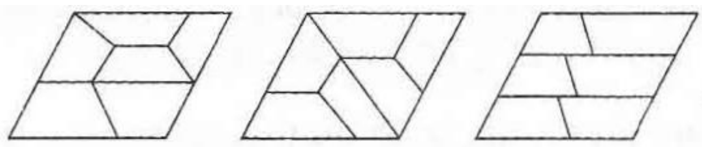
梯形

例 1　$a+b$

例 2⑴上底角为 120°，下底角为 60°；

⑵梯形的上底等于下底的一半，且等于腰长；

⑶能拼出菱形，以下图形供参考：



例 3　$7cm$ 提示：过 A 作 $AE\parallel BD$ 交 CB 延长线于 E，则 $S_{\triangle AEC}=S_{梯形ABCD}$.

例 4(1) 如图 a，若 E 为 AD 中点，则$\angle BEC=90°$ 且 CE, BE 分别平分$\angle BCD$，$\angle ABC$;

⑵如图 b，在 BC 上取一点 M，使 $AB=MB$，连结 AM, DM，则$\angle AMD=90°$；

⑶如图 c，将 a，b 组合，则四边形 $GEHM$ 为矩形.

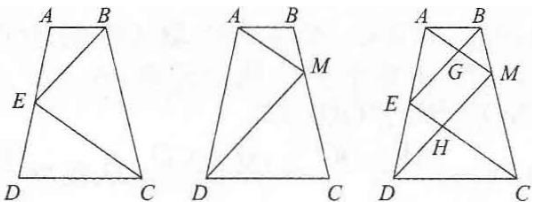
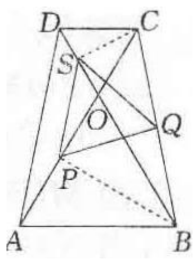


图 a　　　图 b　　　图 c

∴当 P 为 AD 中点时，可以证明$\angle BPC=90°$；在 AD 上截取 $AP=AB$，可以证明$\angle BPC=90°$，故满足条件$\angle BPC=90°$ 的点 P 有 2 个.

例 5⑴连结 SC, PB. ∴$\triangle OCD, \triangle OAB$ 均为等边三角形，S，P，Q 分别为 OD, OA, BC 中点，

∴$SQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=SP=PQ$. 故$\triangle SPQ$ 为等边三角形.



⑵∵$SB=\frac{1}{2}DO+OB=\frac{13}{2}, CS=\frac{3}{2}\sqrt{3}, BC=7$.

∴$\triangle SPQ$ 的边长 $SQ=\frac{1}{2}BC=\frac{7}{2}$. ∴$S_{\triangle SPQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{7}{2})^2=\frac{49\sqrt{3}}{16}$.

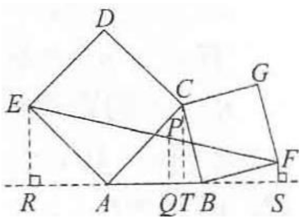
(3) 设 $CD=a$，$AB=b(a<b)$，$BC^2=SC^2+BS^2=(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(b+\frac{a}{2})^2=a^2+b^2+ab$.

$\therefore S_{\triangle SPQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}(a^2+ab+b^2)$. 又$\dfrac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\dfrac{b}{a}$，则 $S_{\triangle AOD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$.

又$\dfrac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\dfrac{b}{a}$, 则 $S_{\triangle AOD}=\dfrac{3}{4}ab$. $\because \dfrac{S_{\triangle PQS}}{S_{\triangle AOD}}=\dfrac{7}{8}$, $\therefore 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{16}(a^2+ab+b^2)=7\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$.

即 $2a^2-5ab+2b^2=0$，化简得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$. 故 CD：$AB=1:2$.

例 6 如图，分别过 E,F,C,P 作 AB 的垂线，垂足依次为 R，S，T，Q，则 PQ 就是点 P 到 AB 的距离，且有 $ER\parallel PQ\parallel CT\parallel FS$，故四边形 $ERSF$ 为直角梯形，$PQ=\dfrac{1}{2}(ER+FS)$.



易证 $Rt\triangle AER\cong Rt\triangle CAT$，$Rt\triangle BFS\cong Rt\triangle CBT$，$\therefore ER=AT$，$FS=BT$，又 $AT+BT=AB=ER+FS$，

故 $PQ=\dfrac{1}{2}AB$.

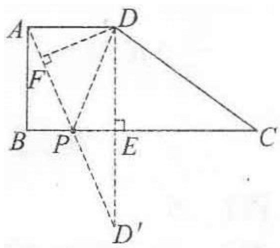
A 级

1. 60° 2. 3 3. 6cm 4. $8\sqrt{2}cm^2$ 5. B 6. D 7. C

8. C 提示:如图，作点 D 关于直线 BC 的对称点 D'，连结 DD' 交 BC 于 E，连结 AD' 交 BC 于 P，过 D 作 $DF\perp AP$ 于 F, 故 $PA+PD$ 此时最小.

由 $BE=AD=2$，$EC=3$，则可得：$DE=4$，$\therefore DD'=8$, 则 $AD'=2\sqrt{17}$.

又$\because AD'\cdot DF=AD\cdot DD'$, 则 $DF=\dfrac{8}{17}\sqrt{17}$.



9. 提示：过 P 点作 $PQ\perp BG$ 于 Q，证明 $PE=BQ$.

10. 提示：连结 DF 并延长交于 BC 于 H，则 $GF=\dfrac{1}{2}BH$，$AD=CH$. 11. 略

12. (1)$\sqrt{3}$

(2)①当点 N 在线段 AD 上运动时，$\triangle PMN$ 形状不发生改变，其周长为$\sqrt{3}+\sqrt{7}+4$.

②当点在线段 DC 上运动时，$\triangle PMN$ 的形状发生改变，但 $\triangle MNC$ 恒为等边三角形，过 E 作 $EG\perp BC$ 于 G。

当 $PM=PN$ 时，$x=EP=GM=BC-BG-MC=6-1-3=2$；

当 $PM=MN$ 时，$x=EP=GM=6-1-\sqrt{3}=5-\sqrt{3}$；

当 $PN = MN$ 时，$x = EP = GM = 6 - 1 - 1 = 4$

B 级

1. 4　　**2.** 5cm

3. 10.5　提示：以 7，14 作两底的梯形中位线最长

4. 6：4：6：9　　5. B　　6. A　　7. D

8. C　提示：连结 AN，DN，则 $AB^2 + BN^2 = CN^2 + DC^2$，而 $CN = BC - BN$

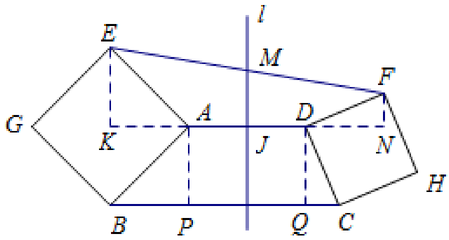
9. 提示：连结 DM，AM，延长 DM 交 AB 的延长线于 P，则 $S_{梯形ABCD} = S_{DADP}$，

又 $S_{DPAD} = 2S_{DADM} = 2创\frac{1}{2}AD \quad MN = MN? AD$

10. 如图，过 A，D 分别作 AP，DQ 垂直于 AD，分别交 BC 于 P，Q，过 E、F 分别

作 AD 所有直线于 K，N，可证明 $AP = DQ = AK = DN$，$JK = JN$。

$\because EK \,//\, MJ \,//\, FN$，\ $EM = MF$



11. $30\sqrt{2}$　提示：设梯形的高为 x，则基其两条对角线分别为 $m = \sqrt{x^2 + 9}$ 与 $n = \sqrt{x^2 + 49}$，

于是 $x^2 + 9$ 与 $x^2 + 49$ 都是完全平方数，即 m^2 与 n^2 都是完全平方数，从而 $n^2 - m^2 = 40$

即 $(n+m)(n-m) = 2^3 ? 5$，又 $n+m$ 与 $n-m$ 的奇偶性相同，因此，得 $n+m = 20$，

$n - m = 2$ 或 $n+m = 10$，$n - m = 4$

12.（1）$k = 8$

（2）由（1）知 $AO = BD = 1.5$；则 P 点到达终点时所有用时间为：$t_p = \frac{13.5}{0.5} = 27s$，

同理：$t_Q = \frac{26.5}{1.5} = 11s$，\ $t_p = t_Q$。$\because 0.5? 11 \quad 5.5 < 12$，\ P 只可能在 AB 上

设经过 ts，四边形 $PQCB$ 为等腰梯形，则 $CQ = 1.5t$，$AP = 0.5t$，

由题意可知：$1.5t = 12 - 0.5t + 2$，解得 $t = 7s$

（3）存在，M 点为连结两腰中点线段的中点，$M(\frac{31}{4}，\frac{3}{4})$，$CM=\frac{15}{4}\sqrt{2}$