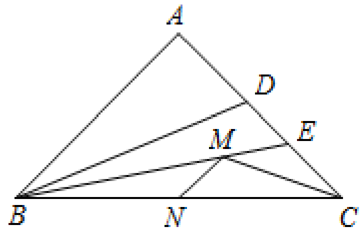
昆山提招模拟卷 3 答案与解析

1．如图，在等腰Rt$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，BD平分$\angle ABC$，BE 平分$\angle DBC$，M、N 分别为射线 BE、BC 上的动点，若 $BD=8$，则 $CM+MN$ 的最小值为（　　）

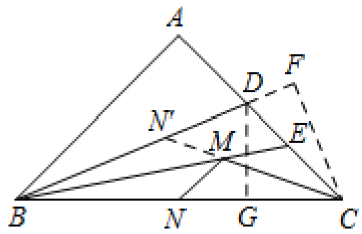


A．4　　B．6　　C．8　　D．10

【答案】A

【分析】如图，作 N 关于 BE 的对称点 N'，则 $MN=MN'$，当 C,M,N' 三点共线时最短即 CN'，当 $CN'\perp BF$ 时最短，过点 C 作 $CF\perp BD$，交 BD 的延长线于点 F，即 N' 与 F 点重合时最短，过点 D 作 $DG\perp BC$ 于点 G，根据等面积法求得 CF，即可求解．

【详解】解：如图，作 N 关于 BE 的对称点 N'，过点 C 作 $CF\perp BD$，交 BD 的延长线于点 F，过点 D 作 $DG\perp BC$ 于点 G，



$\therefore MN=MN'$，当 C,M,N' 三点共线时 $CM+MN$ 最小即 CN'，当 $CN'\perp BF$ 时最短，CF 即为所求，

$\because DG\perp BC$，　Rt□ABC 是等腰直角三角形，

$\therefore$ □DGC 是等腰直角三角形，

$\therefore DC=\sqrt{2}DG$

$\because BD$ 平分$\angle ABC$，

$\therefore DA=DG$

$\because AC=AB$，

设 $AD=a$，则 $AB=AC=\left(1+\sqrt{2}\right)a$

在 Rt△ABD 中，$BD=8, AD=a, AB=\left(1+\sqrt{2}\right)a$

$\because BD^2=AD^2+AB^2$

$\therefore 8^2=a^2+\left[\left(1+\sqrt{2}\right)a\right]^2$

解得 $a^2=32-16\sqrt{2}$

$\therefore BC=\sqrt{2}AC=\left(\sqrt{2}+2\right)a$

$\because S_{\triangle BDC}=\dfrac{1}{2}BC\times DG=\dfrac{1}{2}BD\times CF$

$\therefore CF=\dfrac{BC\times DG}{BD}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+2\right)a\times a}{8}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+2\right)\times\left(32-16\sqrt{2}\right)}{8}$

$=\left(\sqrt{2}+2\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)$

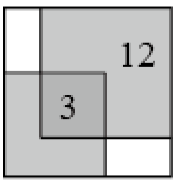
$=4\sqrt{2}-4+8-4\sqrt{2}$

$=4$

故选 A．

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，轴对称的性质，角平分线的性质，勾股定理，作出辅助线是解题的关键．

2．在一个正方形的内部按照如图方式放置大小不同的两个小正方形，其中较大的正方形面积为 12，重叠部分的面积为 3，空白部分的面积为 $2\sqrt{30}-6$，则较小的正方形面积为（　　）



A．11　　　　B．10　　　　C．9　　　　D．8

【答案】B

【分析】根据面积可求得大正方形和阴影部分的边长，从而求得空白部分的长；观察可知两块空白部分全等，则可得到一块空白的面积；通过长方形面积公式渴求空白部分的宽，最后求出小正方形的边长即可求出面积．

【详解】∵观察可知，两个空白部分的长相等，宽也相等，

∴重叠部分也为正方形，

∵空白部分的面积为 $2\sqrt{30}-6$，

∴一个空白长方形面积=$\sqrt{30}-3$，

∵大正方形面积为 12，重叠部分面积为 3，

∴大正方形边长=$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，重叠部分边长=$\sqrt{3}$，

∴空白部分的长=$2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

设空白部分宽为 x，可得：$\sqrt{3}x=\sqrt{30}-3$，解得：x=$\sqrt{10}-\sqrt{3}$，

∴小正方形的边长=空白部分的宽+阴影部分边长=$(\sqrt{10}-\sqrt{3})+\sqrt{3}=\sqrt{10}$，

∴小正方形面积=$(\sqrt{10})^2$=10，

故选：B．

【点睛】本题主要考查了二次根式的应用，观察图形得到各个正方形边长之间的关系是解题的关键．

3．现有一列数：a_1，a_2，a_3，a_4，⋯，a_{n-1}，a_n（n 为正整数），规定 $a_1=2$，$a_2-a_1=4$，$a_3-a_2=6$，⋯，$a_n-a_{n-1}=2n$（$n\geqslant2$），若$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\cdots\frac{1}{a_n}=\frac{97}{198}$，则 n 的值为（　　）

A．97　　B．98　　C．99　　D．100

【答案】B

【分析】先观察数列的规律，根据已知的关系，通过错项相加的方法，求出 a_n 的通项公式：$a_n=n(n+1)$，再根据此公式，对分式方程的左边进行裂项，化简分式方程，最后可求出 n 的值．

【解答】∵由已知可得：

$a_1=2$，

$a_2-a_1=4$，

$a_3-a_2=6$，

⋯，

$a_n-a_{n-1}=2n$，

以上各式左右两边分别相加，

$a_1+a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_n-a_{n-1}=2+4+6+\cdots+2n$，

化简后可得：$a_n=2+4+6+\cdots+2n$，

∴$a_n=\frac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)$．

∴$\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，

$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，

$\frac{1}{a_4}=\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，

⋯，

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

$\therefore\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{97}{198}$,

可化简为：

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{97}{198}$

即$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{97}{198}$,

$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{99}$,

解得：$n=98$，

经检验，$n=98$ 是原方程的解，

$\therefore n=98$.

故选：B.

4．自然数 a，b，c，d 满足$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$，则$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^5}$等于（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{7}{16}$　　D．$\frac{15}{32}$

【答案】D

【分析】只有 a、b、c、d 自然数都相等的时候，等式才成立，可得：$a=b=c=d=2$，即可求解．

【解答】解：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$，只有 a、b、c、d 自然数都相等的时候，等式才成立，即：$a=b=c=d=2$；

将 a、b、c、d 结果代入$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^5}=\frac{15}{32}$.

故选：D.

5．已知 x 为整数，且分式$\frac{9x-7}{3x+1}$的值也为整数，则满足条件的所有 x 的值之和为 <u> 0 </u>．

【答案】0．

【分析】根据 x 为整数，分式的意义一一分析可能成立的情况，选出 x 的值再求和即可．

【解答】解：$\frac{9x-7}{3x+1}$

$=\frac{9x+3-10}{3x+1}$

$=3-\frac{10}{3x+1}$,

$\because x$ 为整数，分式$\frac{9x-7}{3x+1}$的值也为整数，

$\therefore$当 $x=0$ 时，分式$=-7$，符合题意；

当 $x=-1$ 时，分式值＝8，符合题意；

当 $x=-2$ 时，分式值＝5，符合题意；

当 $x=3$ 时，分式值＝2，符合题意；

∴满足条件的 x 的值为 0、－1、－2、3，

所有满足条件的数的和为 $0-1-2+3=0$，

故答案为：0．

6．阅读理解：

二次根式的除法，要化去分母中的根号，需将分子、分母同乘以一个恰当的二次根式．

例如：化简 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$．

解：将分子、分母同乘以 $\sqrt{2}+1$ 得：$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$．

类比应用：

（1）化简：$\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}=$______________；

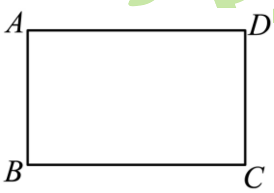
（2）化简：$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}=$______________．

拓展延伸：

宽与长的比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形叫黄金矩形．如图①，已知黄金矩形 $ABCD$ 的宽 $AB=1$．

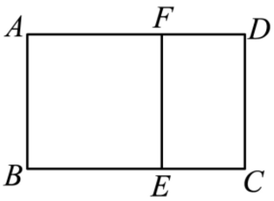
（1）黄金矩形 $ABCD$ 的长 $BC=$____________；

（2）如图②，将图①中的黄金矩形裁剪掉一个以 AB 为边的正方形 $ABEF$，得到新的矩形 $DCEF$，猜想矩形 $DCEF$ 是否为黄金矩形，并证明你的结论；



图①

（3）在图②中，连结 AE，则点 D 到线段 AE 的距离为____________．



图②

【答案】类比应用：（1）$2\sqrt{3}+\sqrt{11}$；（2）2；拓展延伸：（1）$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；（2）矩形 DCEF 为黄金矩形，理由见解析；（3）$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$

【分析】类比应用：
（1）仿照题干中的过程进行计算；
（2）仿照题干中的过程进行计算；
拓展延伸：
（1）根据黄金矩形的定义结合 AB=1 进行计算；
（2）根据题意算出 AD 的长，从而得出 DF，证明 DF 和 EF 的比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 即可；
（3）连接 AE，DE，过 D 作 DG⊥AE 于点 G，根据△AED 的面积不同算法列出方程，解出 DG 的长即可.
【详解】解：类比应用：
（1）根据题意可得：
$\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}=2\sqrt{3}+\sqrt{11}$；
（2）根据题意可得：
$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$
$=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\cdots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\left(\sqrt{9}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{9}-\sqrt{8}$

$=\sqrt{9}-1$

=2；
拓展延伸：
（1）∵宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形叫黄金矩形，
若黄金矩形 ABCD 的宽 AB=1，
则黄金矩形 ABCD 的长 BC=$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；
（2）矩形 DCEF 为黄金矩形，理由是：
由裁剪可知：AB=AF=BE=EF=CD=1，
根据黄金矩形的性质可得：AD=BC=$1\div\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

∴FD=EC=AD-AF= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

∴ $\frac{DF}{EF}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\div 1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

故矩形 DCEF 为黄金矩形；

（3）连接 AE，DE，过 D 作 DG⊥AE 于点 G，

∵AB=EF=1，AD= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

∴AE= $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

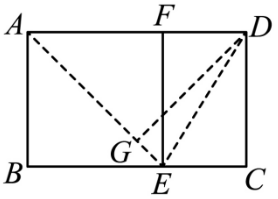
在△AED 中，

S△AED $=\frac{1}{2}\times AD\times EF=\frac{1}{2}\times AE\times DG$，

即 $AD\times EF=AE\times DG$，则 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times 1=\sqrt{2}\times DG$，

解得 DG= $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$，

∴点 D 到线段 AE 的距离为 $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$.



图②

【点睛】本题考查了二次根式的性质，平方差公式，矩形的性质，正方形的性质，三角形的面积，此类问题要认真阅读材料，理解材料中的知识.

7．如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，P 是 AD 边上一点，连接 BP，将△ABP 绕着点 B 顺时针旋转，得到□$A'BP'$.

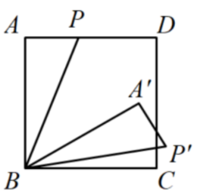


图1

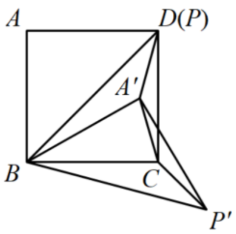


图2

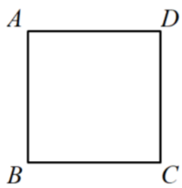


图3

(1)已知旋转角为 60°，点 P 与 D 点重合（如图 2）.

①证明：$\triangle BPA' \cong \triangle BP'C$；

②证明：$\triangle A'P'C$ 是等腰三角形；

(2)已知旋转角为 45°.

①请用无刻度的直尺和圆规，在图 3 上的 AD 边上作出一点 P，使 P、A'、P' 三点在一直线上（不写作法，保留作图痕迹）；

②当$\triangle A'P'C$ 是直角三角形时，求 AP 的长.

【答案】(1)①证明见解析；②证明见解析

(2)①图见解析；②1 或$4-2\sqrt{2}$

【分析】（1）①先根据正方形的性质可得 $AB=BC, \angle ABD=\angle CBD=45^\circ$，再根据旋转的性质可得 $A'B=AB, BP'=BP, \angle A'BP'=\angle ABP=45^\circ$，从而可得 $BC=A'B$，$\angle A'BP=\angle CBP'$，然后根据三角形全等的判定定理即可得证；

②连接 AA'，先根据旋转的性质证出 $\triangle A'BA$ 是等边三角形，再根据三角形全等的判定证出$\triangle A'AP \cong \triangle A'BC$，然后根据全等三角形的性质可得 $A'P=A'C, A'P=CP'$，从而可得 $A'C=CP'$，由此即可得证；

（2）①连接 BD，以点 B 为圆心、BA 为半径画弧，交 BD 于点 A'，再过点 A' 作 BD 的垂线，分别交 AD, CD 于点 P, P'；

②过点 A' 作 $A'E \perp BC$ 于点 E，先根据勾股定理求出 $A'C^2=4-2\sqrt{2}$，再根据等腰三角形的性质、角的和差求出 $\angle CA'P'=22.5^\circ$，然后分 $\angle A'P'C=90^\circ$ 和 $\angle A'CP'=90^\circ$ 两种情况，利用勾股定理求解即可得.

（1）

证明：①∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC, \angle ABD=\angle CBD=45^\circ$，

由旋转的性质得：$A'B=AB, BP'=BP, \angle A'BP'=\angle ABP=45^\circ$，

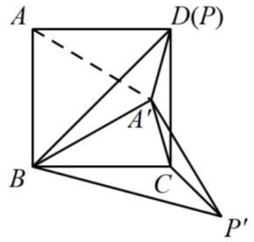
$\therefore \angle CBP=\angle A'BP'=45^\circ$，$BC=A'B$，

$\therefore \angle CBP-\angle A'BC=\angle A'BP'-\angle A'BC$，即 $\angle A'BP=\angle CBP'$，

在 $\triangle BPA'$ 和 $\triangle BP'C$ 中，$\begin{cases} BA'=BC \\ \angle A'BP=\angle CBP' \\ BP=BP' \end{cases}$，

$\therefore \triangle BPA' \cong \triangle BP'C(SAS)$；

②如图，连接 AA'，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = AD, \angle BAD = \angle ABC = 90°$，

由旋转的性质得：$A'B = AB, \angle A'BA = 60°$，

$\therefore \triangle A'BA$ 是等边三角形，$\angle A'BC = \angle ABC - \angle A'BA = 30°$，

$\therefore AA' = BA', \angle A'AB = 60°$，

$\therefore \angle A'AP = \angle BAD - \angle A'AB = 30° = \angle A'BC$，

在 $\triangle A'AP$ 和 $\triangle A'BC$ 中，$\begin{cases} AA' = BA' \\ \angle A'AP = \angle A'BC \\ AP = BC \end{cases}$，

$\therefore \triangle A'AP \cong \triangle A'BC(SAS)$，

$\therefore A'P = A'C$，

由（1）①已证：$\triangle BPA' \cong \triangle BP'C$，

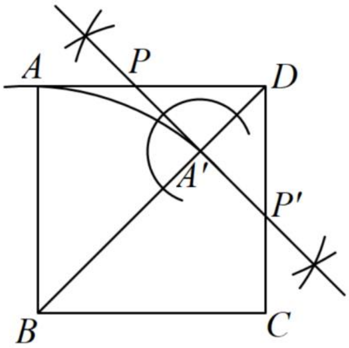
$\therefore A'P = CP'$，

$\therefore A'C = CP'$，

$\therefore \triangle A'P'C$ 是等腰三角形.

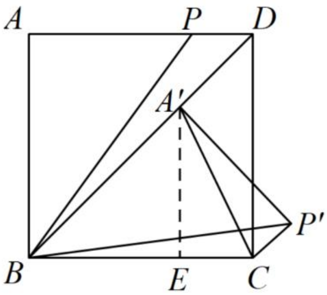
（2）

解：①如图，点 P 即为所求.



②由旋转的性质得：$A'B=AB=\sqrt{2}, A'P'=AP, \angle BA'P'=\angle A=90^\circ$，

如图，过点A'作$A'E\perp BC$于点E，



则$\text{Rt}\triangle A'BE$是等腰直角三角形，$A'E=BE$，

$\therefore A'E^2+BE^2=A'B^2=2$，

解得$A'E=BE=1$或$A'E=BE=-1<0$（舍去），

$\therefore CE=BC-BE=\sqrt{2}-1$，

$\therefore A'C^2=A'E^2+CE^2=4-2\sqrt{2}$，

$\because A'B=BC=\sqrt{2}$，

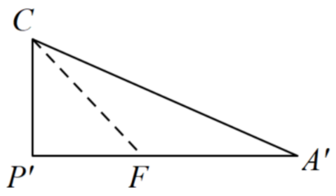
$\therefore \angle BA'C=\angle A'CB=67.5^\circ$，

$\therefore \angle CA'P'=\angle BA'P'-\angle BA'C=22.5^\circ<90^\circ$，

则分以下两种情况：

（Ⅰ）如图，当$\angle A'P'C=90^\circ$时，$\triangle A'P'C$是直角三角形，

过点C作$\angle A'CF=\angle CA'P'=22.5^\circ$，交$A'P'$于点$F$，



则 $CF = A'F, \angle CFP' = 45°$,

$\therefore$ Rt$\triangle CFP'$ 是等腰直角三角形，$CP' = FP'$,

设 $CP' = FP' = x(x>0)$，则 $A'F = CF = \sqrt{CP'^2 + FP'^2} = \sqrt{2}x$,

$\therefore A'P' = A'F + P'F = (\sqrt{2}+1)x$,

在 Rt$\triangle A'P'C$ 中，$P'C^2 + A'P'^2 = A'C^2$，即 $x^2 + \left[(\sqrt{2}+1)x\right]^2 = 4 - 2\sqrt{2}$,

整理得：$x^2 = (\sqrt{2}-1)^2$,

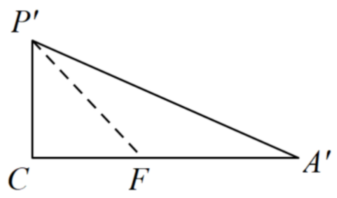
解得 $x = \sqrt{2}-1$ 或 $x = -\sqrt{2}+1 < 0$（舍去），

$\therefore A'P' = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$,

$\therefore AP = A'P' = 1$；

（Ⅱ）如图，当 $\angle A'CP' = 90°$ 时，$\triangle A'P'C$ 是直角三角形，

过点 P' 作 $\angle A'P'F = \angle CA'P' = 22.5°$，交 $A'C$ 于点 F,



同理可得：$A'F = P'F, CF = CP'$,

设 $CF = CP' = y(y>0)$，则 $A'F = P'F = \sqrt{CF^2 + P'C^2} = \sqrt{2}y$,

$\because (A'F + CF)^2 = A'C^2$,

$\therefore (\sqrt{2}y + y)^2 = 4 - 2\sqrt{2}$,

整理得：$y^2 = 20 - 14\sqrt{2}$,

$\therefore A'P'^2 = P'C^2 + A'C^2 = y^2 + 4 - 2\sqrt{2} = (4-2\sqrt{2})^2$,

解得 $A'P' = 4 - 2\sqrt{2}$ 或 $A'P' = 2\sqrt{2} - 4 < 0$（舍去），

$\therefore AP = A'P' = 4-2\sqrt{2}$；

综上，当$\triangle A'P'C$是直角三角形时，AP的长为1或$4-2\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了正方形的性质、旋转的性质、等腰三角形的判定与性质、二次根式的运算、利用平方根解方程、作垂线、勾股定理等知识点，较难的是题（2）②，正确分两种情况讨论，并通过作辅助线，构造等腰三角形是解题关键．

8．解：（1）证明：

∵AF平分$\angle BAD$，

∴$\angle BAF=\angle DAF$，

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$，

∴$\angle DAF=\angle CEF$，$\angle BAF=\angle CFE$，

∴$\angle CEF=\angle CFE$，

∴$CE=CF$，

又∵四边形$ECFG$是平行四边形，

∴四边形$ECFG$为菱形；

（2）①∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB\parallel DC$，$AB=DC$，$AD\parallel BC$，

∵$\angle ABC=120°$，

∴$\angle BCD=60°$，$\angle BCF=120°$

由（1）知，四边形$CEGF$是菱形，

∴$CE=GE$，$\angle BCG=\frac{1}{2}\angle BCF=60°$，

∴$CG=GE=CE$，$\angle DCG=120°$，

∵$EG\parallel DF$，

∴$\angle BEG=120°=\angle DCG$，

∵AE是$\angle BAD$的平分线，

∴$\angle DAE=\angle BAE$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle DAE=\angle AEB$，

∴$\angle BAE=\angle AEB$，

∴$AB=BE$，

∴$BE=CD$,

∴△DGC≌△BGE（SAS）;

②∵△DGC≌△BGE,

∴$BG=DG$, ∠BGE=∠DGC,

∴∠BGD=∠CGE,

∵$CG=GE=CE$,

∴△CEG是等边三角形,

∴∠CGE=60°,

∴∠BGD=60°,

∵$BG=DG$,

∴△BDG是等边三角形,

∴∠BDG=60°;

（3）如图2中，连接BM, MC,

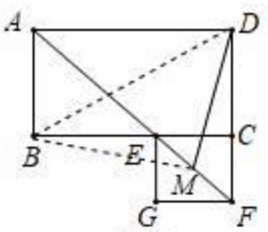


图3

∵∠ABC=90°，四边形$ABCD$是平行四边形,

∴四边形$ABCD$是矩形,

又由（1）可知四边形$ECFG$为菱形,

∠ECF=90°,

∴四边形$ECFG$为正方形.

∵∠BAF=∠DAF,

∴$BE=AB=DC$,

∵M为EF中点,

∴∠CEM=∠ECM=45°,

∴∠BEM=∠DCM=135°,

在△BME和△DMC中,

$\because\begin{cases}BE=CD\\ \angle BEM=\angle DCM,\\ EM=CM\end{cases}$

$\therefore\triangle BME\cong\triangle DMC$（$SAS$），

$\therefore MB=MD$，

$\angle DMC=\angle BME$.

$\therefore\angle BMD=\angle BME+\angle EMD=\angle DMC+\angle EMD=90^\circ$，

$\therefore\triangle BMD$是等腰直角三角形.

$\because AB=8$，$AD=14$，

$\therefore BD=2\sqrt{65}$，

$\therefore DM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{130}$.

2．证明：（1）$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB\parallel CD$，$AB=CD$，

$\because E$、F分别为AB、CD的中点，

$\therefore DF=\dfrac{1}{2}DC$，$BE=\dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore DF\parallel BE$，$DF=BE$，

$\therefore$四边形$DEBF$为平行四边形，

$\therefore DE\parallel BF$；

（2）①$\because AG\parallel BD$，

$\therefore\angle G=\angle DBC=90^\circ$，

$\therefore\triangle DBC$为直角三角形，

又$\because F$为边CD的中点.

$\therefore BF=\dfrac{1}{2}DC=DF$，

又$\because$四边形$DEBF$为平行四边形，

$\therefore$四边形$DEBF$是菱形；

②$\because AD\parallel BG$，$AG\parallel BD$，$\angle G=90^\circ$，

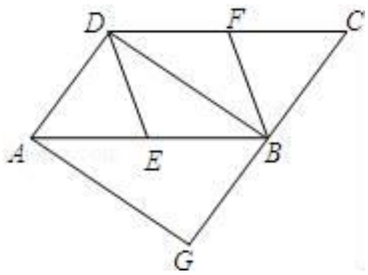
$\therefore$四边形$AGBD$是矩形，

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABG}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$，

$\because E$为边AB的中点，

∴$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}=3$，

∴四边形 $DEBF$ 的面积$=2S_{\triangle BDE}=6$.



3.（1）证明：如图 1 中，

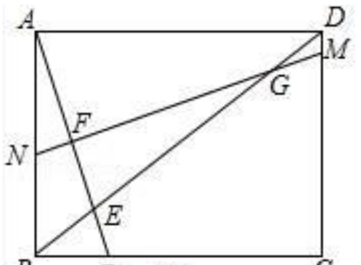


图1

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle ABC=90°$，

∴$\angle BAP=\angle APB=90°$

∵$BP=BE$，

∴$\angle APB\angle BEP=\angle GEF$，

∵MN 垂直平分线段 AP，

∴$\angle GFE=90°$，

∴$\angle BGN+\angle GEF=90°$，

∴$\angle BAP=\angle BGN$.

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle BAD=\angle ABP=90°$，$AD\parallel BC$，$AD=BC=8$，

∴$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle DAE=\angle APB$，

∵$\angle APB=\angle BEP=\angle DEA$，

∴$\angle DAE=\angle DEA$，

∴$DA=DE=8$，

∴$BE=BP=BD-DE=10-8=2$，

∴$PA=\sqrt{AB^2+BP^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，

∵MN垂直平分线段 AP，

∴$AF=PF=\sqrt{10}$，

∵$PB // AD$，

∴$\frac{PE}{AE}=\frac{PB}{AD}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，

∴$PE=\frac{1}{5}PA=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，

∴$EF=PF-PE=\sqrt{10}-\frac{2\sqrt{10}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$，

∴$\frac{PE}{EF}=\frac{\frac{2\sqrt{10}}{5}}{\frac{3\sqrt{10}}{5}}=\frac{2}{3}$.

（3）解：如图 3 中，连接 AM，MP. 设 $CM=x$.

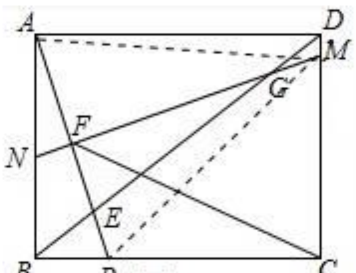


图2

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle ADM=\angle MCP=90°$，$AB=CD=6$，$AD=BC=8$，

∵MN垂直平分线段 AP，

∴$MA=MP$，

∴$AD^2+DM^2=PC^2+CM^2$，

∴$8^2+(6-x)^2=6^2+x^2$，

∴$x=\frac{16}{3}$，

∵$\angle PFM=\angle PCM=90°$，

∴P，F，M，C四点共圆，

∴$\angle CFM=\angle CPM$，

∴$\tan\angle CFM=\tan\angle CFM=\frac{CM}{CP}=\frac{\frac{16}{3}}{6}=\frac{8}{9}$.