一元二次方程（二） 答案与解析

八、根的判别式

1、关于 x 的一元二次方程（x+2）（x－2）＝2x－4 的根的情况是（　　）

A．有两个不相等的实数根

B．有两个相等的实数根

C．只有一个实数根

D．没有实数根

【思路点拨】先把方程化为一般式，然后计算根的判别式，再根据根的判别式的意义判断方程根的情况．

【规范解答】解：（x+2）（x－2）＝2x－4，

$x^2-4=2x-4$，

$x^2-2x=0$，

∵△＝（－2）^{2}－4×1×0＝4＞0，

∴方程有两个不相等的实数根．

故选：A.

【考点评析】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根与△＝b^2-4ac 有如下关系：当△＞0 时，方程有两个不相等的实数根；当△＝0 时，方程有两个相等的实数根；当△＜0 时，方程无实数根．

2、已知关于 x 的方程 b（x^2－1）+2ax+c（x^2+1）＝0，其中 a，b，c 分别为△ABC 三边的长．

（1）若 x＝－1 是方程的根，试判断△ABC 的形状；

（2）若方程有两个相等的实数根，试判断△ABC 的形状．

【思路点拨】（1）把 x＝1 是一元二次方程 b（x^2－1）+2ax+c（x^2+1）＝0，得出 a＝c，即可得出三角形的形状；

（2）根据方程有两个相等的实数根，得出 $4a^2+4$（b+c）（b－c）＝0,，即可得出 $a^2+b^2=c^2$，说明三角形为直角三角形．

【规范解答】解：（1）∵x＝－1 是一元二次方程 b（x^2－1）+2ax+c（x^2+1）＝0 的根，

∴－2a+2c＝0，

∴a＝c，

∴△ABC 为等腰三角形．

（2）∵b（（x^2－1）+2ax+c（x^2+1）＝0，

∴（b+c）x^2+2ax+（c－b）＝0，

∵方程有两个相等的实数根，

∴$\Delta=4a^2+4(b+c)(b-c)=0$，

∴$a^2+b^2=c^2$，

∴$\triangle ABC$为直角三角形．

【考点评析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，等腰三角形的判定，勾股定理逆定理的应用，根据一元二次方程根的情况，得出 a、b、c 之间的关系，是解题的关键．

3、已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中 a，b，c 分别为$\triangle ABC$三边的长．

（1）如果 $x=-1$ 是方程的根，试判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由；

（2）如果方程有两个相等的实数根，试判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由；

（3）如果$\triangle ABC$是等边三角形，试求这个一元二次方程的根．

【思路点拨】（1）把 $x=-1$ 代入方程得 $a+c-2b+a-c=0$，整理得 $a=b$，从而可判断三角形的形状；

（2）根据判别式的意义得$\Delta=(2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$，即 $b^2+c^2=a^2$，然后根据勾股定理可判断三角形的形状；

（3）利用等边三角形的性质得 $a=b=c$，方程化为 $x^2+x=0$，然后利用因式分解法解方程．

【规范解答】解：（1）$\triangle ABC$是等腰三角形；

理由：把 $x=-1$ 代入方程得 $a+c-2b+a-c=0$，则 $a=b$，所以$\triangle ABC$为等腰三角形；

（2）$\triangle ABC$为直角三角形；

理由：根据题意得$\Delta=(2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$，即 $b^2+c^2=a^2$，所以$\triangle ABC$为直角三角形；

（3）∵$\triangle ABC$为等边三角形，

∴$a=b=c$，

∴方程化为 $x^2+x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-1$．

【考点评析】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根与$\Delta=b^2-4ac$有如下关系：当$\Delta>0$时，方程有两个不相等的实数根；当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根；当$\Delta<0$时，方程无实数根．

4、已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m-1)x+3=0$．

（1）当 $m=2$ 时，判断方程根的情况；

（2）当 $m=-2$ 时，求出方程的根．

【思路点拨】（1）把 $m=2$ 代入方程，根据根的判别式判断方程根的情况；

（2）把 $m=-2$ 代入方程，解方程即可．

【规范解答】解：（1）当 $m=2$ 时，方程为 $x^2-3x+3=0$，

$\Delta=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$，

∴此方程没有实数根；

（2）当 $m=-2$ 时，方程为 $x^2+5x+3=0$，

$\Delta=25-12=13>0$，

∴方程有两个不相等的实数根，

∴$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$，

故方程的根为 $x_1=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$.

【考点评析】本题考查了根的判别式，掌握一元二次方程根的判别式大于 0，方程有两个不相等的实数根是解题的关键.

九、根与系数的关系

1、对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），下列说法：

①若 $a+b+c=0$，则方程必有一根为 $x=1$；

②若方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实根，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根；

③若方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）两根为 x_1，x_2 且满足 $x_1\neq x_2\neq0$，则方程 $cx^2+bx+a=0$（$c\neq0$），必有实根 $\dfrac{1}{x_1}$，$\dfrac{1}{x_2}$；

④若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $b^2-4ac=(2ax_0+b)^2$.

其中正确的（　　）

A. ①②　　B. ①④　　C. ②③④　　D. ①③④

【思路点拨】①由 $a+b+c=0$，可得出 $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解；

②由方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实根，可得出 $\Delta=-4ac>0$，结合偶次方的非负性，可得出 $\Delta=b^2-4ac>0$，进而可得出方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根；

③由根与系数的关系，可得 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，变形得出 $-\dfrac{b}{c}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{x_1x_2}=\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}$，即可得出方程 $cx^2+bx+a=0$（$c\neq0$），必有实根 $\dfrac{1}{x_1}$，$\dfrac{1}{x_2}$；

④利用求根公式，可得出 $x_0=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，变形后即可得出 $b^2-4ac=(2ax_0+b)^2$.

【规范解答】解：①∵$a+b+c=0$，

∴当 $x=1$ 时，$ax^2+bx+c=a+b+c=0$，

∴$x=1$ 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一根，故说法①正确；

②∵方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实根，

∴﹣$4ac>0$，

∴$b^2-4ac>0$，

∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根，故说法②错误；

③∵若方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）两根为 x_1，x_2 且满足 $x_1\neq x_2\neq0$，

∴$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，

∴$-\frac{b}{c}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，$\frac{a}{c}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}$，

∴方程 $cx^2+bx+a=0$（$c\neq0$），必有实根$\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$，故说法③正确；

④∵x_0是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

∴$x_0=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

∴$\pm\sqrt{b^2-4ac}=2ax_0+b$，

∴$b^2-4ac=(2ax_0+b)^2$，故说法④正确．

∴正确的结论有①③④．

故选：*D*.

【考点评析】本题考查了根的判别式、根与系数的关系、等式的性质以及一元二次方程的解，逐一分析四条结论的正误是解题的关键．

2、关于 x 的方程：$x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不相等的实数根．

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）用含 k 的代数式表示$|x_1-x_2|$；

（3）设方程的两个实数根分别为 x_1，x_2，是否存在实数 k，使得$|x_1|-|x_2|=\sqrt{3}$？若存在，试求出 k 的值；若不存在，说明理由．

【思路点拨】(1) 由方程根的性质，根据根的判别式，可得到关于 k 的不等式，则可求得 k 的取值范围；

(2) 利用 k 可表示出方程的两根，结合 k 的取值范围可判断出两根的符号，利用求根公式表示出两根，即可求得$|x_1-x_2|$的值；

(3) 在二的结论下代入数据，结合已知条件可得到关于 k 的方程，则可求得 k 的值．

【规范解答】解：(1) ∵原一元二次方程有两个不相等的实数根，

∴$\Delta=(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)>0$，得：$4k-11>0$，

∴ $k>\dfrac{11}{4}$；

（2）由一元二次方程的求根公式得：$x_1=\dfrac{2k-1+\sqrt{4k-11}}{2}$，$x_2=\dfrac{2k-1-\sqrt{4k-11}}{2}$，

∵ $k>\dfrac{11}{4}$，

∴ $2k-1>0$，$\sqrt{4k-11}>0$，

∴ $x_1>0$，

又∵ $x_1\bullet x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$，

∴ $x_2>0$，

$x_1-x_2=\dfrac{2k-1+\sqrt{4k-11}}{2}-\dfrac{2k-1-\sqrt{4k-11}}{2}=\sqrt{4k-11}$；

∵ $k>\dfrac{11}{4}$，

∴ $4k-11>0$，

∴ $|x_1-x_2|=\sqrt{4k-11}$；

（3）当 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{3}$ 时，有 $x_1-x_2=\sqrt{3}$，

即 $\dfrac{2k-1+\sqrt{4k-11}}{2}-\dfrac{2k-1-\sqrt{4k-11}}{2}=\sqrt{4k-11}=\sqrt{3}$，

∴ $4k-11=3$，

∴ $k=\dfrac{7}{2}$，

∴存在实数 $k=\dfrac{7}{2}$，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{3}$．

【考点评析】本题主要考查根的判别式及根与系数的关系，用 k 表示出判别式、表示出两根是解题的关键．

3、已知；关于 x 的方程 $x^2+kx-1=0$，

（1）求证；无论 k 为何值时，方程始终有两个不相等的实数根；

（2）若 $k=2$，且方程的两个根分别是 α 与 β，求 $\alpha+\beta-\alpha\beta$ 的值．

【思路点拨】（1）根据根的判别式>0，即可得证；

（2）根据根与系数的关系可得 $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-1$，化简所求式并代入可解答．

【规范解答】（1）证明：∵ $\Delta=k^2-4\times1\times(-1)=k^2+4>0$，

∴无论 k 为何值时，方程始终有两个不相等的实数根；

（2）解：当 $k=2$ 时，方程为：$x^2+2x-1=0$，

∵方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根分别是 α 与 β，

∴$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-1$，

∴$\alpha+\beta-\alpha\beta=-2+1=-1$．

【考点评析】本题考查了一元二次方程根与系数的关系，根的判别式，熟练掌握根与系数的关系是解题的关键．

十、由实际问题抽象出一元二次方程

1、如图，有一块长 50 米，宽 25 米的矩形空地，现要在空地内开辟两横三纵共五条等宽人行通道，且通道面积为 249 平方米．设人行通道的宽为 x 米，则下列方程正确的是（　　）

A．$2\times50x+3x(25-x)=249$

B．$3\times25x+2x(50-2x)=249$

C．$(50-2x)(25-3x)=50\times25-249$

D．$(50-3x)(25-2x)=50\times25-249$

【思路点拨】利用平移的性质，把两横三纵共五条等宽人行通道分别移到矩形的上边和左边，可得空地为一个矩形，根据空地的面积为 $50\times25-249$ 列出方程即可．

【规范解答】解：根据题意可得：$(50-3x)(25-2x)=50\times25-249$．

故选：D．

【考点评析】此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程，利用平移的性质得出是解题关键．

2、《算学宝鉴》中记载了我国南宋数学家杨辉提出的一个问题："直田积八百六十四步，之云阔不及长一十二步，问阔及长各几步？"译文："一个矩形田地的面积等于 864 平方步，且它的宽比长少 12 步，问长与宽各是多少步？"若设矩形田地的长为 x 步，则可列方程为　$x(x-12)=864$　．

【思路点拨】如果设矩形田地的长为 x 步，那么宽就应该是 $(x-12)$ 步，根据面积为 864，即可得出方程．

【规范解答】解：设矩形田地的长为 x 步，那么宽就应该是 $(x-12)$ 步．

根据矩形面积＝长×宽，得：$x(x-12)=864$．

故答案为：$x(x-12)=864$．

【考点评析】本题为面积问题，考查了由实际问题抽象出一元二次方程，掌握好面积公式即可进行正确解答；矩形面积＝矩形的长×矩形的宽．

3、某一皮衣专卖店销售某款皮衣，其进价为每件 750 元，经市场调查发现，按每件 1100 元出售，平均每

天可售出 30 件，每件降价 50 元，平均每天的销售量可增加 10 件，皮衣专卖店若想要平均每天获利 12000 元，则每件皮衣定价为多少元？

（1）以下是小明和小红的两种不同设法，请帮忙填完整：

小明：设每件皮衣降价 x 元，由题意，可列方程：__$(1100-x-750)(30+x\div50\times10)=12000$__．

小红：设每件皮衣定价为 y 元，由题意，可列方程：__$(y-750)(30+\frac{1100-y}{50}\times10)=12000$__．

（2）请写出一种完整的解答过程．

【思路点拨】（1）根据总利润＝每件皮衣的利润×销售数量，即可得出关于 x（y）的一元二次方程；

（2）选择小明（小红）的设法，解方程即可求出结论．

【规范解答】解：（1）小明：设每件皮衣降价 x 元，则平均每天的销售量为（$30+x\div50\times10$）件，

依题意，得：$(1100-x-750)(30+x\div50\times10)=12000$；

小红：设每件皮衣定价为 y 元，则平均每天的销售量为（$30+\frac{1100-y}{50}\times10$）件，

依题意，得：$(y-750)(30+\frac{1100-y}{50}\times10)=12000$.

故答案为：$(1100-x-750)(30+x\div50\times10)=12000$；$(y-750)(30+\frac{1100-y}{50}\times10)=12000$.

（2）选择小明的设法，则 $(1100-x-750)(30+x\div50\times10)=12000$，

整理，得：$x^2-200x+7500=0$，

解得：$x_1=50$，$x_2=150$，

∴$1100-x=1050$ 或 950.

答：每件皮衣定价为 1050 元或 950 元.

选择小红的设法，则 $(y-750)(30+\frac{1100-y}{50}\times10)=12000$，

整理，得：$y^2-2000y+997500=0$，

解得：$y_1=1050$，$y_2=950$.

答：每件皮衣定价为 1050 元或 950 元.

【考点评析】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

4、百货大楼服装柜销售中发现："宝乐"牌童装平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元．为了迎接"十•一"国庆节，商场决定采取适当的降价措施，扩大销售量，增加盈利，尽快减少库存．经市场调查发现：如果每件童装降价 1 元，那么平均每天就可多售出 2 件，要使平均每天销售这种童装盈利 1200 元，那么每件童装应降价多少元？

请先填空后再列方程求解：设每件童装降价 __x__ 元，那么平均每天就可多售出 __$2x$__ 件，

现在一天可售出 __$20+2x$__ 件，每件盈利 __$40-x$__ 元．

【思路点拨】设每件童装降价 x 元，那么平均每天就可多售出 $2x$ 元，根据平均每天销售这种童装盈利 1200 元，即销量×每件的利润＝1200 元，即可列出方程.

【规范解答】解：设每件童装降价 x 元，那么平均每天就可多售出 $2x$ 元，

∵平均每天销售这种童装盈利 1200 元，

∴（40﹣x）（20+2x）＝1200

即：x^2﹣30x+200＝0

解得：x_1＝10，x_2＝20

∵要扩大销售量，减少库存

∴舍去 x_1＝10

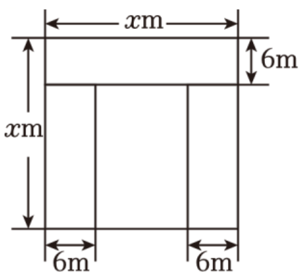
∴每件童装应降价 20 元.

故答案为：x，2x，20+2x，40﹣x.

【考点评析】本题主要考查一元二次方程的应用，要根据题意列出平均每天就可多售出的件数，再根据题意列出现在一天可售出的件数及每件盈利的总钱数，找出题中的等量关系列出方程求解即可.

十一、一元二次方程的应用

1、为了喜迎元旦，某区筹备了精彩的文艺演出，筹办组在一块正方形的广场空地上搭建舞台，并设计了如图所示的方案，其中阴影部分为舞台．舞台区域的宽均为 6 米，中间空白的面积为 216 平方米，若设正方形空地的边长为 x 米，则可列方程 ＿（x﹣6）（x﹣6﹣6）＝216＿.



【思路点拨】若设正方形空地的边长为 x 米，则中间空白的长为（x﹣6）米，宽为（x﹣6﹣6）米，根据长方形面积公式即可列出方程.

【规范解答】解：根据题意，得（x﹣6）（x﹣6﹣6）＝216，

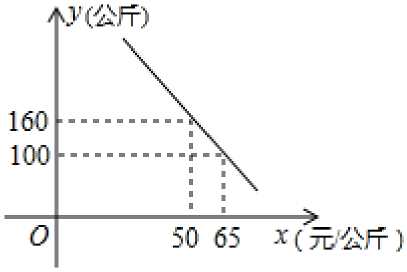
故答案为：（x﹣6）（x﹣6﹣6）＝216.

【考点评析】本题考查一元二次方程的应用，能列出方程是解题的关键.

2、为提高农民收入，某区一水果公园引进一种新型蟠桃，蟠桃进价为每公斤 40 元．上市后通过一段时间的试营销发现：当蟠桃销售单价在每公斤 40 元至 90 元之间（含 40 元和 90 元）时，每月的销售量 y（公斤）与销售单价 x（元/公斤）之间的关系可近似地看作一次函数，其图象如图所示.

（1）求 y 与 x 的函数解析式，并写出定义域；

（2）如果想要每月获得 2400 元的利润，那么销售单价应定为每公斤多少元．



【思路点拨】（1）利用待定系数法确定函数解析式；根据函数图象确定定义域；

（2）根据利润＝实际售价﹣进价求得答案．

【规范解答】解：（1）由题意列方程组$\begin{cases}50k+b=160\\65k+b=100\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-4\\b=360\end{cases}$．

则 y 与 x 的函数解析式是 $y=-4x+360$（$40\leqslant x\leqslant 90$）．

（2）由题意，得（$x-40$）$y=2400$．

代入，得（$x-40$）（$-4x+360$）$=2400$．

解得 $x_1=60$，$x_2=70$．

答：销售单价应定为每公斤 60 元或 70 元．

【考点评析】本题考查了二元一次方程组的应用和一次函数的应用．解题关键是弄清题意，合适的等量关系，列出方程组．

3、由于新冠疫情的影响，口罩需求量急剧上升，经过连续两次价格的上调，口罩的价格由每包 10 元涨到了每包 16.9 元．

（1）求出这两次价格上调的平均增长率；

（2）在有关部门大力调控下，口罩价格还是降到了每包 10 元，而且调查发现，定价为每包 10 元时，一天可以卖出 30 包，每降价 1 元，可以多卖出 5 包．当销售额为 315 元时，且让顾客获得更大的优惠，应该降价多少元？

【思路点拨】（1）设这两次价格上调的平均增长率为 x，利用经过两次上调价格后的价格＝原价×（1+这两次价格上调的平均增长率）^{2}，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

（2）设每包应该降价 m 元，则每包的售价为（$10-m$）元，每天可售出（$30+5m$）包，根据每天该口罩的销售额为 315 元，即可得出关于 m 的一元二次方程，解之即可得出 m 的值，再结合要让顾客获得更大的优惠，即可得出每包应该降价 3 元．

【规范解答】解：（1）设这两次价格上调的平均增长率为 x，

依题意得：$10(1+x)^2=16.9$，

解得：$x_1=0.3=30\%$，$x_2=-2.3$（不符合题意，舍去）．

答：这两次价格上调的平均增长率为30%．

（2）设每包应该降价m元，则每包的售价为$(10-m)$元，每天可售出$(30+5m)$包，

依题意得：$(10-m)(30+5m)=315$，

整理得：$m^2-4m+3=0$，

解得：$m_1=1$，$m_2=3$．

又∵要让顾客获得更大的优惠，

∴m的值为3．

答：每包应该降价3元．

【考点评析】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键

vv