昆山市 2023-2024 学年第二学期高二数学期中考试模拟试题

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共计 40 分.

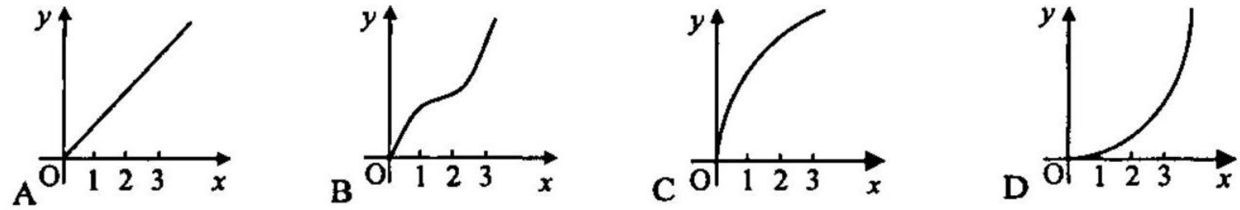
1．设函数$f(x)=1-x^2$,则$f(x)$在$x=1$处的瞬时变化率为(　　)

A.-2　　B.0　　C.1　　D.2

2．已知$C_n^2=28(n\in \mathrm{N}$且$n\geqslant 2)$,则A_n^2的值为(　　)

A.30　　B.42　　C.56　　D.72

3．设$f'(x_0)$为函数$f(x)$在x_0处的导数,则满足$f'(1)<f'(2)<f'(3)$的函数$f(x)$的图象可能是(　　)



4．在某项志愿服务中,需从来自甲、乙两个单位的 10 名志愿者（甲单位 6 名、乙单位 4 名)中选出 4 名志愿者组成志愿服务小组,则所选 4 名志愿者不全来自同一个单位的选法种数为(　　)

A.156　　B.180　　C.194　　D.672

5．在某项测验中,假设测验数据服从正态分布$N(75,16)$.如果按照$16\%,34\%,34\%,16\%$的比例将测验数据从大到小分为A,B,C,D四个等级;则等级为A的测验数据的最小值可能是(　　)

【附：随机变量ξ服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9544,P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)=0.9974$】

A.75　　B.79　　C.83　　D.91

6．$\forall x_1,x_2\in[1,\mathrm{e}]$,当$x_1<x_2$时,都有$\ln\frac{x_1}{x_2}<a(x_1-x_2)$,则实数$a$的最大值为(　　)

A.$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$　　B.$\frac{1}{\mathrm{e}}$　　C.$\frac{\sqrt{e}}{\mathrm{e}}$　　D.1

7．讲台上有左、右两盒粉笔,左盒中有 20 支白色粉笔、5 支黄色粉笔,右盒中有 5 支红色粉笔、6 支黄色粉笔、4 支蓝色粉笔.某位老师从这两盒中取粉笔，取自左盒的概率为40%,取自右盒的概率为60%.若这位老师从这两盒粉笔中任取一支,则取到黄色粉笔的概率为(　　)

A.0.275　　B.0.28　　C.0.32　　D.0.6

8．设$a=1.4^{1.7},b=1.7^{1.4},c=\mathrm{e}$(e为自然对数的底数),则(　　)

A.$a<b<c$　　B.$b<c<a$　　C.$c<b<a$　　D.$c<a<b$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分,选错或不答的得 0 分.

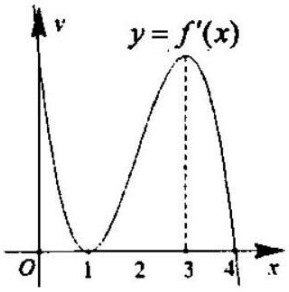
9．在$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^9$的展开式中,(　　)

A.常数项为$\frac{21}{2}$　　B.x^3项的系数为$-\frac{9}{2}$　　C.系数最大项为第 3 项　　D.有理项共有 5 项

10．已知$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数,其图象如图所示,则下列关于函数$f(x)$的说法正确的是(　　)

A.在$(-\infty,1)$上单调递减 B.在$(1,3)$上单调递增

C.在$x=1$处取得极小值 D.在$x=4$处取得极大值



(第 10 题图)

11．甲、乙两盒中各放有除颜色外其余均相同的若干个球，其中甲盒中有 4 个红球和 2 个白球乙盒中有 2 个红球和 3 个白球.现从甲盒中随机取出 1 球放入乙盒,再从乙盒中随机取出 1 球.记“从甲盒中取出的球是红球”为事件A,“从甲盒中取出的球是白球”为事件B,“从乙盒中取出的球是红球”为事件C,则(　　)

A.A与B互斥　　B.A与C独立　　C.$P(C\mid A)=\frac{1}{2}$　　D.$P(C)=\frac{4}{9}$

12．设函数$f(x)=\frac{e^x(2x+1)}{x}$,则(　　)

A.$f'(1)=2e$

B.函数$f(x)$的图象过点$\left(-1,\frac{1}{e}\right)$的切线方程为$y=\frac{1}{e}$

C.函数$f(x)$既存在极大值又存在极小值,且其极大值大于其极小值

D.方程$f(x)=k$有两个不等实根,则实数k的取值范围为$\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup\left(4\sqrt{e},+\infty\right)$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共计 20 分.

13．用0,1,2,3,4,5这六个数字组成无重复数字的四位数,在组成的四位数中,能被 5 整除的有_______个.

14．写出一个同时具有下列性质①②③的函数$f(x)=$________.

①定义域为R,函数值不恒为 0,且图象是一条连续不断的曲线;

②$\forall x\in R, f(-x)+f(x)=0$;③$f'(x)$为函数$f(x)$的导函数,$\forall x\in R, f'(x)\geqslant 0$.

15．在下图中,从第 2 行起,除首末两个位置外,每个位置上的数都等于它肩上的两个数的和,最初几行是:

第 1 行　　1　1

第 2 行　　1　2　1

第 3 行　　1　3　3　1

第 4 行　　1　4　6　4　1

第 5 行　　1　5　10　10　5　1

(第 15 题图)

自左向右,第n行第$i+1$个数记为$C_n^i(n,i\in N且i\leqslant n)$.若$C_{15}^k=C_{15}^{2k-3}(n,k\in N且k\leqslant n)$,则$k$的值为________;$C_4^1+C_5^2+\cdots+C_n^{n-3}+\cdots+C_{15}^{12}(n\in N且6\leqslant n\leqslant 14)$的值为________.

16．已知函数$f(x)=\ln x,g(x)=\frac{1}{2}x^2+m$.若曲线$y=f(x)$与曲线$y=g(x)$有公切线,则实数$m$的取值范围为________.

四、解答题:本大题共 6 小题,共计 70 分.

17．(本小题满分 10 分)

从 4 名男生和 2 名女生中任选 2 人参加演讲比赛.

(1)至少选到 1 名女生的方法有多少种?

(2)设随机变量X表示所选 2 人中女生的人数,求X的分布列及期望、方差.

18.(本小题满分 12 分)

在①只有第 6 项的二项式系数最大;②第 5 项与第 7 项的二项式系数相等;③奇数项的二项式系数之和为 512;

这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,并解答.

已知$(2x-1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,且满足________.

(1)求$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$的值;

(2)求$a_1+2a_2+\cdots+na_n$的值.

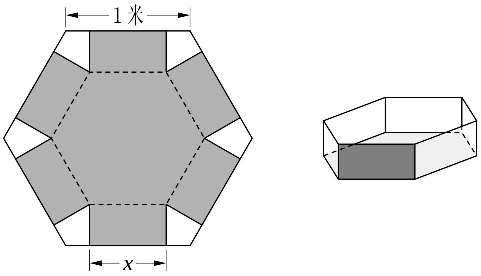
注：如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

19.(本小题满分 12 分)

将一个边长为 1 米的正六边形铁皮的六个角截去六个全等的四边形,再把它沿虚线折起(如图),做成一个无盖的正六棱柱铁皮盒.

(1)试把这个正六棱柱铁皮盒的容积V表示为盒底边长x的函数;

(2)x多大时，盒子的容积V最大?



20.(本小题满分 12 分)

近年来,我国电影市场非常火爆,有多部优秀国产电影陆续上映.某影评网站统计了 100 名观众对某部电影的评分情况,得到如下表格:

评价等级	★	★★	★★★	★★★★	★★★★★
人数	2	3	10	10	75

以表中各评价等级对应的频率作为各评价等级对应的概率,假设每个观众的评分结果相互独立.从全国所有观众中随机抽取 4 名.

(1)求恰有 3 人评价为五星，1 人评价为四星的概率;

(2)记其中评价为五星的观众人数为X,求X的分布列与数学期望.

21．(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}$.

(1)求$f(x)$的极值;

(2)设曲线$f(x)$在点$T\big(t,f(t)\big)$处的切线为l,记l在y轴上的截距为$b=g(t)$,当l的斜率为非负实数时,求$e^t\cdot b$的取值范围.

22．(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=e^x-a\ln(x+2)$.

(1)当$a=2$时,求函数$f(x)$的单调区间;

(2)当$a=1$时,求证:函数$f(x)$存在极小值点x_0,且$f(x_0)>\frac{1}{6}$.

昆山市 2023-2024 学年第二学期高二数学期中考试模拟试题参考答案

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共计 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	C	B	B	C	A

二、多项选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共计 20 分.

题号	9	10	11	12
答案	BD	BCD	ACD	AD

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共计 20 分.

13.108

14.$x^3(x-\sin\ x)$

15.3 或 6,1819;

16.$m\geqslant -\frac{1}{2}$

四、解答题:本大题共 6 小题,共计 70 分.

17.(本小题满分 10 分)

解:(1)从 4 名男生和 2 名女生中任选 2 人有C_6^2种方法, 1 分

不含女生的方法有C_4^2种，. 2 分

所以至少选到 1 名女生的方法有$N=C_6^2-C_4^2=15-6=9$种. 3 分

(2)随机变量X的可能取值为0,1,2. 4 分

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}, P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{4\times2}{15}=\frac{8}{15}, P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$. 7 分

故X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

所以$E(X)=0\times\frac{6}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$, 9 分

$D(X)=\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{6}{15}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{8}{15}+\left(2-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{15}=\frac{16}{45}$. 10 分

18.(本小题满分 12 分)

解:二项式$(2x-1)^n$的展开式第$r+1$项为$T_{r+1}=C_n^r(2x)^{n-r}(-1)^r(n,r\in\mathrm{N}$且$r\leqslant n)$,其二项式系数为$C_n^r$

若选①，即在$C_n^r(n,r\in\mathrm{N}$且$r\leqslant n)$中只有C_n^5最大，故$n=10$， 2 分

若选②，即$C_n^4=C_n^6$，故$n=10$， 2 分

若选③，即$C_n^0+C_n^2+C_n^6+=2^{n-1}=512$，故$n=10$， 2 分

所以$(2x-1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,即为$(2x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$ $(*)$

3 分

（1）在$(*)$式中，令$x=0$得$(0-1)^{10}=a_0=1$,　　　4 分

在$(*)$式中令$x=\frac{1}{2}$得$\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^{10}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=0$，　　　5 分

上述两式作差得$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}++\frac{a_n}{n}=-1$.　　　6 分

(2)对(*)式两边求导得$10\times(2x-1)^9\times 2=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+10a_{10}x^9$　$(**)$,　　9 分

在$(**)$式中令$x=1$得$10\times(2-1)^9\times 2=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=20$,　　　11 分

即$a_1+a_2++10a_{10}=20$.　　　12 分

19．(本小题满分 12 分)

解:(1)如图,易得$MN=CD=x(0<x<1),AC=\frac{1-x}{2}$,

则盒子的高$h=CM=\sqrt{3}\cdot\frac{1-x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$,　　　2 分

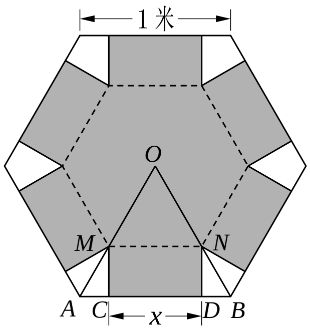
盒底面积$S_{底}=6S_{\triangle OMN}=6\times\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$,　　　4 分

盒子的容积为

$V(x)=S_{底}\times h=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)=\frac{9}{4}x^2(1-x),x\in(0,1)$，　　　6 分

（2）$V'(x)=\frac{9}{4}(2x-3x^2)$,　　　7 分

令$V'(x)=0$,解得$x_1=\frac{2}{3},x_2=0$(由于$0<x<1$,舍去),　　　9 分



当$0<x<\frac{2}{3}$时,$V'(x)>0,V(x)$单调递增;

当$\frac{2}{3}<x<1$时,$V'(x)<0,V(x)$单调递减.　　　10 分

所以,当$x=\frac{2}{3}$时,$V(x)$取得极大值,这个极大值也是最大值.　　　11 分

答:当$x=\frac{3}{4}$米时,盒子的容积最大.·　　　12 分

20．(本小题满分 12 分)

解:(1)设$A_i=\{$抽取 1 人,评价为i星$\}(i\in\{1,2,3,4,5\})$,

则$P(A_5)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4},P(A_4)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$,　　　3 分

记$B=\{$随机抽取 4 名，3 人评价为五星，1 人评价为四星$\}$,

由于每个观众的评分结果相互独立，所以$P(B)=C_4^3\times\frac{1}{10}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{160}$.　　　5 分

(2)X可能取值为0,1,2,3,4. $X\sim B\left(4,\frac{3}{4}\right)$,

则$P(X=0)=C_4^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$, $P(X=1)=C_4^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}=\frac{12}{256}$,

$P(X=2)=C_4^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256}$, $P(X=3)=C_4^3\left(1-\frac{3}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256}$,

$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$, 10 分

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$

11 分

所以$E(X)=0\times\frac{1}{256}+1\times\frac{12}{256}+2\times\frac{54}{256}+3\times\frac{108}{256}+4\times\frac{81}{256}=\frac{768}{256}=3.$ 12 分

（或$E(X)=np=4\times\frac{3}{4}=3$）

21．(本小题满分 12 分)

解:（1）函数的定义域为R, $f'(x)=\frac{(2x+1)\mathrm{e}^x-(x^2+x-1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{-x^2+x+2}{\mathrm{e}^x}$,

令$f'(x)=0$,得$x_1=-1, x_2=2$, 1 分

$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表所示.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单调递减	$-\mathrm{e}$	单调递增	$\frac{5}{\mathrm{e}^2}$	单调递减

2 分

所以，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1),(2,+\infty)$ 上单调递减，在区间 $(-1,2)$ 上单调递增.

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-\mathrm{e}$; 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极大值 $f(2)=\frac{5}{\mathrm{e}^2}$, 4 分

（2）由（1）得 $f(t)=\frac{t^2+t-1}{\mathrm{e}^t}$, $f'(t)=\frac{-t^2+t+2}{\mathrm{e}^t}$,

所以曲线 $f(x)$ 在点 $T(t,f(t))$ 的切线为 $l: y-\frac{t^2+t-1}{\mathrm{e}^t}=\frac{-t^2+t+2}{\mathrm{e}^t}(x-t)$, 5 分

令 $x=0$ 得 l 在 y 轴上的截距为 $b=g(t)=\frac{-t^2+t+2}{\mathrm{e}^t}(-t)+\frac{t^2+t-1}{\mathrm{e}^t}=\frac{t^3-t-1}{\mathrm{e}^t}$, 6 分

又因为 l 的斜率为非负实数，即 $f'(t)=\frac{-t^2+t+2}{\mathrm{e}^t}\geqslant 0$，所以 $-1\leqslant t\leqslant 2$, 7 分

所以 $e^t \cdot b = e^t \cdot \frac{t^3-t-1}{e^t} = t^3 - t - 1\ (-1 \leqslant t \leqslant 2)$, 8 分

记 $h(t) = t^3 - t - 1(-1 \leqslant t \leqslant 2)$, 则 $h'(t) = 3t^2 - 1$,

令 $h'(t) = 0$, 得 $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 9 分

$h'(t), h(t)$ 的变化情况如下表所示.

t	$\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$
$h'(t)$	+	0	-	0	+
$h(t)$	单调递增	$\frac{2\sqrt{3}}{9}-1$	单调递减	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}-1$	单调递增

10 分

所以,$h(t)$在区间$\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$上单调递增,在区间$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递减.

所以,当$t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$时,$h(t)$有极大值$h\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$;

当$t = \frac{\sqrt{3}}{3}$时,$h(t)$有极小值$h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$.

又$h(-1) = -1 > -\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1, h(2) = 5 > \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1$,

所以$h(t)$取值范围为$\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1,5\right]$,即$\mathbf{e}^t \cdot b$的取值范围为$\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1,5\right]$. 12 分

22．(本小题满分 12 分)

解:(1)当$a = 2$时,$f(x) = e^x - 2\ln(x+2)$,定义域为$(-2,+\infty)$,$f'(x) = e^x - \frac{2}{x+2}$, 1 分

$f''(x) = e^x + \frac{2}{(x+2)^2} > 0$,所以$f'(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增,又$f'(0) = 0$, 2 分

当$x \in (-2,0)$时,$f'(x) < 0$,$f(x)$在$(-2,0)$上单调递减;

当$x \in (0,+\infty)$时,$f'(x) > 0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

所以函数$f(x)$的减区间为$(-2,0)$，增区间为$(0,+\infty)$. 4 分

（2）当$a = 1$时,$f(x) = e^x - \ln(x+2)$,定义域为$(-2,+\infty)$,$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$, 5 分

$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+2)^2} > 0$,所以$f'(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增,

又$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{2}{3} = \frac{3-2\sqrt{e}}{3\sqrt{e}} < 0$,$f'(0) = e^0 - \frac{1}{0+2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, 7 分

由零点存在定理,$f'(x)$存在唯一零点,记为x_0,则$x_0 \in \left(-\frac{1}{2},0\right)$且$e^{x_0} = \frac{1}{x_0+2}$, 8 分

当$x \in (-2,x_0)$时,$f'(x) < 0$,$f(x)$在$(-2,x_0)$上单调递减;

当$x \in (x_0,+\infty)$时,$f'(x) > 0$,$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增;

所以,函数$f(x)$存在极小值点x_0. 9 分

又由于$e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$,所以$f(x_0)=e^{x_0}-\ln(x_0+2)=\frac{1}{x_0+2}+x_0, x_0\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$, 10 分

记$h(x)=\frac{1}{x+2}+x\left(x\geqslant-\frac{1}{2}\right)$,则$h'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}>0$,所以$h(x)$单调递增,

所以$h(x)\geqslant h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)+2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$,又$x_0>-\frac{1}{2}$

所以$f(x_0)=h(x_0)>h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$. 12 分