昆山市2023-2024学年第二学期高三数学期中考试模拟试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1.（5分）已知集合 $A=\{x|\log_2x<1\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cup \complement_R B=$（　　）

A．$\{x|x<2\}$　　B．$\{x|0<x\leq 1\}$　　C．$\{x|x\leq 1\}$　　D．R

2.（5分）两个粒子 A，B 从同一发射源发射出来，在某一时刻，它们的位移分别为 $\overrightarrow{s_A}=(4,\ 3)$，$\overrightarrow{s_B}=(-2,\ 6)$，则 $\overrightarrow{s_B}$ 在 $\overrightarrow{s_A}$ 上的投影向量的长度为（　　）

A．10　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D．2

3.（5分）"绿水青山，就是金山银山"，随着我国的生态环境越来越好，外出旅游的人越来越多．现有两位游客慕名来江苏旅游，他们分别从"太湖鼋头渚、苏州拙政园、镇江金山寺、常州恐龙园、南京夫子庙、扬州瘦西湖"这6个景点中随机选择1个景点游玩．记事件 A 为"两位游客中至少有一人选择太湖鼋头渚"，事件 B 为"两位游客选择的景点不同"，则 $P(B|A)=$（　　）

A．$\dfrac{7}{9}$　　B．$\dfrac{8}{9}$　　C．$\dfrac{9}{11}$　　D．$\dfrac{10}{11}$

4.（5分）已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为1，点 O 为底面 ABC 的中心，球 O 与该正四面体的其余三个面都有且只有一个公共点，且公共点非该正四面体的顶点，则球 O 的半径为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{6}}{12}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{9}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

5.（5分）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=e^x+\sin x$，则不等式 $f(2x-1)<e^{\pi}$ 的解集是（　　）

A．$(\dfrac{1+\pi}{2},\ +\infty)$　　B．$(0,\ \dfrac{1+\pi}{2})$

C．$(0,\ \dfrac{1+e^{\pi}}{2})$　　D．$(\dfrac{1-\pi}{2},\ \dfrac{1+\pi}{2})$

6.（5分）在△ABC 中，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点 D，△ABD 的面积是△ADC 面积的3倍，则 $\tan B=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{7}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$　　D．$\dfrac{6-\sqrt{3}}{33}$

7.（5分）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,\ 0)$，点 P，Q 在直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 上，$FP\perp FQ$，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OF}^2$，则该椭圆的离心率为（　　）

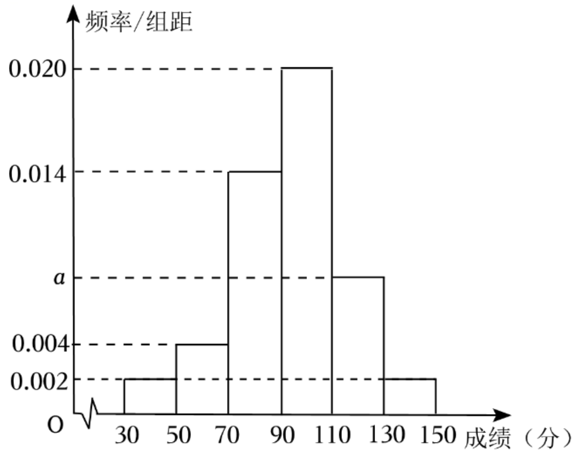
A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8.（5分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，若对任意正整数n，$S_{n+1}=-3a_{n+1}+a_n+3$，$S_n+a_n>(-1)^n a$，则实数a的取值范围是（　　）

A．$(-1,\frac{3}{2})$　　B．$(-1,\frac{5}{2})$　　C．$(-2,\frac{5}{2})$　　D．（﹣2，3）

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．（5分）某校1000名学生在高三一模测试中数学成绩的频率分布直方图如图所示（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）．分数不低于X即为优秀，已知优秀学生有80人，则（　　）



A．$a=0.008$

B．$X=120$

C．70分以下的人数约为6人

D．本次考试的平均分约为93.6

10．（5分）已知正数a，b满足$ab=a+b+1$，则（　　）

A．$a+b$的最小值为$2+2\sqrt{2}$　　B．ab的最小值为$1+\sqrt{2}$

C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为$2\sqrt{2}-2$　　D．2^a+4^b的最小值为$16\sqrt{2}$

11．（5分）已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\cos\omega x$（$\omega>0$），则下列结论正确的有（　　）

A．将函数$y=2\sin\omega x$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，总能得到$y=f(x)$的图象

B．若$\omega=3$，则当$x\in[0,\frac{2\pi}{9}]$时，$f(x)$的取值范围为[1，2]

C．若$f(x)$在区间（0，2π）上恰有3个极大值点，则$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{19}{6}$

D．若$f(x)$在区间$(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12})$上单调递减，则$1\leqslant\omega\leqslant\frac{16}{5}$

12.（5 分）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，E，F 分别是棱 B_1C_1，C_1D_1 上的动点，满足 $D_1F=C_1E$，则（　　）

A．BF 与 DE 垂直

B．BF 与 DE 一定是异面直线

C．存在点 E，F，使得三棱锥 $F-A_1BE$ 的体积为$\frac{15}{4}$

D．当 E，F 分别是 B_1C_1，C_1D_1 的中点时，平面 AEF 截正方体所得截面的周长为 $3\sqrt{13}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13.（5 分）$(2-\frac{1}{x})(x-2)^5$的展开式中 x^2 的系数为 ______．

14.（5 分）在△ABC 中，已知$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}$，$BE$ 与 AD 交于点 O．若$\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CA}$（$x$，$y\in\mathbf{R}$），则 $x+y=$______．

15.（5 分）已知圆 C：$x^2-2x+y^2-3=0$，过点 T（2，0）的直线 l 交圆 C 于 A，B 两点，点 P 在圆 C 上，若 $CP\parallel AB$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}$，则$|AB|=$______．

16.（5 分）已知函数 $f(x)=xe^x-e^x-x$ 的两个零点为 x_1，x_2，函数 $g(x)=x\ln x-\ln x-x$ 的两个零点为 x_3，x_4，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=$______．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．

17.（10 分）已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $a_2+a_3+a_4=39$，$a_5=2a_4+3a_3$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{n}{a_n}$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

18.（12 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$1+\sin 2A=(3\tan B+2)\cos 2A$．

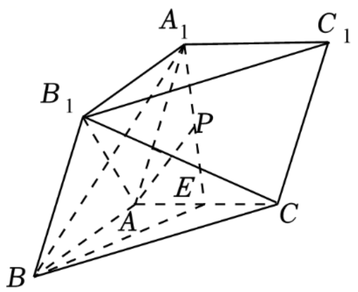
（1）若 $C=\frac{3\pi}{4}$，求 $\tan B$ 的值；

（2）若 $A=B$，$c=2$，求△ABC 的面积．

19.（12 分）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1B_1BA\perp$平面 ABC，侧面 A_1B_1BA 为菱形，$\angle ABB_1=\frac{\pi}{3}$，$AB_1\perp AC$，$AB=AC=2$，$E$ 是 AC 的中点．

（1）求证：$A_1B\perp$平面 AB_1C；

（2）点 P 在线段 A_1E 上（异于点 A_1，E），AP 与平面 A_1BE 所成角为$\frac{\pi}{4}$，求$\frac{EP}{EA_1}$的值．



20.（12 分）某小区有居民 2000 人，想通过验血的方法筛查出乙肝病毒携带者，为此需对小区全体居民进行血液化验，假设携带病毒的居民占 $a\%$，若逐个化验需化验 2000 次．为减轻化验工作量，随机按 n 人一组进行分组，将各组 n 个人的血液混合在一起化验，若混合血样呈阴性，则这 n 个人的血样全部阴性；若混合血样呈阳性，说明其中至少有一人的血样呈阳性，就需对每个人再分别单独化验一次．假设每位居民的化验结果呈阴性还是阳性相互独立．

（1）若 $a=0.2$，$n=20$，试估算该小区化验的总次数；

（2）若 $a=0.9$，每人单独化验一次花费 10 元，n 个人混合化验一次花费 $n+9$ 元．求 n 为何值时，每位居民化验费用的数学期望最小．

（注：当 $p<0.01$ 时，$(1-p)^n\approx1-np$）

21.（12 分）已知直线 l 与抛物线 C_1：$y^2=2x$ 交于两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，与抛物线 C_2：$y^2=4x$ 交于两点 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，其中 A，C 在第一象限，B，D 在第四象限．

（1）若直线 l 过点 $M(1,0)$，且 $\frac{1}{|BM|}-\frac{1}{|AM|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求直线 l 的方程；

（2）①证明：$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}$；

②设△AOB，△COD 的面积分别为 S_1，S_2（O 为坐标原点），若 $|AC|=2|BD|$，求 $\frac{S_1}{S_2}$．

22．（12 分）已知定义在（0，+∞）上的两个函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$，$g(x)=\ln x$．

（1）求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值；

（2）设直线 $y=-x+t$（$t\in\mathbf{R}$）与曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 分别交于 A，B 两点，求 $|AB|$ 的最小值．

昆山市 2023-2024 学年第二学期高三数学期中考试模拟试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1.（5 分）已知集合 $A=\{x|\log_2x<1\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cup \complement_RB=$（　　）

A．$\{x|x<2\}$　　B．$\{x|0<x\leqslant 1\}$　　C．$\{x|x\leqslant 1\}$　　D．R

【分析】根据对数函数的单调性解出集合 A，根据补集的定义和运算求出 B 的补集，结合并集的定义和运算即可求解.

【解答】解：由 $\log_2x<1$，得 $0<x<2$，

$\therefore A=\{x|0<x<2\}$，

又 $\complement_RB=\{x|x\leqslant 1\}$，

$\therefore A\cup \complement_RB=\{x|x<2\}$.

故选：A.

【点评】本题主要考查了集合补集及并集运算，属于基础题.

2.（5 分）两个粒子 A，B 从同一发射源发射出来，在某一时刻，它们的位移分别为 $\overrightarrow{s_A}=(4,\ 3)$，$\overrightarrow{s_B}=(-2,\ 6)$，则 $\overrightarrow{s_B}$ 在 $\overrightarrow{s_A}$ 上的投影向量的长度为（　　）

A．10　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D．2

【分析】先求得 $\overrightarrow{s_B}$ 与 $\overrightarrow{s_A}$ 夹角的余弦值，再根据投影向量的定义求出 $\overrightarrow{s_B}$ 在 $\overrightarrow{s_A}$ 上的投影向量，即可求解.

【解答】解：设 $\overrightarrow{s_B}$ 与 $\overrightarrow{s_A}$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{s_B}\cdot\overrightarrow{s_A}}{|\overrightarrow{s_B}|\cdot|\overrightarrow{s_A}|}=\dfrac{10}{5\times 2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\overrightarrow{s_B}$ 在 $\overrightarrow{s_A}$ 上的投影向量为 $|\overrightarrow{s_B}|\cos\theta\cdot\dfrac{\overrightarrow{s_A}}{s_A}=2\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cdot(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5})=(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{6}{5})$，

所以 $\overrightarrow{s_B}$ 在 $\overrightarrow{s_A}$ 上的投影向量的长度为 $\sqrt{\dfrac{64}{25}+\dfrac{36}{25}}=2$.

故选：D.

【点评】本题主要考查平面向量的数量积公式，属于基础题.

3.（5 分）“绿水青山，就是金山银山”，随着我国的生态环境越来越好，外出旅游的人越来越多．现有两位游客慕名来江苏旅游，他们分别从“太湖鼋头渚、苏州拙政园、镇江金山寺、常州恐龙园、南京夫子庙、扬州瘦西湖”这 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩．记事件 A 为“两位游客中至少有一人选择太湖鼋头渚”，事件 B 为“两位游客选择的景点不同”，则 $P(B|A)=$（　　）

A．$\frac{7}{9}$　　B．$\frac{8}{9}$　　C．$\frac{9}{11}$　　D．$\frac{10}{11}$

【分析】根据古典概型概率公式求出 P（A），P（AB），然后利用条件概率公式即得．

【解答】解：由题可得$P(A)=\frac{6\times6-5\times5}{6\times6}=\frac{11}{36}$，$P(AB)=\frac{2\times5}{6\times6}=\frac{5}{18}$，

所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{36}}=\frac{10}{11}$．

故选：D．

【点评】本题主要考查条件概率公式，属于基础题．

4．（5 分）已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 1，点 O 为底面 ABC 的中心，球 O 与该正四面体的其余三个面都有且只有一个公共点，且公共点非该正四面体的顶点，则球 O 的半径为（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{12}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{9}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{9}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【分析】由题可知球 O 与该正四面体的其余三个面都相切，然后利用 $V_{P-ABC}=V_{O-PABC}+V_{O-PBC}+V_{O-PAC}$，即可求解．

【解答】解：∵正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 1，

∴正四面体 $P-ABC$ 的高为$h=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

由题可知球 O 与该正四面体的其余三个面都相切，设球 O 的半径为 r，

则 $V_{P-ABC}=V_{O-PAB}+V_{O-PBC}+V_{O-PAC}$，

∴$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}r+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}r+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}r$，

∴$r=\frac{\sqrt{6}}{9}$．

故选：B．

【点评】本题考查正四面体的内切球问题，等体积法思想的应用，方程思想，属中档题．

5．（5 分）已知 f（x）是定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\geqslant0$ 时，f（x）$=e^x+\sin x$，则不等式 f（$2x-1$）$<e^{\pi}$ 的解集是（　　）

A．$\left(\frac{1+\pi}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(0,\frac{1+\pi}{2}\right)$

C．$\left(0,\frac{1+e^{\pi}}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{1-\pi}{2},\frac{1+\pi}{2}\right)$

【分析】利用导函数证明 f（x）在$[0$，$+\infty$）单调递增，再根据奇偶性和单调性解不等式即可．

【解答】解：当 $x\geqslant0$ 时，f'（x）$=e^x+\cos x$，

因为 $e^x\geqslant1$，$\cos x\in[-1,1]$，所以 $f'(x)=e^x+\cos x\geqslant0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

又因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 单调递减，

所以 $f(-\pi)=f(\pi)=e^{\pi}$，

所以由 $f(2x-1)<e^{\pi}$ 可得 $-\pi<2x-1<\pi$，解得 $x\in(\frac{1-\pi}{2},\frac{1+\pi}{2})$，

故选：D.

【点评】本题考查利用导数研究函数的单调性，考查函数单调性与奇偶性的综合运用，考查运算求解能力，属于中档题.

6.（5 分）在△ABC 中，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，$\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点 D，△ABD 的面积是△ADC 面积的 3 倍，则 $\tan B=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$　　D. $\frac{6-\sqrt{3}}{33}$

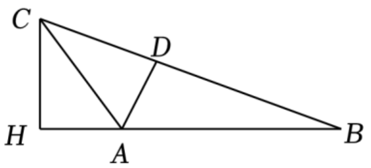
【分析】利用面积之比可得 $c=3b$，作 AB 边上高，垂足为 H，即可求 $\tan B$.

【解答】解：因为 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\sin CAD}=\frac{AB}{AC}=3$，

即 $c=3b$，在△ABC 中，作 AB 边上高，垂足为 H，

则 $\tan B=\frac{CH}{BH}=\frac{b\sin\angle CAH}{AB+AH}=\frac{b\sin\angle CAH}{AB+b\cos\angle CAH}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\frac{7}{2}b}=\frac{\sqrt{3}}{7}$.

故选：A.



【点评】本题主要考查三角形中的几何计算，考查运算求解能力，属于基础题.

7.（5 分）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，点 P，Q 在直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上，$FP\perp FQ$，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OF}^2$，则该椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】根据平面向量数量积的坐标运算公式和离心率公式求解.

【解答】解：依题意，设 $P(\frac{a^2}{c}, m)$，$Q(\frac{a^2}{c}, n)$，

则 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=(\frac{a^2}{c}-c)^2+mn=0$，

又 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\frac{a^2}{c})^2+mn=2c^2$，

两式做差可得 $(\frac{a^2}{c})^2-(\frac{a^2}{c}-c)^2=2c^2$，即 $2a^2=3c^2$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：B.

【点评】本题主要考查椭圆的性质，考查转化能力，属于中档题.

8.（5分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，若对任意正整数 n，$S_{n+1}=-3a_{n+1}+a_n+3$，$S_n+a_n>(-1)^na$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-1, \frac{3}{2})$　　B．$(-1, \frac{5}{2})$　　C．$(-2, \frac{5}{2})$　　D．$(-2, 3)$

【分析】根据 a_n 与 S_n 的关系结合等比数列的概念可得 $2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^n}$，可得 $a_n=\frac{n+1}{2^n}$，然后结合条件可得 $S_n+a_n=3-\frac{1}{2^{n-1}}>(-1)^na$，分类讨论，即可得出答案.

【解答】解：$\because S_{n+1}=-3a_{n+1}+a_n+3$，$a_1=1$，

$\therefore$当 $n=1$ 时，$S_2=-3a_2+a_1+3$，解得 $a_2=\frac{3}{4}$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=-3a_n+a_{n-1}+3$（$n\geqslant 2$），则 $a_{n+1}=-3a_{n+1}+4a_n-a_{n-1}$，

$\therefore 2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(2a_n-a_{n-1})$，

又 $2a_2-a_1=\frac{1}{2}$，

$\therefore$数列$\{2a_{n+1}-a_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，

$\therefore 2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^n}$，则 $2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=1$，又 $2a_1=2$，

$\therefore$数列$\{2^na_n\}$为首项为 2，公差为 1 的等差数列，

则 $2^na_n=n+1$，则 $a_n=\frac{n+1}{2^n}$，

$\therefore S_{n+1}+a_{n+1}=-2\cdot\frac{n+2}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^n}+3=3-\frac{1}{2^n}$，

又 $S_1+a_1=2=3-\frac{1}{2^{1-1}}$，

则 $S_n+a_n=3-\frac{1}{2^{n-1}}(n\in N^*)$，

又$S_n+a_n>(-1)^n a$，则$3-\frac{1}{2^{n-1}}>(-1)^n a$，

当 n 为奇数时，$3-\frac{1}{2^{n-1}}>-a$，即$3-\frac{1}{2^{n-1}}\geqslant 2$，则 $2>-a$，解得 $a>-2$；

当 n 为偶数时，$3-\frac{1}{2^{n-1}}>a$，即$3-\frac{1}{2^{n-1}}\geqslant\frac{5}{2}$，解得$a<\frac{5}{2}$；

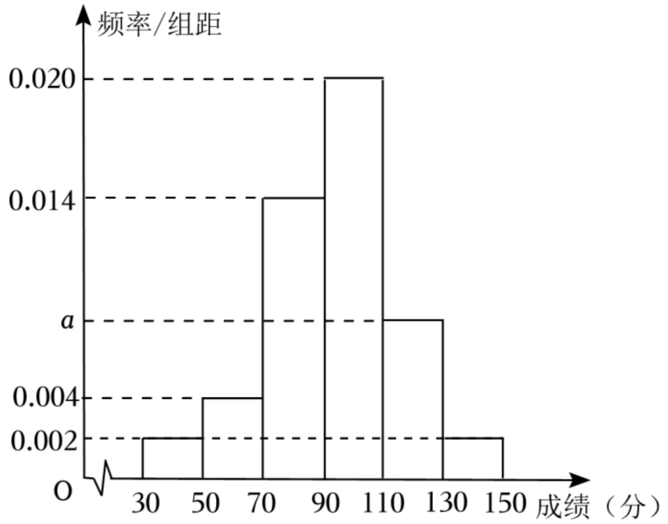
综上所述，实数 a 的取值范围为$(-2,\ \frac{5}{2})$.

故选：C.

【点评】本题考查等差数列和等比数列的综合，考查转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

（多选）9．（5 分）某校 1000 名学生在高三一模测试中数学成绩的频率分布直方图如图所示（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）．分数不低于 X 即为优秀，已知优秀学生有 80 人，则（　　）



A．$a=0.008$

B．$X=120$

C．70 分以下的人数约为 6 人

D．本次考试的平均分约为 93.6

【分析】根据频率分布图的求解频率、频数、平均数即可求解．

【解答】解：对于 A，$(0.002\times2+0.004+a+0.014+0.02)\times20=1\Rightarrow a=0.008$，$A$ 正确；

对于 B，因为第六组有 40 人，第五组有 160 人，

所以$\frac{130-X}{130-110}=\frac{40}{160}\Rightarrow X=125$，$B$ 错误；

对于 C，70 分以下的人数为$(0.002+0.004)\times20\times1000=120$ 人，C 错误；

对于 D，平均成绩$\overline{X}=40\times 0.04+60\times 0.08+80\times 0.28+100\times 0.4+120\times 0.16+140\times 0.04=93.$，$D$ 正确，

故选：AD．

【点评】本题主要考查了频率分布直方图的应用，考查了平均数的计算，属于基础题．

（多选）10．（5 分）已知正数 a，b 满足 $ab=a+b+1$，则（　　）

A．$a+b$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$　　　　B．ab 的最小值为 $1+\sqrt{2}$

C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 $2\sqrt{2}-2$　　　　D．2^a+4^b 的最小值为 $16\sqrt{2}$

【分析】利用基本不等式结合条件逐项分析即得．

【解答】解：对于 A，正数 a，b 满足 $a+b+1=ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，

解得 $a+b\geqslant 2+2\sqrt{2}$，A 正确；

对于 B，$ab-1=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，即 $(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-1\geqslant 0$，可得$\sqrt{ab}\geqslant 1+\sqrt{2}$，

所以$ab\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b$ 时成立，B 错误；

对于 C，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{ab-1}{ab}=1-\frac{1}{ab}\geqslant 1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$，当且仅当 $a=b$ 时成立，C 正确；

对于 D，由$a+b+1=ab\Rightarrow 4=(a-1)(2b-2)\leqslant(\frac{a+2b-3}{2})^2\Rightarrow a+2b\geqslant 7$，

当且仅当 $a=2b-3$，即 $a=2$，$2b=5$ 等号成立，

所以 $2^a+4^b\geqslant 2\sqrt{2^{a+2b}}\geqslant 2\sqrt{2^7}=16\sqrt{2}$，此时 $a=2b$，不能同时取等号，所以 D 错误．

故选：AC．

【点评】本题主要考查了基本不等式及相关结论在最值求解中的应用，属于中档题．

（多选）11．（5 分）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\cos\omega x$（$\omega>0$），则下列结论正确的有（　　）

A．将函数 $y=2\sin\omega x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，总能得到 $y=f(x)$ 的图象

B．若 $\omega=3$，则当 $x\in[0,\frac{2\pi}{9}]$时，$f(x)$ 的取值范围为$[1,2]$

C．若 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上恰有 3 个极大值点，则$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{19}{6}$

D．若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12})$上单调递减，则$1\leqslant\omega\leqslant\frac{16}{5}$

【分析】由题可得 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，然后利用三角函数的性质结合条件逐项分析即得．

【解答】解：由题可得 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\cos\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}\cos\omega x+\cos\omega x$

$=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x\right)$

$=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

对于选项 A，$y=2\sin\omega x$ 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度为$y=2\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\omega\right)$，故不一定能得到 $y=f(x)$ 的图象，故 A 选项错误；

对于选项 B，$\omega=3$，$x\in\left[0,\frac{2\pi}{9}\right]$，则 $3x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以 $f(x)\in[1,2]$，故 B 选项正确；

对于选项 C，由 $x\in(0,2\pi)$ 可得 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上恰有 3 个极大值点可得$\frac{9\pi}{2}<2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{13\pi}{2}\Rightarrow\omega\in\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$，

故 C 选项正确；

对于选项 D，$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$，则 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\frac{5\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $f(x)$ 单调递减，

所以$\begin{cases}\frac{5\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$，$k\in\mathbf{Z}$，且$\frac{T}{2}\geqslant\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$，即$\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{12}$，

解得$1+6k\leqslant\omega\leqslant\frac{16}{5}+\frac{24}{5}k$，$k\in\mathbf{Z}$，且 $0<\omega\leqslant12$，

当 $k=0$ 时，$\omega\in\left[1,\frac{16}{5}\right]$，当 $k=1$ 时，$\omega\in[7,8]$，故 D 选项错误．

故选：BC．

【点评】本题主要考查三角恒等变换，三角函数的图象变换，正弦型函数的图象与性质，考查运算求解能力，属于中档题．

（多选）12．（5 分）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，E，F 分别是棱 B_1C_1，C_1D_1 上的动点，满足 $D_1F=C_1E$，则（　　）

A．BF 与 DE 垂直

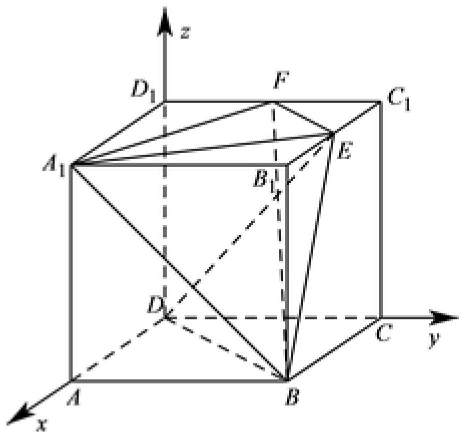
B．BF 与 DE 一定是异面直线

C．存在点 E，F，使得三棱锥 $F-A_1BE$ 的体积为$\frac{15}{4}$

D．当 E，F 分别是 B_1C_1，C_1D_1 的中点时，平面 AEF 截正方体所得截面的周长为 $3\sqrt{13}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

【分析】设 $C_1E=D_1F=a\in[0，3]$，利用坐标法可判断 A，利用特值法可判断 B，根据体积公式表示出三棱锥 $F-A_1BE$ 的体积可判断 C，作出截面结合条件可得周长判断 D．

【解答】解：如图建立空间直角坐标系，设 $C_1E=D_1F=a\in[0，3]$，



则 D（0，0，0），B（3，3，0），E（a，3，3），F（0，a，3），

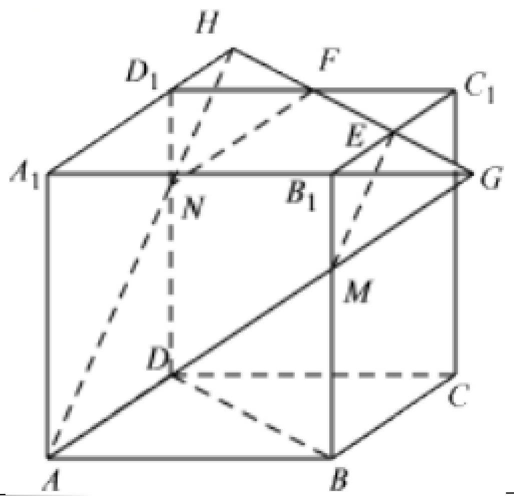
A：由题可得 $\overrightarrow{BF}=(-3，a-3，3)$，$\overrightarrow{DE}=(a，3，3)$，所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=-3a+3(a-3)+3\times3=0$，所以 $\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{DE}$，即 $BF\perp DE$，故 A 正确；

B：当 E，F 为中点时，$\overrightarrow{DB}=(3，3，0)$，$\overrightarrow{FE}=(\frac{3}{2}，\frac{3}{2}，0)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，所以 $EF\parallel BD$，B，D，F，E 四点共面，此时 BF 与 DE 不是异面直线，故 B 错误；

C：由 $C_1E=D_1F=a\in[0，3]$，可得 $S_{\triangle A_1EF}=9-\frac{3a}{2}-\frac{a(3-a)}{2}-\frac{3(3-a)}{2}=\frac{1}{2}(a^2-3a+9)$，

则 $V_{F-A_1BE}=V_{B-A_1EF}=\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{2}(a^2-3a+9)=\frac{1}{2}(a-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{8}\in[\frac{27}{8}，\frac{9}{2}]$，由于 $\frac{15}{4}\in[\frac{27}{8}，\frac{9}{2}]$，故 C 正确；

D：直线 EF 与 A_1B_1，A_1D_1 分别交于 G，H，连接 AG，AH 分别交 BB_1，DD_1 于点 M，N，



则五边形 $ANFEM$ 为平面 AEF 截正方体所得的截面，

因为 E，F 分别是 B_1C_1，C_1D_1 的中点，

所以易得 $\angle C_1EF=\angle HFD_1=\frac{\pi}{4}$，故可得 $B_1G=B_1E=C_1F=D_1F=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，

因为△B_1MG～△BMA，所以 $\frac{B_1M}{BM}=\frac{B_1G}{BA}=\frac{1}{2}$，可得 $B_1M=\frac{1}{2}MB=1$，同理可得 $D_1N=\frac{1}{2}ND=1$，

所以五边形 $ANFEM$ 的周长为 $2(\sqrt{9+4}+\sqrt{1+\frac{9}{4}})+\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=3\sqrt{13}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故 D 正确.

故选：ACD.

【点评】本题考查了立体几何的综合应用，属于中档题.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.（5 分）$(2-\frac{1}{x})(x-2)^5$的展开式中 x^2 的系数为 ___－200___.

【分析】利用二项展开式的通项公式求解.

【解答】解：因为 $(2-\frac{1}{x})(x-2)^5$的展开式中 x^2 的项为 $2C_5^3x^2(-2)^3-\frac{1}{x}C_5^2x^3(-2)^2=-200x^2$，

所以 $(2-\frac{1}{x})(x-2)^5$的展开式中 x^2 的系数为－200.

故答案为：－200.

【点评】本题主要考查了二项式定理的应用，属于基础题.

14.（5 分）在△ABC 中，已知 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}$，$BE$ 与 AD 交于点 O．若 $\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CA}$（$x$，$y$∈**R**），则 $x+y$=___$\frac{3}{5}$___.

【分析】根据向量线性运算的几何表示可得 $\overrightarrow{CO}=3x\overrightarrow{CD}+y\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CB}+2y\overrightarrow{CE}$，然后利用共线向量的推论即得.

【解答】解：因为 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}$，

所以 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CE}$，又 $\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CA}$，

所以 $\overrightarrow{CO}=3x\overrightarrow{CD}+y\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CB}+2y\overrightarrow{CE}$，又 BE 与 AD 交于点 O，

所以 $\begin{cases}3x+y=1\\x+2y=1\end{cases}$，

所以 $x=\frac{1}{5}$，$y=\frac{2}{5}$，即 $x+y=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$.

【点评】本题主要考查了向量的线性表示及向量共线定理，属于基础题.

15．（5 分）已知圆 C：$x^2-2x+y^2-3=0$，过点 T（2，0）的直线 l 交圆 C 于 A，B 两点，点 P 在圆 C 上，若 $CP\,//\,AB$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}$，则$|AB|$＝__$\sqrt{15}$__．

【分析】根据向量的加减法运算可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|PD|^2-\frac{|AB|^2}{4}$，再根据圆的性质可得 $|PD|^2=|PC|^2+|CD|^2=|PC|^2+|AC|^2-\frac{|AB|^2}{4}$即可求解．

【解答】解：易知圆心（1，0），半径 r＝2，取 AB 中点 D，则 $CD\perp AB$，

因为$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$，

所以$\overrightarrow{PD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})^2-\frac{1}{4}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|PD|^2-\frac{|AB|^2}{4}$，则 $|PD|^2=\frac{|AB|^2}{4}+\frac{1}{2}$，

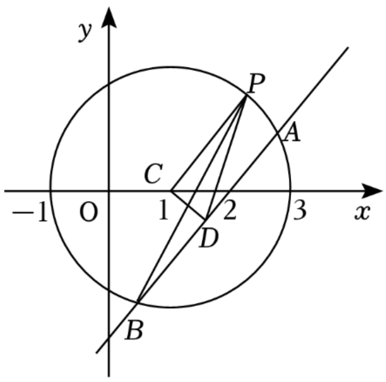
又 $|PD|^2=|PC|^2+|CD|^2=|PC|^2+|AC|^2-\frac{|AB|^2}{4}$，

所以$\frac{|AB|^2}{4}+\frac{1}{2}=|PC|^2+|AC|^2-\frac{|AB|^2}{4}$，

即$|AB|^2$＝15，

故 $|AB|=\sqrt{15}$．

故答案为：$\sqrt{15}$．



【点评】本题主要考查了向量数量积的性质的应用，属于中档题．

16．（5 分）已知函数 f（x）＝xe^x-e^x-x 的两个零点为 x_1，x_2，函数 g（x）＝$x\ln x-\ln x-x$ 的两个零点为 x_3，x_4，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$＝__2__．

【分析】由题可得 g（x）＝f（$\ln x$），进而可得$\begin{cases}x_3=e^{x_1}\\x_4=e^{x_2}\end{cases}$，然后结合条件即得．

【解答】解：因为函数 f（x）＝xe^x-e^x-x 的两个零点为 x_1，x_2，

则 $x_1e^{x_1}-e^{x_1}-x_1=0$，$x_2e^{x_2}-e^{x_2}-x_2=0$，即 $x_1e^{x_1}=e^{x_1}+x_1$，$x_2e^{x_2}=e^{x_2}+x_2$，

又 $g(x)=x\ln x-\ln x-x=\ln x\cdot e^{\ln x}-e^{\ln x}-\ln x=f(\ln x)$，

则$\begin{cases}x_1=\ln x_3\\x_2=\ln x_4\end{cases}$，即$\begin{cases}x_3=e^{x_1}\\x_4=e^{x_2}\end{cases}$，

所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{e^{x_1}}+\frac{1}{e^{x_2}}=\frac{x_1+e^{x_1}}{x_1e^{x_1}}+\frac{x_2+e^{x_2}}{x_2e^{x_2}}=2$.

故答案为：2.

【点评】本题主要考查函数的零点与方程根的关系，考查运算求解能力，属于中档题.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17.（10 分）已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $a_2+a_3+a_4=39$，$a_5=2a_4+3a_3$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{n}{a_n}$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

【分析】（1）根据等比数列基本量的运算可得 a_1，q，即可得数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）由题可得 b_n，然后利用错位相减法求解即可；或利用裂项相消法求和即得.

【解答】解：（1）$\because\begin{cases}a_2+a_3+a_4=39\\a_5=2a_4+3a_3\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}a_1(q+q^2+q^3)=39\\a_1q^4=2a_1q^3+3a_1q^2\end{cases}$，$q>0$，

解得$\begin{cases}a_1=1\\q=3\end{cases}$，

$\therefore a_n=3^{n-1}$；

（2）由题可知$b_n=\frac{n}{3^{n-1}}$，

$\therefore T_n=1+\frac{2}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-2}}+\frac{n}{3^{n-1}}$，

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$，

两式相减可得：$\frac{2}{3}T_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n}{3^n}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^n}=\frac{3}{2}-(\frac{3}{2}+n)\frac{1}{3^n}$，

$\therefore T_n=\frac{9}{4}-\frac{6n+9}{4\times3^n}$.

【点评】本题考查等比数列的通项公式与求和公式的应用，错位相减法求和，属中档题．

18．（12 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$1+\sin 2A=(3\tan B+2)\cos 2A$．

（1）若 $C=\frac{3\pi}{4}$，求 $\tan B$ 的值；

（2）若 $A=B$，$c=2$，求△ABC 的面积．

【分析】（1）根据三角恒等变换可得 $\tan(A+\frac{\pi}{4})=2\tan B+2$，结合条件可得关于 $\tan B$ 的方程，进而即得；

（2）根据条件可得 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，进而可得 $a=b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，然后根据三角形面积的公式即得．

【解答】解：（1）若 $C=\frac{3\pi}{4}$，则 $A+B=\frac{\pi}{4}$，

∵$1+\sin 2A=(3\tan B+2)\cos 2A$，$\cos 2A\neq 0$，

∴$\frac{1+\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{(\sin A+\cos A)^2}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{\sin A+\cos A}{\cos A-\sin A}=\frac{\tan A+1}{1-\tan A}=\tan(A+\frac{\pi}{4})=3\tan B+2$，

∴ $\tan(\frac{\pi}{2}-B)=3\tan B+2\Rightarrow\frac{1}{\tan B}=3\tan B+2$，

解得 $\tan B=\frac{1}{3}$ 或 -1，又 $B\in(0,\frac{\pi}{4})$，

∴$\tan B=\frac{1}{3}$；

（2）若 $A=B$，由 $\tan(A+\frac{\pi}{4})=3\tan B+2$，

可得 $\frac{\tan A+1}{1-\tan A}=3\tan A+2$，

∴ $\tan^2 A=\frac{1}{3}$，∴$\tan A=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $A=B\in(0,\frac{\pi}{2})$，

∴$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$A=B=\frac{\pi}{6}$，∴$C=\frac{2\pi}{3}$，

∴△ABC 是以 C 为顶角的等腰三角形，∴$a=b=\frac{c}{2\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

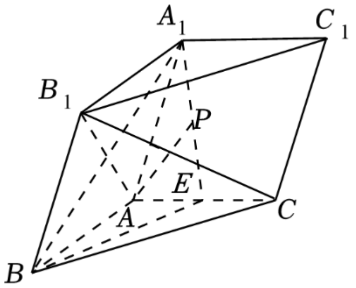
∴△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【点评】本题考查解三角形，三角函数公式的应用，三角方程的求解，三角形面积的求解，属中档题．

19．（12 分）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1B_1BA\perp$ 平面 ABC，侧面 A_1B_1BA 为菱形，$\angle ABB_1=\frac{\pi}{3}$，$AB_1\perp AC$，$AB=AC=2$，$E$ 是 AC 的中点．

（1）求证：$A_1B\perp$ 平面 AB_1C；

（2）点 P 在线段 A_1E 上（异于点 A_1，E），AP 与平面 A_1BE 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，求 $\frac{EP}{EA_1}$ 的值．



【分析】（1）根据线面垂直的判定定理证明；

（2）利用空间向量的坐标运算表示线面夹角即可求解．

【解答】（1）证明：因为四边形 A_1B_1BA 为菱形，所以 $A_1B\perp AB_1$，

又因为 $A_1B\perp AC$，AB_1，$AC\subset$平面 AB_1C，$AB_1\cap AC=A$，

所以 $A_1B\perp$平面 AB_1C．

（2）解：取 AB 的中点 O，连接 B_1O，四边形 A_1B_1BA 为菱形，且 $\angle ABB_1=\frac{\pi}{3}$，

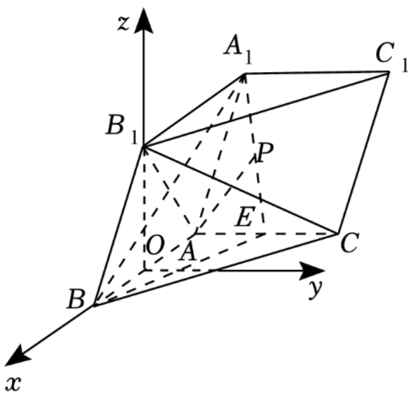
所以 $B_1O\perp AB$．

因为平面 $A_1B_1BA\perp$平面 ABC，平面 $A_1B_1BA\cap$平面 $ABC=AB$，$B_1O\subset$平面 A_1B_1BA，

所以 $B_1O\perp$平面 ABC，所以 $B_1O\perp AC$，又因为 $A_1B\perp AC$，$B_1O\cap AB=O$，

所以 $AC\perp$平面 A_1B_1BA．取 BC 中点 D，连结 OD，

以 O 为原点，OB，OD，OB_1 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



则 B（1，0，0），A（－1，0，0），$A_1(-2,0,\sqrt{3})$，E（－1，1，0），

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-3,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}=(-2,1,0)$．

设平面 A_1BE 的一个法向量为 $\vec{n}=$（x，y，z），

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-3x+\sqrt{3}z=0\\ -2x+y=0\end{cases}$，令 $x=1$，可得平面 A_1BE 的一个法向量 $\vec{n}=(1,2,\sqrt{3})$．

设$\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EA_1}$，可得点$P(-1-\lambda, 1-\lambda, \sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{AP}=(-\lambda, 1-\lambda, \sqrt{3}\lambda)$，

由题意$\sin\frac{\pi}{4}=|\cos\langle\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{n}|}=\frac{|-\lambda+2-2\lambda+3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(1-\lambda)^2+3\lambda^2}\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得$\lambda=\frac{2}{5}$或$\lambda=0$（舍），即$\frac{EP}{EA_1}=\frac{2}{5}$.

【点评】本题主要考查直线与平面垂直的判断，直线与平面所成角的求法，考查运算求解能力与逻辑推理能力，属于中档题.

20.（12分）某小区有居民2000人，想通过验血的方法筛查出乙肝病毒携带者，为此需对小区全体居民进行血液化验，假设携带病毒的居民占$a\%$，若逐个化验需化验2000次．为减轻化验工作量，随机按n人一组进行分组，将各组n个人的血液混合在一起化验，若混合血样呈阴性，则这n个人的血样全部阴性；若混合血样呈阳性，说明其中至少有一人的血样呈阳性，就需对每个人再分别单独化验一次．假设每位居民的化验结果呈阴性还是阳性相互独立.

（1）若$a=0.2$，$n=20$，试估算该小区化验的总次数；

（2）若$a=0.9$，每人单独化验一次花费10元，n个人混合化验一次花费$n+9$元．求n为何值时，每位居民化验费用的数学期望最小.

（注：当$p<0.01$时，$(1-p)^n\approx1-np$）

【分析】（1）设每位居民需化验的次数为X，则X可取$\frac{1}{20}$，$\frac{21}{20}$，分别求概率，进而可得期望，即得；

（2）设每组n人总费用为Y元，结合条件计算$E(Y)$，然后表示出$\frac{E(Y)}{n}$结合基本不等式即得.

【解答】解：（1）设每位居民需化验的次数为X，

若混合血样为阴性，则$X=\frac{1}{20}$，若混合血样呈阳性，则$X=\frac{21}{20}$，

所以$P(X=\frac{1}{20})=0.998^{20}$，$P(X=\frac{21}{20})=1-0.998^{20}$，

$E(X)=\frac{1}{20}\times0.998^{20}+\frac{21}{20}(1-0.998^{20})=\frac{21}{20}-0.998^{20}=\frac{21}{20}-(1-0.002)^{20}$

$\approx\frac{21}{20}-(1-0.002\times20)=0.09$，

所以2000名居民总化验次数约为$2000\times0.09=180$次；

（2）设每组n人总费用为Y元，若混合血样呈阴性则$Y=n+9$，若混合血样为阳性，则$Y=11n+9$，

所以$P(Y=n+9)=0.991^n$，$P(Y=11n+9)=1-0.991^n$，

所以$E(Y)=(n+9)\times0.991^n+(11n+9)(1-0.991^n)=11n-10n\times0.991^n+9$，

每位居民的化验费用为：$\frac{E(Y)}{n}=11-10\times0.991^n+\frac{9}{n}=11-10\times(1-0.009)^n+\frac{9}{n}$

$\approx 11-10\times(1-0.009n)+\dfrac{9}{n}=1+0.09n+\dfrac{9}{n}\geqslant 1+2\sqrt{0.09n\cdot\dfrac{9}{n}}=2.8$元，

当且仅当$0.09n=\dfrac{9}{n}$，即 $n=10$ 时取等号，

故 $n=10$ 时，每位居民化验费用的期望最小．

【点评】本题主要考查了离散型随机变量的分布列和期望，属于中档题．

21．（12 分）已知直线 l 与抛物线 C_1：$y^2=2x$ 交于两点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），与抛物线 C_2：$y^2=4x$ 交于两点 C（x_3，y_3），D（x_4，y_4），其中 A，C 在第一象限，B，D 在第四象限．

（1）若直线 l 过点 M（1，0），且$\dfrac{1}{|BM|}-\dfrac{1}{|AM|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求直线 l 的方程；

（2）①证明：$\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_3}+\dfrac{1}{y_4}$；

②设△AOB，△COD 的面积分别为 S_1，S_2（O 为坐标原点），若$|AC|=2|BD|$，求$\dfrac{S_1}{S_2}$．

【分析】（1）显然直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程，与抛物线 C_1 联立，可得两根之和及两根之积，进而可得 A，B 的纵坐标的关系，求出$|MB|$，$|MA|$的表达式，代入$\dfrac{1}{|BM|}-\dfrac{1}{|AM|}$中，由题意可得参数的值，进而求出直线 l 的方程；

（2）①设直线 l 的方程，分别与两条抛物线联立，求出两根之和及两根之积，进而可得 A，B 的纵坐标的关系及 C，D 的纵坐标的关系，进而可证得都是成立；

②由①可得 A，C 的纵坐标的关系，及 B，D 的纵坐标的关系，由$|AC|=2|BD|$，可得直线 l 与 x 轴的交点 M 为 AD 的中点，可得 A，D 的坐标的关系，代入抛物线的方程，可得 A，B，C，D 的纵坐标的中，进而求出面积之比．

【解答】解：（1）显然直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，

联立$\begin{cases}x=my+1\\y^2=2x\end{cases}$，整理可得 $y^2-2my-2=0$，

可知 $y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-2$，则$\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-m$，

则$\dfrac{1}{|BM|}-\dfrac{1}{|AM|}=-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}y_2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_1}=-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\left(\dfrac{1}{y_2}+\dfrac{1}{y_1}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}\cdot(-m)=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$，

由题意可知$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理可得：$m^2-2m+1=0$，解得 $m=1$，

所以直线 l 的方程为：$x=y+1$，即 $x-y-1=0$；

（2）①证明：设直线 l 的方程为 $x=my+t$，$t\neq 0$，设 M（t，0），

联立$\begin{cases}x=my+t\\ y^2=2x\end{cases}$，整理可得：$y^2-2my-2t=0$，

可得 $y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-2t$，所以$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-\frac{m}{t}$，

即$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=-\frac{m}{t}$，

联立$\begin{cases}x=my+t\\ y^2=4x\end{cases}$，整理可得：$y^2-4my-4t=0$，

可得 $y_3+y_4=4m$，$y_3y_4=-4t$，所以$\frac{y_3+y_4}{y_3y_4}=-\frac{m}{t}$，即$\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}=-\frac{m}{t}$，

所以可证得：$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}$；

②由①可知，$\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}=\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_2}$，即$\frac{y_3-y_1}{y_1y_3}=\frac{y_2-y_4}{y_2y_4}$，

即$|\frac{y_3-y_1}{y_2-y_4}|=\frac{|y_1y_3|}{|y_2y_4|}$，

因为$\frac{|AC|}{|BD|}=2=|\frac{y_3-y_1}{y_2-y_4}|=\frac{|y_1y_3|}{|y_2y_4|}$，

所以 $2=\frac{|y_1\cdot\frac{-4t}{y_4}|}{|y_4\cdot\frac{-2t}{y_1}|}=\frac{2y_1^2}{y_4^2}=\frac{2|AM|^2}{|DM|^2}$，

所以$|AM|^2=|DM|^2$，即$|AM|=|DM|$，可知 M 为 AD 的中点，

所以$\begin{cases}2t=x_1+x_4\\ y_1=-y_4\end{cases}$，代入抛物线的方程可得$\begin{cases}y_4^2=4x_4=4(2t-x_1)\\ y_4^2=y_1^2=2x_1\end{cases}$，解得 $y_1=\frac{2\sqrt{6t}}{3}$，$y_2=\frac{-2t}{y_1}=-\frac{\sqrt{6t}}{2}$，

$y_4=-y_1=-\frac{2\sqrt{6t}}{3}$，因为 $y_3y_4=-4t$，$y_3=\sqrt{6t}$，

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|y_1-y_2|}{|y_3-y_4|}=\frac{|\frac{2\sqrt{6t}}{3}+\frac{\sqrt{6t}}{2}|}{|\sqrt{6t}+\frac{2\sqrt{6t}}{3}|}=\frac{7}{10}$.

【点评】本题考查直线与抛物线的综合应用，三角形面积之比的表达式，属于中档题.

22.（12 分）已知定义在（0，+∞）上的两个函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$，$g(x)=\ln x$.

（1）求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值；

（2）设直线 $y=-x+t$（$t\in\mathbf{R}$）与曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 分别交于 A，B 两点，求$|AB|$的最小值.

【分析】（1）由题可得 $h(x)=x^2+\frac{1}{4}-\ln x$，然后利用导数求函数的最值即得；

（2）构造函数 $F(x)=x+\ln x-(x-k)^2-(x-k)-\frac{1}{4}$，题设等价于 $F(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 k 的最大值，然后利用导数研究函数的性质，求出 k 的最大值进而即得.

【解答】解：（1）因为 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$，$g(x)=\ln x$，

所以 $h(x)=x^2+\frac{1}{4}-\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=2x-\frac{1}{x}$，

令 $h'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

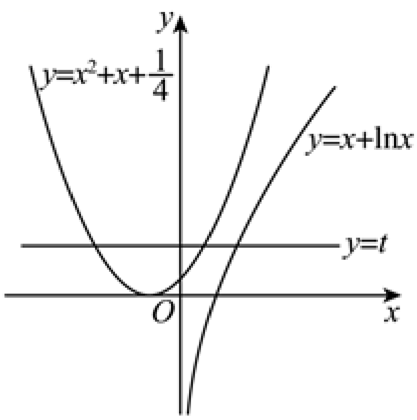
由 $h'(x)<0$，可得 $x\in(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$，由 $h'(x)>0$，可得 $x\in(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$；

（2）由 $\begin{cases}x^2+\frac{1}{4}=-x+t\\ \ln x=-x+t\end{cases}$，可得 $x^2+x+\frac{1}{4}=x+\ln x=t$，

作出函数 $y=x+\ln x$ 与 $y=x^2+x+\frac{1}{4}$ 的大致图象，则直线 $y=t$ 与两函数图象有交点，



设 $F(x)=x+\ln x-(x-k)^2-(x-k)-\frac{1}{4}=\ln x-(x-k)^2+k-\frac{1}{4}$，

则题设等价于 $F(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 k 的最大值，且 $|x_A-x_B|_{min}=k_{max}$，

所以 $F'(x)=\frac{1}{x}-2(x-k)=\frac{-2x^2+2kx+1}{x}$，

由 $F(x)=0$，可得 $x_0=\frac{k+\sqrt{k^2+2}}{2}$，且 $x_0-k=\frac{1}{2x_0}$，

由 $F(x)>0$，可得 $x\in(0,x_0)$，由 $F(x)<0$，可得 $x\in(x_0,+\infty)$，

所以函数 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

则 $F_{max}=F(x_0)=\ln x_0-(x_0-k)^2+k-\frac{1}{4}=\ln x_0-\frac{1}{4x_0^2}+x_0-\frac{1}{2x_0}-\frac{1}{4}\leqslant 0$，

设 $t(x)=\ln x-\frac{1}{4x^2}+x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4}$，

则 $t'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}+1+\frac{1}{2x^2}>0$，函数 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $t(1)=0$，则 $F(x_0)=t(x_0)\leqslant 0=t(1)$，

解得 $0<x_0\leqslant 1$，则 $k=x_0-\frac{1}{2x_0}\leqslant\frac{1}{2}$，即 $|x_A-x_B|_{min}=\frac{1}{2}$，

所以 $|AB|_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点评】本题主要考查了利用导数研究函数的单调性和最值，本题的关键是构造函数 $F(x)=x+\ln x-(x-k)^2-(x-k)-\frac{1}{4}=\ln x-(x-k)^2+k-\frac{1}{4}$，进而把问题转化为求最值问题，然后利用导函数结合条件即得，属于中档题