昆山市 2024-2025 学年第一学期高一数学期末考试模拟试题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$M=\{1,3,4\}$，$N=\{2,4,5\}$，则$M\cap(\complement_U N)=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{4\}$　　C. $\{1,3\}$　　D. $\{2,5\}$

2. 已知幂函数$y=f(x)$的图象过点$(3,\sqrt{3})$，则函数$y=f(x)+f(2-x)$的定义域为（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $(0,2)$　　C. $(0,2]$　　D. $[0,2]$

3. “实数$a=-1$”是“函数$f(x)=x^2+2ax-3$在$(1,+\infty)$上具有单调性”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C　充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某数学兴趣小组为研究指数函数的“爆炸性增长”进行了折纸活动.一张纸每对折一次，纸张变成两层，纸张厚度会翻一倍.现假定对一张足够大的纸张（其厚度等同于 0.0766 毫米的胶版纸）进行无限次的对折.借助计算工具进行运算，整理记录了其中的三次数据如下：

折纸次数	纸张厚度	参照物
22	321 米	苏州东方之门的高度约为 301.8 米
27	10281 米	珠穆朗玛峰的高度约为 8844 米
38	2.1 万公里	地球直径约为 1.3 万公里

已知地球到月亮的距离约为 38 万公里，问理论上至少对折（　　）次，纸张的厚度会超过地球到月亮的距离.

A. 41　　B. 43　　C. 45　　D. 47

5. 已知一个扇形的周长为40cm，面积为100cm^2，则该扇形的圆心角的弧度数为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

6. 已知$\cos\alpha-\sin\alpha=2\sin\alpha\tan\alpha$，其中$\alpha$为第一象限角，则$\tan\alpha=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

7. 已知 $f(x)$ 为偶函数，对任意实数 x 都有 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^3$.若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_a|x|$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象恰有 6 个交点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(3,5)$　　B. $(3,5]$　　C. $(5,7)$　　D. $(5,7]$

8. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象过点 $(0,1)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$ 上具有单调性，则 ω 的最大值为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. 4　　C. $\frac{16}{3}$　　D. 8

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9 已知函数 $f(x)=x+\frac{k}{x}(k\in\mathbf{R})$，则（　　）

A. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

B. 当 $k=-1$ 时，$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

C. 当 $k=1$ 时，$f(x)$　$(0,+\infty)$ 上单调递增

D. 当 $k=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

10. 下列关系式成立的有（　　）

A. $\sin1<1<\tan1$

B. $\sin1<\cos1$

C. $\sqrt{1+2\sin1\cos1}=\sin1+\cos1$

D. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-1\right)=\sin1$

11. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=4$，则（　　）

A　$\ln x+\ln y\le\ln2$

B. $2^x+4^y<8$

C. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\ge\frac{9}{4}$

D. $e^{x^2}\ge e^{8-4y^2}$

12 已知 $a=\log_8 3$，$b=\log_{27}5$，$c=\log_{49}9$，则（　　）

A. $9ab=\log_2 5$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<a<c$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 命题“$\forall x>0$，$x^2-\sin x>0$”的否定是________.

14. 写出满足条件“存在$x\in(-\infty,0]$，使得$x^2-2^x+a<0$”的一个实数a的值为__________.

15. 已知正数a，b满足$\frac{4}{a}+b=1$，则$a+\frac{1}{b}$的最小值为_________.

16. 已知不等式$(2\cos x-1)\sin(\omega x+\varphi)\geq 0$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）对$\forall x\in(0,2\pi)$恒成立，则$\omega=$

_________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\left\{x\,|\,\frac{x-2}{x+1}<\frac{1}{2}\right\}$，$B=\{x|m\leq x\leq m+4,m\in\mathbf{R}\}$.

（1）若$m=-1$，求$A\cup B$，$A\cap(\complement_U B)$；

（2）若$A\cup B=A$，求m的取值范围.

18. 在平面直角坐标系xOy中，已知角θ的终边经过点$P(3a,-4a)$，其中$a\neq 0$.

（1）求$\cos\theta$的值；

（2）若θ为第二象限角，求$\cos\theta\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}+\sin\theta\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$的值.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象过点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，且相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

（1）求函数 $y=f\left(x\right)$的图象的所有对称轴方程；

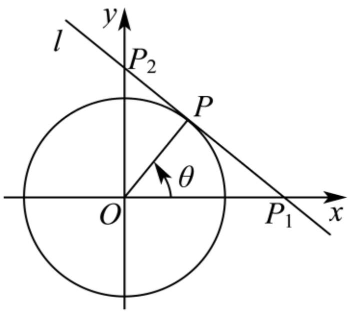
（2）若将函数 $y=f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位后得到函数 $y=g\left(x\right)$的图象，求 $g\left(x\right)$，$x\in\left[0,\pi\right]$的单调递减区间.

20. 已知函数 $y=a^{x}$（$a>0$且$a\neq1$）在$[1,2]$上的最大值与最小值之积等于 8，设函数 $f\left(x\right)=\frac{a^{x}}{a^{x}+1}$.

（1）求a的值，并证明$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{2}$为奇函数；

（2）若不等式 $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)-m<1$对$\forall x\in\mathrm{R}$恒成立，求实数$m$的取值范围.

21. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，锐角 θ 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 P，过 P 作单位圆 O 的切线 l，l 与 x 轴和 y 轴分别交于 $P_1(x_0,0)$，$P_2(0,y_0)$ 两点.



（1）若 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，求△ OP_1P_2 的周长；

（2）若 $x_0^2+4y_0^2=9$，求△ OP_1P_2 的面积.

22. 已知函数 $f(x)=ax^2-|x-a|$，其中 $a\in\mathrm{R}$.

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性（直接写出结论，不必说明理由）；

（2）证明：当 $a\neq0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)+f\left(-\dfrac{1}{a}\right)\leq0$；

（3）若函数 $y=f(e^x)$ 有三个零点，求 a 的取值范围.

昆山市 2024-2025 学年第一学期高一数学期末考试模拟试题

答案与解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$M=\{1,3,4\}$，$N=\{2,4,5\}$，则$M\cap(\complement_U N)=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{4\}$　　C. $\{1,3\}$　　D. $\{2,5\}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，利用补集、交集的定义求解即得.

【详解】全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，由$N=\{2,4,5\}$，得$\complement_U N=\{1,3\}$，又$M=\{1,3,4\}$，

所以$M\cap\left(\complement_U N\right)=\{1,3\}$.

故选：C

2. 已知幂函数$y=f\left(x\right)$的图象过点$\left(3,\sqrt{3}\right)$，则函数$y=f\left(x\right)+f\left(2-x\right)$的定义域为（　　）

A. $\left(-2,2\right)$　　B. $\left(0,2\right)$　　C. $\left(0,2\right]$　　D. $\left[0,2\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】设$f(x)=x^{\alpha}$，根据条件求出α，然后根据函数$y=f\left(x\right)+f\left(2-x\right)$的解析式，列出不等式求得定义域.

【详解】设$f(x)=x^{\alpha}$，$\because$函数的图象过点$\left(3,\sqrt{3}\right)$，

$\therefore f(3)=3^{\alpha}=\sqrt{3}$，则$\alpha=\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，

$\therefore y=f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$，

$\therefore x\geq 0$且$2-x\geq 0$，即$0\leq x\leq 2$，

则函数$y=f\left(x\right)+f\left(2-x\right)$的定义域为$\left[0,2\right]$.

故选：D.

3. “实数$a=-1$”是“函数$f\left(x\right)=x^2+2ax-3$在$\left(1,+\infty\right)$上具有单调性”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次函数的单调性求出$a \geq -1$，再根据充分不必要条件的判定即可.

【详解】当$a=-1$时，$f\left(x\right)=x^2-2x-3=\left(x-1\right)^2-4$，则$f\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

即其在$\left(1,+\infty\right)$上具有单调性，则正向可以推出；

若函数$f\left(x\right)=x^2+2ax-3$在$\left(1,+\infty\right)$上具有单调性，

则对称轴$x=-a \leq 1$，解得$a \geq -1$，则反向无法推出；

故“实数$a=-1$”是“函数$f\left(x\right)=x^2+2ax-3$在$\left(1,+\infty\right)$上具有单调性”的充分不必要条件.

故选：A.

4. 某数学兴趣小组为研究指数函数的“爆炸性增长”进行了折纸活动.一张纸每对折一次，纸张变成两层，纸张厚度会翻一倍.现假定对一张足够大的纸张（其厚度等同于 0.0766 毫米的胶版纸）进行无限次的对折.借助计算工具进行运算，整理记录了其中的三次数据如下：

折纸次数	纸张厚度	参照物
22	321 米	苏州东方之门的高度约为 301.8 米
27	10281 米	珠穆朗玛峰的高度约为 8844 米
38	2.1 万公里	地球直径约为 1.3 万公里

已知地球到月亮的距离约为 38 万公里，问理论上至少对折（　　）次，纸张的厚度会超过地球到月亮的距离.

A. 41　　B. 43　　C. 45　　D. 47

【答案】B

【解析】

【分析】设至少对折x次，纸张厚度超过 38 万公里，由题意可得关于x的不等式，根据指数函数的性质解不等式即可.

【详解】设$a=0.0766$，则由题意$a\cdot 2^{38}=2.1$(万公里)，

设至少对折x次，纸张厚度超过 38 万公里，

则$a\cdot 2^x>38 \Rightarrow \dfrac{2.1}{2^{38}}\cdot 2^x>38 \Rightarrow 2^{x-38}>\dfrac{38}{2.1}\approx 18.1$，

因为$2^4=16<18, 2^5=32>18$，函数$y=2^x$在$\mathbf{R}$上单调递增，

所以 $x-38\geq 5 \Rightarrow x\geq 43$，

所以理论上至少对折 43 次，纸张 厚度会超过地球到月亮的距离.

故选：B.

5. 已知一个扇形的周长为 40cm，面积为 100cm^2，则该扇形的圆心角的弧度数为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用扇形的弧长和面积公式列方程求出 l,R，利用弧度数公式求得结果.

【详解】设扇形的弧长为 l，半径为 R，

则 $l+2R=40$ 且 $\frac{1}{2}l\cdot R=100$，解得 $l=20,R=10$，

则该扇形的圆心角的弧度数为 $\theta=\frac{l}{R}=2$，

故选：D.

6. 已知 $\cos\alpha-\sin\alpha=2\sin\alpha\tan\alpha$，其中 α 为第一象限角，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】弦化切得到得到关于 $\tan\alpha$ 的方程，再根据 α 范围解出即可.

【详解】等式 $\cos\alpha-\sin\alpha=2\sin\alpha\tan\alpha$，两边同除 $\cos\alpha$ 得 $1-\tan\alpha=2\tan^2\alpha\Rightarrow\tan\alpha=-1$ 或 $\frac{1}{2}$，

因为 α 为第一象限角，则 $\tan\alpha>0$，

所以 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

故选：B

7. 已知 $f(x)$ 为偶函数，对任意实数 x 都有 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^3$.若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_a|x|$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象恰有 6 个交点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(3,5)$　　B. $(3,5]$　　C. $(5,7)$　　D. $(5,7]$

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数性质作出函数图象，即可利用图象列不等关系求解.

【详解】由于 $f\left(x\right)$ 为偶函数， $g\left(x\right)=\log_a\left|x\right|$ 也是偶函数，

则只需要 $y=f\left(x\right)$ 的图象与函数 $g\left(x\right)=\log_a\left|x\right|$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恰好有 3 个交点，则 $a>1$

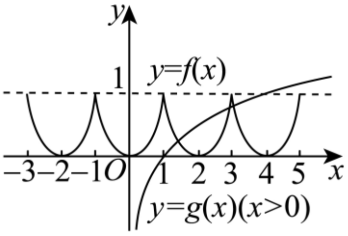
根据 $f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$ 可得 $y=f\left(x\right)$ 的周期为 2，作出函数图象如下：

$y=f\left(x\right)$ 图象与 $g\left(x\right)=\log_a\left|x\right|$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恰好有 3 个交点，则 $a>1$

同时满足 $g\left(3\right)=\log_a 3<1$ 且 $g\left(5\right)=\log_a 5>1$，

故 $3<a<5$，

故选：A



8. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象过点 $\left(0,1\right)$，且 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$ 上具有单调性，则 ω 的最大值为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. 4　　C. $\frac{16}{3}$　　D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】由函数 $f\left(x\right)$ 的图象过点 $\left(0,1\right)$ 求得 φ，根据函数的单调性，结合三角函数的性质列式求得 ω 的范围，即可得解.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)$ 的图象过点 $\left(0,1\right)$，所以 $f(0)=2\sin\varphi=1\Rightarrow\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，

当 $x\in(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4})$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\omega\pi}{8}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6})$，

因为 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4})$ 上具有单调性，

所以 $(\frac{\omega\pi}{8}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6})\subseteq(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi),k\in\mathbf{Z}$，

即 $\frac{\omega\pi}{8}+\frac{\pi}{6}\ge-\frac{\pi}{2}+k\pi$ 且 $\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

则 $-\frac{16}{3}+8k\le\omega\le\frac{4}{3}+4k,k\in\mathbf{Z}$，

因为 $-\frac{16}{3}+8k\le\frac{4}{3}+4k$，得 $k\le\frac{5}{3}$，

因为 $\omega>0$，所以 $k=0$ 时，$\omega\in[-\frac{16}{3},\frac{4}{3}]$，则 $\omega\in(0,\frac{4}{3}]$；当 $k=1$ 时，$\omega\in[\frac{8}{3},\frac{16}{3}]$，

综上，$\omega\in(0,\frac{4}{3}]\cup[\frac{8}{3},\frac{16}{3}]$，即 ω 的最大值为 $\frac{16}{3}$，

故选：C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=x+\frac{k}{x}\left(k\in\mathbf{R}\right)$，则（　　）

A. 当 $k=1$ 时，$f\left(x\right)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

B. 当 $k=-1$ 时，$f\left(x\right)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

C. 当 $k=1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增

D. 当 $k=-1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增

【答案】BD

【解析】

【分析】根据对勾函数和“川字”函数的单调性和值域并结合图象意一一分析即可.

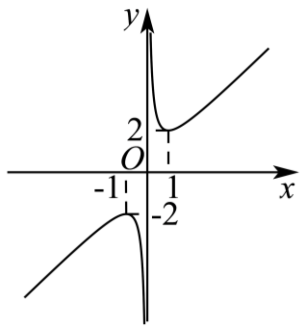
【详解】当 $k=1$ 时，$f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$，定义域为 $\left\{x\mid x\ne0\right\}$，关于原点对称，且

$f\left(-x\right)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}\ge2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，

因为 $f\left(x\right)$ 为奇函数，则当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)\le-2$，

作出对勾函数的图象如图所示：



则其值域为$\left(-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$，故 A 错误，

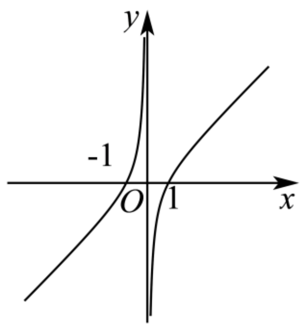
取 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$， $f\left(1\right)=2$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>f\left(1\right)$，则 C 错误；

当当$k=-1$时， $f\left(x\right)=x+\dfrac{-1}{x}$，定义域为$\left\{x\,|\,x\neq 0\right\}$，关于原点对称，

且 $f\left(-x\right)=-x+\dfrac{-1}{-x}=-\left(x+\dfrac{-1}{x}\right)=-f\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)$为奇函数，

当$x>0$时，因为$y=x, y=-\dfrac{1}{x}$均单调递增，则 $f\left(x\right)=x+\dfrac{-1}{x}$单调递增，故 D 正确；

当$x>0$且$x\to 0$时， $f\left(x\right)\to-\infty$；当$x\to+\infty$时， $f\left(x\right)\to+\infty$，结合其奇偶性作出函数图象：



则当$k=-1$时， $f\left(x\right)$的值域为$\mathbf{R}$，故 B 正确.

故选：BD.

10. 下列关系式成立的有（　　）

A. $\sin 1<1<\tan 1$　　B. $\sin 1<\cos 1$

C. $\sqrt{1+2\sin 1\cos 1}=\sin 1+\cos 1$　　D. $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-1\right)=\sin 1$

【答案】AC

【解析】

【分析】当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\sin x<x<\tan x$，由此结论可判断 A；由 $\dfrac{\pi}{2}>1>\dfrac{\pi}{4}$ 结合正弦函数及余弦函数的性质可判断 B；因为 $\sin1,\cos1$ 均大于 0，计算即可判断 C；根据诱导公式 $\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$ 可判断 D.

【详解】对于 A，当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\sin x<x<\tan x$，所以 $\sin1<1<\tan1$，A 正确；

对于 B，因为 $\dfrac{\pi}{2}>1>\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\sin1>\dfrac{\sqrt{2}}{2}>\cos1$，B 错误；

对于 C，因为 $\sin1,\cos1$ 均大于 0，所以 $\sqrt{1+2\sin1\cos1}=\sqrt{(\sin1+\cos1)^2}=\sin1+\cos1$，C 正确；

对于 D，根据诱导公式 $\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$，所以 $\cos(\dfrac{3}{2}\pi-1)=-\sin1$，D 错误.

故选：AC.

11. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=4$，则（　　）

A. $\ln x+\ln y\le\ln2$

B. $2^x+4^y<8$

C. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\ge\dfrac{9}{4}$

D. $e^{x^2}\ge e^{8-4y^2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用基本不等式可得 $xy\le2$，结合对数函数的性质可判断 A；取 $x=1,y=\dfrac{3}{2}$ 可判断 B；利用 1 的妙用和基本不等式可判断 C；结合 $xy\le2$ 可得 $x^2+4y^2\ge8$，从而 $x^2\ge8-4y^2$，即可判断 D.

【详解】对于 A，因为 $4=x+2y\ge2\sqrt{2xy}\Leftarrow xy\le2,$ 当且仅当 $x=2,y=1$ 时取等号，

所以 $\ln x+\ln y=\ln xy\le\ln2$，A 正确；

对于 B，取 $x=1,y=\dfrac{3}{2}$，则 $2^x+4^y=2+4^{\frac{3}{2}}=2+8=10>8$，B 错误；

对于 C，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y})(x+2y)=\dfrac{1}{4}(1+4+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{2x}{y})\ge\dfrac{1}{4}(5+2\sqrt{\dfrac{2y}{x}\cdot\dfrac{2x}{y}})=\dfrac{9}{4}$，

当且仅当 $\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2x}{y}$，即 $x=y=\dfrac{4}{3}$ 时取等号，C 正确；

对于 D，因为 $x^2+4y^2=(x+2y)^2-4xy=16-4xy\ge8,$

所以 $x^2 \geq 8-4y^2 \Rightarrow \mathrm{e}^{x^2} \geq \mathrm{e}^{8-4y^2}$，D 正确.

故选：ACD.

12. 已知 $a=\log_8 3$，$b=\log_{27} 5$，$c=\log_{49} 9$，则（　　）

A　$9ab=\log_2 5$　　　　B. $a<b<c$　　　　C. $c<b<a$　　　　D. $b<a<c$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据换底公式即可求解 A，根据对数的运算性质即可求解 BCD.

【详解】对于 A，$9ab=9\log_8 3\cdot\log_{27} 5=9\times\frac{\log_2 3}{\log_2 8}?\frac{\log_2 5}{\log_2 27}=9\times\frac{\log_2 3}{3}?\frac{\log_2 5}{3\log_2 3}=\log_2 5$，故 A 正确，

$a=\log_8 3=\frac{1}{3}\log_2 3$，$b=\log_{27} 5=\frac{1}{3}\log_3 5$，

由于 $3^2>2^3 \therefore \log_2 3>\frac{3}{2}$，$5^2<3^3, \therefore \log_3 5<\frac{3}{2}$，故 $a>b$，

$c=\log_{49} 9=\log_7 3>\log_8 3=a$，所以 $c>a$，

故 $b<a<c$，故 BC 错误，D 正确，

故选：AD

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是利用换底公式转化对数式，结合临界值 $\frac{3}{2}$ 得解.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 命题“$\forall x>0$，$x^2-\sin x>0$”的否定是________.

【答案】$\exists x>0$，$x^2-\sin x\leq 0$

【解析】

【分析】根据全称命题的否定是特称命题即可得出结果.

【详解】∵全称命题的否定是特称命题，

∴命题“$\forall x>0$，$x^2-\sin x>0$”的否定是“$\exists x>0$，$x^2-\sin x\leq 0$”.

故答案为：$\exists x>0$，$x^2-\sin x\leq 0$.

14. 写出满足条件“存在 $x\in(-\infty,0]$，使得 $x^2-2^x+a<0$”的一个实数 a 的值为__________.

【答案】0（答案不唯一）

【解析】

【分析】举例 $a=0$，再验证即可.

【详解】取 $a=0$，则原条件为“存在 $x\in(-\infty,0]$，使得 $x^2-2^x<0$”，

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{4}<0$，满足题意；

故答案为：0（答案不唯一）.

15. 已知正数 a，b 满足 $\dfrac{4}{a}+b=1$，则 $a+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为_________.

【答案】9

【解析】

【分析】根据题意，化简得到 $a+\dfrac{1}{b}=(a+\dfrac{1}{b})(\dfrac{4}{a}+b)=5+ab+\dfrac{4}{ab}$，结合基本不等式，即可求解.

【详解】由正数 a，b 满足 $\dfrac{4}{a}+b=1$，则 $a+\dfrac{1}{b}=(a+\dfrac{1}{b})(\dfrac{4}{a}+b)=5+ab+\dfrac{4}{ab}\geq 5+2\sqrt{ab\times\dfrac{4}{ab}}=9$，

当且仅当 $ab=\dfrac{4}{ab}$ 时，即 $a=6,b=\dfrac{1}{3}$ 时，等号成立，

所以 $a+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 9.

故答案为：9.

16. 已知不等式 $(2\cos x-1)\sin(\omega x+\varphi)\geq 0$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）对 $\forall x\in(0,2\pi)$ 恒成立，则 $\omega=$

_________.

【答案】$\dfrac{3}{4}$ ##0.75

【解析】

【分析】求出 $2\cos x-1\geq 0$ 和 $2\cos x-1<0$ 时的解集，从而得到当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)$ 时，$\sin(\omega x+\varphi)\geq 0$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$ 时，$\sin(\omega x+\varphi)\leq 0$，得到方程组，求出答案.

【详解】$x\in(0,2\pi)$ 时，令 $2\cos x-1\geq 0$ 得 $\cos x\geq\dfrac{1}{2}$，故 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)$，

令 $2\cos x-1<0$ 得 $\cos x<\frac{1}{2}$，故 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，

要想 $(2\cos x-1)\sin(\omega x+\varphi)\ge 0$ 对 $\forall x\in(0,2\pi)$ 恒成立，显然 $\sin(\omega x+\varphi)=0$ 不恒成立，

其中 $\omega>0$，则当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$ 时，$\sin(\omega x+\varphi)\ge 0$，

此时 $\omega x+\varphi\in\left(\varphi,\frac{\omega\pi}{3}+\varphi\right]\cup\left[\frac{5\omega\pi}{3}+\varphi,2\omega\pi+\varphi\right)$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ 时，$\sin(\omega x+\varphi)\le 0$，此时 $\omega x+\varphi\in\left(\frac{\omega\pi}{3}+\varphi,\frac{5\omega\pi}{3}+\varphi\right)$，

由于 $0<\varphi<\pi$，故 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{3}+\varphi=\pi\\ \frac{5\omega\pi}{3}+\varphi=2\pi\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\omega=\frac{3}{4}\\ \varphi=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$，

此时 $2\omega\pi+\varphi=\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}<3\pi$，满足要求，

故答案为：$\frac{3}{4}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\mid\frac{x-2}{x+1}<\frac{1}{2}\right\}$，$B=\{x\mid m\le x\le m+4,m\in\mathbf{R}\}$.

（1）若 $m=-1$，求 $A\cup B$，$A\cap\left(\complement_U B\right)$；

（2）若 $A\cup B=A$，求 m 的取值范围.

【答案】（1）$A\cup B=[-1,5),A\cap\left(\complement_U B\right)=(3,5)$.

（2）$(-1,1)$

【解析】

【分析】（1）解除分式不等式得到集合 A，再利用交并补运算即可；

（2）根据补集结果得到 $B\subseteq A$，从而得到不等式组，解出即可.

【小问 1 详解】

因为 $\frac{x-2}{x+1}<\frac{1}{2}$，所以 $\frac{x-5}{2(x+1)}<0$，

所以 $-1<x<5$，即 $A=(-1,5)$，

当 $m=-1$ 时，$B=[-1,3],\complement_U B=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，

所以 $A\cup B=[-1,5),A\cap\left(\complement_U B\right)=(3,5)$.

【小问 2 详解】

因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，

又因为 $B=\{x|\ m\le x\le m+4\}$，所以 $\begin{cases}m>-1\\m+4<5\end{cases}$，

解得 $-1<m<1$，即 m 的取值范围为 $(-1,1)$.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知角 θ 的终边经过点 $P(3a,-4a)$，其中 $a\ne0$.

（1）求 $\cos\theta$ 的值；

（2）若 θ 为第二象限角，求 $\cos\theta\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}+\sin\theta\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ 的值.

【答案】（1）$a>0$ 时，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$；$a<0$ 时，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

（2）$-\dfrac{7}{5}$

【解析】

【分析】（1）利用三角函数的定义求解；

（2）由 θ 为第二象限角得 $\cos\theta$，利用同角三角函数关系式得 $\sin\theta$，代入计算即可.

【小问 1 详解】

因为 $P(3a,-4a),a\ne0$，所以 $|OP|=\sqrt{(3a)^2+(-4a)^2}=5|a|$，

当 $a>0$ 时，$\cos\theta=\dfrac{3a}{5|a|}=\dfrac{3a}{5a}=\dfrac{3}{5}$；

当 $a<0$ 时，$\cos\theta=\dfrac{3a}{5|a|}=\dfrac{3a}{-5a}=-\dfrac{3}{5}$，

综上，$a>0$ 时，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$；$a<0$ 时，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$.

【小问 2 详解】

因为 θ 为第二象限角，所以 $a<0$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，

则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(-\dfrac{3}{5})^2}=\dfrac{4}{5}$，

所以$\cos\theta\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}+\sin\theta\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}}+\frac{4}{5}\times\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}=-\frac{3}{5}\times3+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=-\frac{7}{5}$.

19. 已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象过点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，且相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

（1）求函数$y=f\left(x\right)$的图象的所有对称轴方程；

（2）若将函数$y=f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位后得到函数$y=g\left(x\right)$的图象，求$g\left(x\right)$，$x\in\left[0,\pi\right]$的单调递减区间.

【答案】（1）$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$

（2）$\left[0,\frac{7\pi}{24}\right],\left[\frac{19\pi}{24},\pi\right]$

【解析】

【分析】（1）根据对称轴距离得到周期，则求出$\omega=2$，再将点代入即可得到解析式，最后写出对称轴通式，解出即可；

（2）先根据平移的原则得到平移后的解析式，再写出单调减区间的通式，解出不等式，对k合理赋值即可.

【小问 1 详解】

因为函数$f(x)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，

所以$f(x)$的最小正周期为$T=\pi$，即$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，由$\omega>0$，解得$\omega=2$.

因为$f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，所以$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$\frac{\pi}{2}<\varphi+\frac{\pi}{2}<\pi$，所以$\varphi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$，即$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

所以$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

【小问 2 详解】

由题意得 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{11\pi}{12}\right)$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{11\pi}{12}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{5\pi}{24}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$，

令 $k=0,1$，得 $-\frac{5\pi}{24}\le x\le\frac{7\pi}{24}$ 和 $\frac{19\pi}{24}\le x\le\frac{31\pi}{24}$，

所以 $g(x),x\in[0,\pi]$ 的单调递减区间为 $\left[0,\frac{7\pi}{24}\right],\left[\frac{19\pi}{24},\pi\right]$.

20. 已知函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\ne1$）在 $[1,2]$ 上的最大值与最小值之积等于 8，设函数 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}$.

（1）求 a 的值，并证明 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$ 为奇函数；

（2）若不等式 $f(x)+f(1-x)-m<1$ 对 $\forall x\in\mathrm{R}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）$a=2$；证明见解析

（2）$(3-2\sqrt{2},+\infty)$

【解析】

【分析】（1）根据题意，利用指数函数的单调性，得到 $a\times a^2=8$，得出 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$，再由函数奇偶性的定义和判定方法，即可求解；

（2）根据题意，化简得到 $f(x)+f(1-x)=1+\frac{2^x}{2^x+\frac{1}{2^x}+3}$，利用基本不等式，求得 $f(x)+f(1-x)$ 的最大值，结合题意，即可求得实数 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递增；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，

所以函数 $y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上的最大值与最小值之积等于 $a\times a^2=8$，解得 $a=2$，

可得 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$，则 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}=\frac{2^x}{2^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{2^x-1}{2(2^x+1)}$，其定义域为 R，

又由 $g(-x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2^{x}}{2^{x}+1}=-g(x)$，所以函数 $g(x)$ 为R 上的奇函数.

【小问 2 详解】

解：由 $f(x)+f(1-x)=\frac{2^{x}}{2^{x}+1}+\frac{2^{1-x}}{2^{1-x}+1}=\frac{2^{x}}{2^{x}+1}+\frac{2}{2+2^{x}}=\frac{2^{2x}+4\cdot2^{x}+2}{2^{2x}+3\cdot2^{x}+2}$

$=1+\frac{2^{x}}{2^{2x}+3\cdot2^{x}+2}=1+\frac{1}{2^{x}+\frac{1}{2^{x}}+3}$，

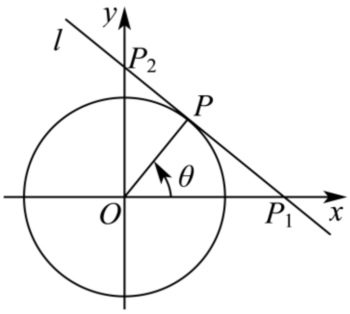
因为 $2^{x}+\frac{2}{2^{x}}\geq2\sqrt{2^{x}\cdot\frac{2}{2^{x}}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $2^{x}=\frac{2}{2^{x}}$ 时，即 $x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 $f(x)+f(1-x)=1+\frac{1}{2^{x}+\frac{1}{2^{x}}+3}\leq1+\frac{1}{2\sqrt{2}+3}=1+3-2\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}$，

因为对 $\forall x\in R, f(x)+f(1-x)-m<1$ 恒成立，所以 $m+1>4-2\sqrt{2}$，

即 $m>3-2\sqrt{2}$，所以实数 m 的取值范围为 $(3-2\sqrt{2},+\infty)$.

21. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，锐角 θ 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 P，过 P 作单位圆 O 的切线 l，l 与 x 轴和 y 轴分别交于 $P_1(x_0,0)$，$P_2(0,y_0)$ 两点.



（1）若 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，求 $\triangle OP_1P_2$ 的周长；

（2）若 $x_0^2+4y_0^2=9$，求 $\triangle OP_1P_2$ 的面积.

【答案】（1）5

（2）$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】（1）根据题意 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$，结合 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，解出 $\sin\theta,\cos\theta$，再找到边长与三

角函数关系，计算即可；

（2）根据 x_0, y_0 与三角函数的关系得到方程，解出 $\sin^2\theta=\frac{2}{3}$，再结合同角三角函数的关系和 θ 的范围即可求出三角函数值，再得到面积与三角函数值之间的关系，最后计算即可.

【小问 1 详解】

因为直线 l 与圆 O 相切，所以 $OP\perp l$.

在直角三角形 OPP_1 中，$\frac{OP}{OP_1}=\cos\theta$，所以 $x_0=OP_1=\frac{1}{\cos\theta}$.

在直角三角形 OPP_2 中，$\frac{OP}{OP_2}=\sin\theta$，所以 $y_0=OP_2=\frac{1}{\sin\theta}$.

因为 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$，且 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $\sin^2\theta=\frac{9}{25},\cos^2\theta=\frac{16}{25}$，

又因为 θ 为锐角，所以 $\sin\theta=\frac{3}{5},\cos\theta=\frac{4}{5}$，

所以 $\triangle OP_1P_2$ 的周长为 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}}=5$.

【小问 2 详解】

因为 $x_0^2+4y_0^2=9$，所以 $\frac{4}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta}+\frac{1}{1-\sin^2\theta}=9$，

所以 $\sin^2\theta=\frac{2}{3}$，所以 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{1}{3}$.

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3},\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\triangle OP_1P_2$ 的面积 $S_{\triangle OP_1P_2}=\frac{1}{2}x_0y_0=\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{6}}\times\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

22. 已知函数 $f(x)=ax^2-|x-a|$，其中 $a\in\mathrm{R}$.

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性（直接写出结论，不必说明理由）；

（2）证明：当 $a\neq0$ 时，$f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(-\frac{1}{a}\right)\le0$；

（3）若函数 $y=f\left(\mathrm{e}^x\right)$ 有三个零点，求 a 的取值范围.

【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析　　（3）$(0,\frac{1}{2})$

【解析】

【分析】（1）根据题意，分 $a=0$ 和 $a\neq 0$，两种情况，结合函数奇偶性的定义，即可求解；

（2）根据题意，得到 $f(\frac{1}{a})+f(-\frac{1}{a})=\frac{2}{a}-(\left|a+\frac{1}{a}\right|+\left|a-\frac{1}{a}\right|)$，分 $a<0$，$0<a\leq 1$ 和 $a>1$，三种情况讨论，分别得到 $f(\frac{1}{a})+f(-\frac{1}{a})\leq 0$，即可得证；

（3）设 $t=e^x$，问题可转化为函数 $y=f\left(t\right)$ 有三个大于 0 的零点，分 $a=0$，$a<0$ 和 $a>0$，三种情况讨论，转化为 $f\left(t\right)$ 在 $(0,a)$ 有且仅有 1 个零点，在 $(a,+\infty)$ 上有且仅有 2 个零点，列出不等式组，即可求解.

【小问 1 详解】

当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=-|x|$，其定义域为 R，且 $f\left(-x\right)=-|-x|=-|x|=f\left(x\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数；

当 $a\neq 0$ 时，函数 $f\left(x\right)=ax^2-|x-a|$，可得 $f\left(-x\right)\neq f\left(x\right)$ 且 $f\left(-x\right)\neq -f\left(x\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 既不是奇函数又不是偶函数.

【小问 2 详解】

由函数 $f\left(x\right)=ax^2-|x-a|$，

可得 $f(\frac{1}{a})+f(-\frac{1}{a})=\frac{2}{a}-(\left|a+\frac{1}{a}\right|+\left|a-\frac{1}{a}\right|)$，

当 $a<0$ 时，因为 $\frac{2}{a}<0$，$\left|a+\frac{1}{a}\right|+\left|a-\frac{1}{a}\right|>0$，所以 $f(\frac{1}{a})+f(-\frac{1}{a})<0$；

当 $0<a\leq 1$ 时，$f(\frac{1}{a})+f(-\frac{1}{a})=\frac{2}{a}-(a+\frac{1}{a})+(a-\frac{1}{a})=0$；

当 $a>1$ 时，$f(\frac{1}{a})+f(-\frac{1}{a})=\frac{2}{a}-(a+\frac{1}{a})-(a-\frac{1}{a})=2(\frac{1}{a}-a)=\frac{2(1-a^2)}{a}<0$，

综上可得，当 $a\neq 0$ 时，$f(\frac{1}{a})+f(-\frac{1}{a})\leq 0$.

【小问 3 详解】

设 $t=e^x(t>0)$，

因为 t 是关于 x 的单调增函数，问题可转化为函数 $y=f\left(t\right)$ 有三个大于 0 的零点，

当 $a=0$ 时，$f\left(t\right)=-\left|t\right|$，所以 $f\left(t\right)$ 只有一个零点为 0，不符合题意；

当 $a<0$ 时，$f\left(t\right)=at^2-\left|t-a\right|<0$，所以 $f\left(t\right)$ 无零点，不符合题意；

当 $a>0$ 时，$f\left(t\right)=\begin{cases}at^2-t+a,t\geq a\\ at^2+t-a,t<a\end{cases}$，

因为 $y=at^2+t-a$ 的图象的对称轴为 $t=-\dfrac{1}{2a}$，所以 $f\left(t\right)$ 在 $(0,a)$ 上递增，

所以 $f\left(t\right)$ 在 $(0,a)$ 上至多有 1 个零点；

又因为 $y=at^2-t+a$ 的图象对称轴为 $t=\dfrac{1}{2a}>0$，所以 $f\left(t\right)$ 在 $(a,+\infty)$ 上至多有 2 个零点，

问题等价于 $f\left(t\right)$ 在 $(0,a)$ 有且仅有 1 个零点，在 $(a,+\infty)$ 上有且仅有 2 个零点，

则满足 $\begin{cases}f\left(0\right)=-a<0\\ \dfrac{1}{2a}>a\\ f\left(a\right)=a^3>0\\ f\left(\dfrac{1}{2a}\right)<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 1-4a^2>0\end{cases}$，解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2})$．

【点睛】关键点睛：本题第 3 问解决的关键是先分析得 $a>0$，再分类讨论去掉绝对值，结合二次函数的性质与根的分布即可得解.