 的值；

【知识迁移】类似的，用两种不同的方法计算同一几何体的体积，也可以得到一个恒等式。

(3) (3 分) 如图③是用 2 个小正方体和 6 个小长方体拼成的一个大正方体，类比 (1)，用不同的方法表示这个大正方体的体积，得到的数学等式是_____；

(4) (4 分) 已知 $a+b=7$ ， $a^2b=50$ ， $ab^2=20$ ，利用 (3) 中所得等式，求代数式 a^3+b^3 的值。

苏州市昆山市 2023-2024 学年第二学期初一数学期末考试模拟试卷

答案与解析

一. 选择题 (每小题 3 分, 计 24 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	D	C	B	B	D	B

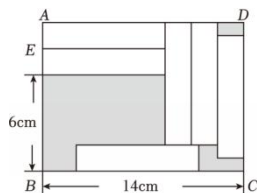
8. 如图, 在大长方形中放入 6 个形状、大小相同的小长方形, 所标尺寸如图所示, 则图中阴影部分的面积之和为 ()

- A. 48cm^2 B. 44cm^2 C. 36cm^2 D. 24cm^2

解: 设长方形的长为 x cm, 宽为 y cm,

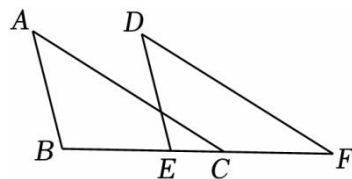
根据题意, 得 $\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 2y + 6 = x + y \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 阴影部分的面积为: $(6+2 \times 2) \times 14 - 2 \times 8 \times 6 = 10 \times 14 - 96 = 140 - 96 = 44 (\text{cm}^2)$, 故选: B.



二. 填空题 (共 8 小题)

9. 如图, 将三角形 ABC 沿 BC 方向平移到三角形 DEF 的位置, 若 $BF=15$, $EC=3$, 则 A, D 两点之间的距离为 6 .



10. 若不等式 $(a-3)x > 2(a-3)$ 的解集为 $x < 2$, 则 a 的取值范围是 $a < 3$.

11. 已知命题 “若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$ ”, 则它的逆命题是 假 (填 “真” 或 “假”) 命题.

12. 设 $M = (x+3)(x-7)$, $N = (x+1)(x-5)$, 则 M 与 N 的大小关系为 $M < N$.

解: 根据题意可知, $M - N = (x+3)(x-7) - (x+1)(x-5) = x^2 + 3x - 7x - 21 - (x^2 + x - 5x - 5)$
 $= x^2 + 3x - 7x - 21 - x^2 - x + 5x + 5 = -16 < 0$, $\therefore M < N$. 故答案为: $M < N$.

13. 规定两数 a 、 b 之间的一种运算, 记作 (a, b) : 如果 $a^c = b$, 那么 $(a, b) = c$. 例如: 因为 $2^3 = 8$, 所以 $(2, 8) = 3$. 根据上述规定, 若 $(2, 10) = x$, $(2, 5) = y$, 则 2^{x-y} 的值为 2 .

解: $\because (2, 10) = x$, $(2, 5) = y$, $\therefore 2^x = 10$, $2^y = 5$, $\therefore 2^{x-y} = \frac{2^x}{2^y} = \frac{10}{5} = 2$, 故答案为: 2.

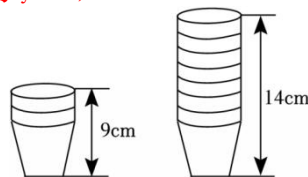
14. 小明在超市帮妈妈买回一袋纸杯, 他把纸杯整齐地叠放在一起, 如图所示, 请你根据图中的信息, 若小明把 50 个纸杯整齐叠放在一起时, 它的高度约是 56 cm.

解: 设每两个纸杯叠放在一起比单独的一个纸杯增高 x cm, 单独一个纸杯的高度为 y cm,

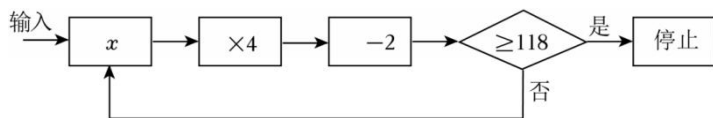
由题意得 $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 7x + y = 14 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$,

则 n 个纸杯叠放在一起时的高度为: $(n-1)x + y = n - 1 + 7 = (n+6)$ cm,

当 $n=50$ 时, 其高度为: $50+6=56$ (cm). 故答案为: 56.



15. 运行某个程序如图所示，若规定从“输入一个值 x ”到“结果是否 ≥ 118 ”为一次程序操作，如果程序操作进行了两次才停止，那么 x 的取值范围是 $8 \leq x < 30$.



解：根据题意得： $\begin{cases} 4x - 2 < 118 \\ 4(4x - 2) - 2 \geq 118 \end{cases}$ ，解得： $8 \leq x < 30$ ， $\therefore x$ 的取值范围为 $8 \leq x < 30$.

故答案为： $8 \leq x < 30$.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 64^\circ$ ， $\angle C = 36^\circ$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转后得 $\triangle ADE$ ， AE 与 BD 相交于点 F . 当 $DE \parallel AB$ 时， $\angle AFD =$ 76 或 14 $^\circ$.

解：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 64^\circ$ ， $\angle C = 36^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 64^\circ - 36^\circ = 80^\circ$ ， $\therefore \angle ADE = \angle ABC = 80^\circ$ ，

$\because AB \parallel DE$ ， $\therefore \angle BAD + \angle ADE = 180^\circ$ ， $\therefore \angle BAD = 100^\circ$ ，

$\because AD = AB$ ， $\therefore \angle ADF = 40^\circ$ ，

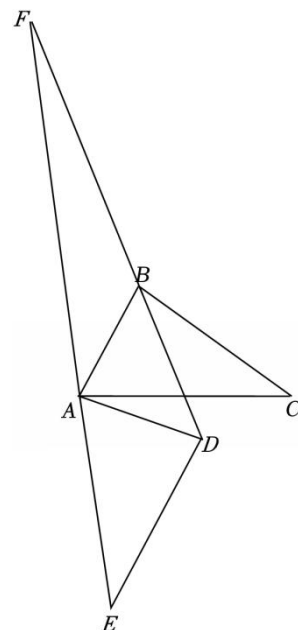
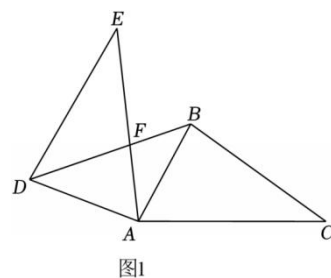
$\because \angle EAD = \angle CAB = 64^\circ$ ， $\therefore \angle AFD = 180^\circ - 40^\circ - 64^\circ = 76^\circ$ ；

如图 2， $\because AB \parallel DE$ ， $\therefore \angle BAD = \angle ADE = 80^\circ$ ，

$\because AD = AB$ ， $\therefore \angle ADF = \angle ABD = 50^\circ$ ， $\therefore \angle EDF = \angle ADE + \angle ADF = 80^\circ + 50^\circ = 130^\circ$ ，

$\because \angle E = \angle C = 36^\circ$ ， $\therefore \angle AFD = 180^\circ - 36^\circ - 130^\circ = 14^\circ$ ，

综上所述， $\angle AFD = 76^\circ$ 或 14° ，故答案为：76 或 14.



三. 解答题（本大题共 10 小题，总分 102 分）

17. (8 分) 解方程组或不等式组：(1) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} \\ 2(x-y) = 11-3y \end{cases}$. (2) $\begin{cases} 3x-1 < x+3 \\ \frac{3x-1}{3} + \frac{2-9x}{6} \leq 1 \end{cases}$.

解：(1) 方程组的解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$. (2) 不等式组的解集是 $-2 \leq x < 2$.

18. (24 分) 计算或化简：

(1) $x^3 \cdot x^2 \cdot x + (x^3)^2 + (-2x^2)^3$.

(2) $-a^2 \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^4$ ；

解：(1) 原式 $= x^6 + x^6 - 8x^6 = -6x^6$.

(2) 原式 $= -a^2 \cdot (-a^3) \cdot a^4 = a^5 \cdot a^4 = a^9$.

(3) $-1^{2025} + 24 + (-2)^3 - 3^2 \times (-\frac{1}{3})^2$.

(4) $(a+2b)(a-2b) + (a-b)^2$.

(3) 原式 $= -1 + 24 - 8 - 9 \times \frac{1}{9} = -1 + 24 - 8 - 1 = 14$. (4) 原式 $= a^2 - 4b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 - 3b^2 - 2ab$.

(5) $(x-1)(5x+3)-(2x+4)(3x-2)$.

(6) $(3x+y)^2-(x+2y)(2x-y)$.

(5) 原式 = $(5x^2 - 2x - 3) - (6x^2 + 8x - 8) = 5x^2 - 2x - 3 - 6x^2 - 8x + 8 = -x^2 - 10x + 5$.

(6) 原式 = $9x^2 + 6xy + y^2 - (2x^2 + 3xy - 2y^2) = 9x^2 + 6xy + y^2 - 2x^2 - 3xy + 2y^2 = (9x^2 - 2x^2) + (6xy - 3xy) + (y^2 + 2y^2) = 7x^2 + 3xy + 3y^2$.

19. 图 1、图 2、图 3 均是 2×2 的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点，点 A、O 均在格点上，点 B 在格线上. 只用无刻度的直尺，在给定的网格中，分别按下列要求画图，保留作图痕迹.

(1) 在图 1 中，作出点 A 关于点 O 的对称点 C，连结 AC.

(2) 在图 2 中，作出线段 AB 关于点 O 的成中心对称线段 DE.

(3) 在图 3 中，已知点 F 是线段 AB 上的任意一点，作出一条线段 OG，使得 $OG = OF$.

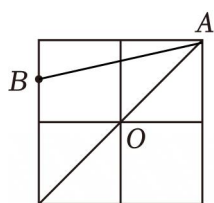


图1

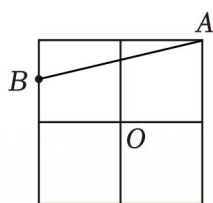


图2

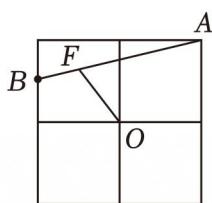
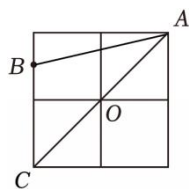


图3

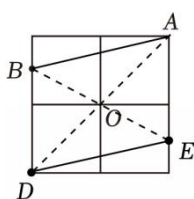
解：(1) 连接 AO 并延长，与网格的交点即为点 C，连接 AC，如图 (1) 所示，点 C 即为所求作的点.

(2) 分别连接 AO, BO 并延长，与网格分别交于点 D 和点 E，如图 2 所示，线段 DE 即为所求作的线段.

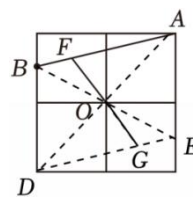
(3) 分别连接 AO, BO 并延长，与网格分别交于点 D 和点 E，连接 DE，连接 FO 并延长与 DE 交于点 G，如图 3 所示，OG 即为所求作的线段.



(1)



(2)



(3)

20. (9 分) 综合与探究

【问题情境】

如图 1，长方形的两边长分别为 $m+2$, $m+8$. 如图 2，长方形的两边长分别为 $m+3$, $m+5$. (其中 m 为正数)

【猜想证明】

(1) (4 分) 判断 S_1 与 S_2 的大小关系，并说明理由.

【深入探究】

(2) 现有一正方形，其周长与图 1 中的长方形的周长相等.

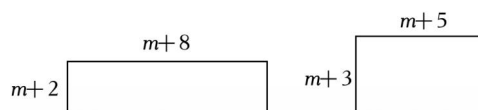


图1

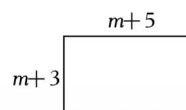


图2

①(3分)求正方形的边长.(用含 m 的代数式表示)

②(2分)试探究:该正方形的面积 S 与图1中长方形的面积 S_1 的差 $(S - S_1)$ 是一个常数,则该常数是 9.

解:(1)根据题意可知,

$$S_1 = (m+8)(m+2) = m^2 + 8m + 2m + 16 = m^2 + 10m + 16,$$

$$S_2 = (m+5)(m+3) = m^2 + 5m + 3m + 15 = m^2 + 8m + 15,$$

$$\therefore S_1 - S_2 = m^2 + 10m + 16 - m^2 - 8m - 15 = 2m + 1,$$

又 $\because m$ 为正数, $\therefore 2m+1 > 0$, $\therefore S_1 > S_2$;

(2) ①根据题意可知, 正方形的周长为: $2(m+2+m+8) = 2(2m+10) = 4m+20$,

$\therefore$ 正方形的边长为: $(4m+20) \div 4 = m+5$;

②根据(1)可知 $S = (m+5)^2 = m^2 + 10m + 25$, $\therefore S - S_1 = m^2 + 10m + 25 - m^2 - 10m - 16 = 9$.

21. 若 $a^m = a^n$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, m, n 是正整数), 则 $m=n$. 利用上面结论解决下面的问题:

(1) 若 $3^x \times 9^x \times 27^x = 3^{12}$, 求 x 的值.

(2) 若 $x = 3^m + 2$, $y = 9^m + 3^m$, 用含 x 的代数式表示 y .

解:(1) $3^x \times 9^x \times 27^x = 3^x \times (3^2)^x \times (3^3)^x = 3^x \times 3^{2x} \times 3^{3x} = 3^{6x}$.

$\therefore 3^{6x} = 3^{12}$, $\therefore 6x = 12$, $\therefore x = 2$.

(2) $\because x = 3^m + 2$, $\therefore 3^m = x - 2$,

$\therefore y = 9^m + 3^m = 3^{2m} + 3^m = (3^m)^2 + 3^m = (x-2)^2 + x - 2 = x^2 - 3x + 2$, $\therefore y = x^2 - 3x + 2$.

22. 定义: 二元一次方程 $y = ax + b$ 与二元一次方程 $y = bx + a$ 互为“反对称二元一次方程”, 如二元一次方程 $y = 2x + 1$ 与二元一次方程 $y = x + 2$ 互为“反对称二元一次方程”.

(1) 直接写出二元一次方程 $y = 4x - 1$ 的“反对称二元一次方程”: $y = -x + 4$.

(2) 二元一次方程 $y = 3x + 5$ 的解 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$, 又是它的“反对称二元一次方程”的解, 求出 m, n 的值.

解:(1) 由题知, 二元一次方程 $y = 4x - 1$ 的“反对称二元一次方程”是 $y = -x + 4$,

故答案为: $y = -x + 4$.

(2) 二元一次方程 $y = 3x + 5$ 的“反对称二元一次方程”是 $y = 5x + 3$,

又 $\because$ 二元一次方程 $y = 3x + 5$ 的解 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$, 又是它的“反对称二元一次方程”的解,

$\therefore \begin{cases} 3m + 5 = n \\ 5m + 3 = n \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 1 \\ n = 8 \end{cases}$, $\therefore m = 1, n = 8$.

23. 某中学新建了一栋4层的教学楼, 每层楼有8间教室, 共有4道门可进出这栋大楼, 其中两道正门大小相同, 两道侧门大小也相同. 安全检查中, 对4道门进行了测试: 当同时开启一道正门和两道侧门时, 1分钟内可以通过140名学生; 当同时开启一道正门和一道侧门时, 4分钟内可通过400名学生.

(1) 平均每分钟一道正门和一道侧门各可以通过多少名学生？

(2) 检查中发现，紧急情况时因学生拥挤，出门的效率降低 20%。安全检查规定，在紧急情况下全大楼的学生应在 10 分钟内通过这 4 道门安全撤离。假设这栋教学楼每间教室最多有 45 名学生，则建造的这 4 道门是否符合安全规定？请说明理由。

解：(1) 设平均每分钟一道正门可以通过 x 名学生，一道侧门可以通过 y 名学生，

依题意，得：
$$\begin{cases} x + 2y = 140 \\ x + y = \frac{400}{4} \end{cases}$$
，解得：
$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \end{cases}$$
。

答：平均每分钟一道正门可以通过 60 名学生，一道侧门可以通过 40 名学生；

(2) 符合安全规定，理由如下：

这栋大楼最多拥有学生数为 $45 \times 8 \times 4 = 1440$ (名)，

10 分钟可通过学生数为 $10 \times (1 - 20\%) \times (60 \times 2 + 40 \times 2) = 1600$ (名)。

$\because 1600 > 1440$ ， $\therefore$ 建造的这 4 道门符合安全规定。

24. 某生态园响应国家发展有机农业政策，大力种植有机蔬菜，某超市看好甲、乙两种有机蔬菜的市场价值，经调查甲种蔬菜进价每千克 m 元，售价每千克 16 元；乙种蔬菜进价每千克 n 元，售价每千克 18 元。

(1) 该超市购进甲种蔬菜 15 千克和乙种蔬菜 20 千克需要 430 元；购进甲种蔬菜 10 千克和乙种蔬菜 8 千克需要 212 元，求 m ， n 的值；

(2) 该超市决定每天购进甲、乙两种蔬菜共 100 千克，且购买甲种蔬菜不多于 60 千克，投入资金不超过 1168 元，设购买甲种蔬菜 x 千克 (x 为正整数)，求有哪几种购买方案；

(3) 在 (2) 的条件下，超市在获得的利润取得最大值时，决定售出的甲种蔬菜每千克捐出 $2a$ 元，乙种蔬菜每千克捐出 a 元给当地福利院，若要保证捐款后的利润率不低于 20%，求 a 的最大值。

解：依题意，得：
$$\begin{cases} 15m + 20n = 430 \\ 10m + 8n = 212 \end{cases}$$
，解得：
$$\begin{cases} m = 10 \\ n = 14 \end{cases}$$
，

答： m 的值为 10， n 的值为 14；

(2) 设购买甲种蔬菜 x 千克，则购买乙种蔬菜 $(100 - x)$ 千克，

依题意，得：
$$\begin{cases} x \leq 60 \\ 10x + 14(100 - x) \leq 1168 \end{cases}$$
，解得： $58 \leq x \leq 60$ 。

$\because x$ 为正整数， $\therefore x = 58, 59, 60$ ，

$\therefore$ 有 3 种购买方案，方案 1：购买甲种蔬菜 58 千克，乙种蔬菜 42 千克；

方案 2：购买甲种蔬菜 59 千克，乙种蔬菜 41 千克；

方案 3：购买甲种蔬菜 60 千克，乙种蔬菜 40 千克；

(3) 设超市获得的利润为 y 元，则 $y = (16 - 10)x + (18 - 14)(100 - x) = 2x + 400$ ，

$\because k=2>0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=60$ 时, y 取得最大值, 最大值为 $2 \times 60 + 400 = 520$,

依题意, 得: $(16 - 10 - 2a) \times 60 + (18 - 14 - a) \times 40 \geq (10 \times 60 + 14 \times 40) \times 20\%$,

解得: $a \leq 1.8$,

答: a 的最大值为 1.8.

25. (9 分) 【给出定义】如果一元一次方程的解也是一元一次不等式组的解, 则称该一元一次方程为该不等式组的“相伴方程”, 例如: 方程 $2x - 6 = 0$ 的解为 $x = 3$, 不等式组 $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x < 5 \end{cases}$ 的解为 $2 < x < 5$, 因为 $2 <$

$3 < 5$, 所以称方程 $2x - 6 = 0$ 为不等式组 $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x < 5 \end{cases}$ 的“相伴方程”.

【初步运用】

(1) 下列方程: ① $x - 1 = 0$; ② $2x + 1 = 0$; ③ $-2x - 2 = 0$. 是不等式组 $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x < 2 \end{cases}$ 的“相伴方程”的是 ①②;

解: (1) 解不等式组 $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x < 2 \end{cases}$, 得 $-1 < x < 2$,

解方程 $x - 1 = 0$ 得: $x = 1$; 解方程 $2x + 1 = 0$ 得: $x = -\frac{1}{2}$; 解方程 $-2x - 2 = 0$ 得: $x = -1$,

$\because -1 < 1 < 2$, $-1 < -\frac{1}{2} < 2$, $-1 = -1$, $\therefore$ ①②是不等式组 $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x < 2 \end{cases}$ 的“相伴方程”,

故答案为: ①②;

(2) (3 分) 若关于 x 的方程 $2x - k = 2$ 是不等式组 $\begin{cases} 3x - 6 > 4 - x \\ x - 1 \geq 4x - 10 \end{cases}$ 的“相伴方程”, 求 k 的取值范围;

解不等式组 $\begin{cases} 3x - 6 > 4 - x \\ x - 1 \geq 4x - 10 \end{cases}$ 得: $\frac{5}{2} < x \leq 3$, 解方程 $2x - k = 2$ 得: $x = \frac{2+k}{2}$,

$\because$ 关于 x 的方程 $2x - k = 2$ 是不等式组 $\begin{cases} 3x - 6 > 4 - x \\ x - 1 \geq 4x - 10 \end{cases}$ 的“相伴方程”, $\therefore \frac{5}{2} < \frac{2+k}{2} \leq 3$,

解得: $3 < k \leq 4$, 即 k 的取值范围是 $3 < k \leq 4$;

【深入探究】(4 分) 若方程 $2x + 6 = 0$, $\frac{2x-1}{3} = -1$ 都是关于 x 的不等式组 $\begin{cases} (m-1)x < m-1 \\ x+5 \geq m \end{cases}$ 的“相伴方程”,

其中 $m \neq 1$, 求 m 的取值范围.

(3) 解方程 $2x + 6 = 0$ 得 $x = -3$, 解方程 $\frac{2x-1}{3} = -1$ 得 $x = -1$,

$\because$ 方程 $2x + 6 = 0$, $\frac{2x-1}{3} = -1$ 都是关于 x 的不等式组 $\begin{cases} (m-1)x < m-1 \\ x+5 \geq m \end{cases}$ 的“相伴方程”, $m \neq 1$,

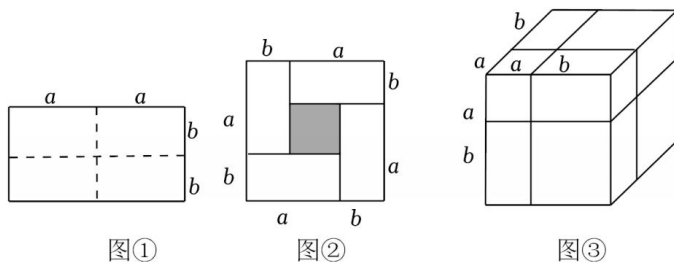
所以分为两种情况：①当 $m < 1$ 时，则 $m - 1 < 0$ ， $\therefore$ 不等式组为 $\begin{cases} x > 1 \\ x \geq m - 5 \end{cases}$ ，

此时不等式组的解集是 $x > 1$ ，不符合题意，舍去；

②当 $m > 1$ 时，不等式组的解集是 $m - 5 \leq x < 1$ ，

所以根据题意得： $\begin{cases} m > 1 \\ m - 5 \leq -3 \end{cases}$ ，解得： $1 < m \leq 2$ ，所以 m 的取值范围是 $1 < m \leq 2$ 。

26. (13 分) 【知识生成】我们知道：对于一个图形，通过不同的方法计算几何图形的面积可以得到一个数学等式，请结合图形解答下列问题：



(1) (3 分) 如图①是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀平均分成四个小长方形，然后按图②的形状拼成一个正方形，用两种不同的方法求阴影部分的面积，得到的数学等式是 $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ；

解：(1) 由图①可知长方形的面积为： $4ab$ ，

由图②可知：大正方形的面积为： $(a+b)^2$ ，阴影部分是小正方形，边长为： $(a-b)$ ，

故得：阴影部分正方形的面积为： $(a-b)^2$ ，

观察图①、②可得：大正方形的面积 - 长方形的面积 = 阴影部分正方形的面积，

即： $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ，

故答案为： $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ；

【知识应用】

(2) (3 分) 若 $x + y = 7$ ， $xy = \frac{13}{4}$ ，求 $x - y$ 的值；

(2) $\because x + y = 7$ ， $xy = \frac{13}{4}$ ，

$\therefore (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 7^2 - 4 \times \frac{13}{4} = 36$ ， $\therefore x - y = \pm 6$ ；

【知识迁移】类似的，用两种不同的方法计算同一几何体的体积，也可以得到一个恒等式。

(3) (3 分) 如图③是用 2 个小正方体和 6 个小长方体拼成的一个大正方体，类比 (1)，用不同的方法表示这个大正方体的体积，得到的数学等式是 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ；

(4) (4 分) 已知 $a+b=7$ ， $a^2b=50$ ， $ab^2=20$ ，利用 (3) 中所得等式，求代数式 a^3+b^3 的值。

$\because a+b=7$ ， $a^2b=50$ ， $ab^2=20$ ， $\therefore a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = 7^3 - 3 \times 50 - 3 \times 20 = 133$ 。