一元二次方程（一） 答案与解析

一、一元二次方程的解

1、若关于 x 的一元二次方程 $kx^2+x-3=0$ 的一个根是 1，则 k 的值为（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

【思路点拨】根据一元二次方程 $kx^2+x-3=0$ 的一个根是 1，可以计算出 k 的值.

【规范解答】解：∵一元二次方程 $kx^2+x-3=0$ 的一个根是 1，

∴$k\times1^2+1-3=0$，

解得 $k=2$，

故选：C.

【考点评析】本题考查一元二次方程的解，解答本题的关键是明确方程的解一定使得原方程成立.

2、已知 $x=1$ 是方程 $x^2+mx-3=0$ 的一个根，则 m 的值为__2__.

【思路点拨】将 $x=1$，代入方程 $x^2+mx-3=0$ 得到有关 m 的方程，求出 m 的值即可.

【规范解答】解：∵$x=1$ 是方程 $x^2+mx-3=0$ 的一个根，

∴将 $x=1$，代入方程 $x^2+mx-3=0$ 得：$1+m-3=0$，

∴$m=2$，

故答案为：2.

【考点评析】此题主要考查了一元二次方程的解，由方程的根为 $x=1$，代入方程是解决问题的关键.

3、（1）$3\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{48}$；

（2）先化简，再求值：$\frac{m-3}{3m^2-6m}\div(m+2-\frac{5}{m-2})$，其中 m 是方程 $x^2+3x-4=0$ 的根.

【思路点拨】（1）先化简各二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并；

（2）将式子括号内通分，并将分子分母因式分解，再进行约分化简，然后根据一元二次方程的根的定义得出 $m(m+3)=4$，代入化简的式子即可求解.

【规范解答】解：（1）$3\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{48}$

$=3\sqrt{3\times2^2}-6\sqrt{\frac{3}{9}}+\sqrt{3\times4^2}$

$=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$

$=8\sqrt{3}$.

（2）$\frac{m-3}{3m^2-6m}\div(m+2-\frac{5}{m-2})$

$=\frac{m-3}{3m(m-2)}\div\frac{m^2-4-5}{m-2}$

$=\frac{m-3}{3m(m-2)}\times\frac{m-2}{(m+3)(m-3)}$

$=\frac{1}{3m(m+3)}$，

∵m是方程 $x^2+3x-4=0$ 的根，

∴$m^2+3m-4=0$，即 $m(m+3)=4$，

∴原式$=\frac{1}{3m(m+3)}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}$.

【考点评析】本题考查了二次根式的加减运算，分式的化简求值及一元二次方程的解的定义，熟练掌握二次根式加减法运算法则及分式的混合运算法则是解题关键.

4、已知关于 x 的方程 $x^2-2016x+m^2-3m=0$ 的一个根与关于 x 的方程 $x^2+2016x-m^2+3m=0$ 的一个根互为相反数，求 m 的值.

【思路点拨】设这两个方程的根分别为 a 和 $-a$，把 $x=a$ 代入方程 $x^2-2016x+m^2-3m=0$，得 $a^2-2016a+m^2-3m=0$①；再把 $x=-a$ 代入方程 $x^2+2016x-m^2+3m=0$，得 $a^2-2016a-m^2+3m=0$②，①-②消去 a 得：$2m^2-6m=0$，解方程即可求出 m 的值.

【规范解答】解：设这两个方程的根分别为 a 和 $-a$.

把 $x=a$ 代入方程 $x^2-2016x+m^2-3m=0$，得 $a^2-2016a+m^2-3m=0$①；

再把 $x=-a$ 代入方程 $x^2+2016x-m^2+3m=0$，得 $a^2-2016a-m^2+3m=0$②，

①-②消去 a 得：$2m^2-6m=0$，解得 $m=3$ 或 $m=0$.

【考点评析】本题考查了一元二次方程的解，方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值.

二、解一元二次方程-直接开平方法

1、关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=2$，$x_2=-1$（a，b，m 均为常数，且 $a\neq0$），则 $a(2x+m-1)^2+b=0$ 的解是__$x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=0$__.

【思路点拨】把方程 $a(2x+m-1)^2+b=0$ 看作关于 $2x-1$ 的一元二次方程，则 $2x-1=2$ 或 $2x-1=-1$，然后解两个一次方程即可.

【规范解答】解：把方程 $a(2x+m-1)^2+b=0$ 变形为 $a[(2x-1)+m]^2+b=0$，

∵关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=2$，$x_2=-1$，

∴$2x-1=2$ 或 $2x-1=-1$，

∴$x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=0$.

故答案为 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=0$.

【考点评析】本题考查了解一元二次方程-直接开平方法：形如 $x^2=p$ 或 $(nx+m)^2=p$（$p\geq0$）的一元

二次方程可采用直接开平方的方法解一元二次方程．

2、若一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$，求$\frac{b}{a}$的值．

【思路点拨】由 $ax^2=b$ 利用直接开平方法得 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，又方程的两个根互为相反数，所以 $m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$，则方程的两个根分别是 2 与 -2，据此求$\frac{b}{a}$的值即可．

【规范解答】解：∵$ab>0$，$a\neq0$，

∴$b\neq0$．

给方程 $ax^2=b$ 两边同时除以 a 得 $x^2=\frac{b}{a}$，

∴$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$．

∵方程的两个根互为相反数，

∴$m+1+2m-4=0$，

∴$m=1$．

∴一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 2 与 -2．

又∵$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，

∴$\sqrt{\frac{b}{a}}=2$，

∴$\frac{b}{a}=4$．

【考点评析】本题考查代数式求值，熟练运用直接开方法解一元二次方程是解答关键；

3、(1) 计算：$\sqrt{18}\times\sqrt{\frac{1}{3}}\div\sqrt{6}$．

(2) 计算：$(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$．

(3) 求方程 $(x+5)^2=12$ 的解．

【思路点拨】(1) 先化简个二次根式、将除法转化为乘法，再计算乘法即可；

(2) 先利用平方差公式和完全平方公式计算，再去括号、计算加减即可；

(3) 两边直接开平方即可．

【规范解答】解：(1) 原式$=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}$

$=1$；

(2) 原式$=5-1-(3-2\sqrt{6}+2)$

$=5-1-3+2\sqrt{6}-2$

$=2\sqrt{6}-1$；

（3）∵（x+5）^{2}＝12，

∴x+5＝±$2\sqrt{3}$，

∴x_1＝－5+$2\sqrt{3}$，x_2＝－5－$2\sqrt{3}$．

【考点评析】本题主要考查二次根式的混合运算和解一元二次方程的能力，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键．

4、已知关于 x 的方程 a（x+m）^{2}+b=0（a、b、m 为常数，a≠0）的解是 x_1＝2，x_2＝－1，那么方程 a（x+m+2）^{2}+b=0 的解__x_3＝0，x_4＝－3__．

【思路点拨】把后面一个方程中的 x+2 看作整体，相当于前面一个方程中的 x 求解．

【规范解答】解：∵关于 x 的方程 a（x+m）^{2}+b=0 的解是 x_1＝2，x_2＝－1，（a，m，b 均为常数，a≠0），

∴方程 a（x+m+2）^{2}+b=0 变形为 a[（x+2）+m]^2+b=0，即此方程中 x+2＝2 或 x+2＝－1，

解得 x=0 或 x=－3．

故答案为：x_3＝0，x_4＝－3．

【考点评析】此题主要考查了方程解的定义．注意由两个方程的特点进行简便计算．

三、解一元二次方程-配方法

1、用配方法将方程 x^2－4x+3=0 化成（x－a）^{2}＝b 的形式，则 a－b 的值是（　　）

A．1　　B．－1　　C．3　　D．－3

【思路点拨】把已知方程配方，求出 a，b 的值，再代入计算即可．

【规范解答】解：∵x^2－4x+3=0，

∴（x－2）^{2}=1，

∴a=2，b=1，

∴a－b=2－1=1，

故选：A．

【考点评析】本题考查配方法解一元二次方程，解题的关键是掌握配方法．

2、计算：

（1）解方程：3x^2－6x－2=0；

（2）$\left(\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{3}{x-1}$．

【思路点拨】（1）把二次项系数化为 1，再利用配方法求解即可；

（2）先运用平方差公式和完全平方公式对分式进行变形；再进行约分求出结果．

【规范解答】解：（1）$3x^2-6x-2=0$，

$x^2-2x-\frac{2}{3}=0$，

$x^2-2x=\frac{2}{3}$，

$x^2-2x+1=\frac{2}{3}+1$，

$(x-1)^2=\frac{5}{3}$，

$x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$，

$x=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}+1$，

$x_1=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{15}}{3}$．

（2）$\left(\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{3}{x-1}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\div\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x-1}\div\frac{3}{x-1}$

$=\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x-1}{3}-\frac{1}{x-1}\times\frac{x-1}{3}$

$=\frac{x+1}{3}-\frac{1}{3}$

$=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}x$

【考点评析】本题考查配方法和分式的混合运算，解题的关键是运用公式法和计算法则来解答．

3、解下列方程：

（1）$x^2-6x-9=0$；

（2）$\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$．

【思路点拨】（1）利用配方法即可求解；

（2）将分式方程化为整式方程即可求解．

【规范解答】解：（1）移项：$x^2-6x=9$，

配方：$x^2-6x+9=18$，即 $(x-3)^2=18$，

$\therefore x-3=\pm3\sqrt{2}$，

$x_1=3-3\sqrt{2}$，$x_2=3+3\sqrt{2}$；

（2）方程两边同时乘以：$(x+2)(x-2)$ 得：

$(x-2)^2-(x+2)^2=16$，

化简：$-8x=16$，

解得：$x=-2$，

检验：当 $x=-2$ 时，$(x+2)(x-2)=0$，$x=-2$ 是增根，原方程无解.

【考点评析】本题考查利用配方法解一元二次方程、解分式方程等．掌握各求解方法是解题关键.

4、(1) 计算：$(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})-2\sqrt{(-2)^2}+(\sqrt{10}-3)^0$

(2) 解方程 $x^2-4x+5=0$

【思路点拨】(1) 先算乘方和开方，再算乘法，最后算加减即可；

(2) 先求出 b^2-4ac 的值，再判断即可.

【规范解答】解：(1) 原式$=5-3-4+1$

$=-1$；

(2) $x^2-4x+5=0$，

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times5=-1<0$，

所以此方程无实数根.

【考点评析】本题考查了解一元二次方程、零指数幂、平方差公式、二次根式的混合运算，能求出每一部分的值是解（1）的关键，能熟记公式是解（2）的关键.

四、解一元二次方程-公式法

1、用公式法解一个一元二次方程的根为 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2+4\times3\times1}}{2\times3}$，则此方程的二项式系数，一次项系数，常数项分别为（　　）

A. 3，5，-1　　B. -3，-5，1　　C. 3，-5，1　　D. -3，5，-1

【思路点拨】根据一元二次方程求根公式即可求得.

【规范解答】解：∵用公式法解一个一元二次方程的根为 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2+4\times3\times1}}{2\times3}$，

根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，可得 $a=3$，$b=5$，$c=-1$，

∴此方程的二项式系数，一次项系数，常数项分别为 3，5，-1；

故选 *A*.

【考点评析】本题考查一元二次方程求根公式的使用，解题关键是一元二次方程的求根公式.

2、解方程

（1）$2x^2+4x+1=0$（配方法）

（2）$x^2+6x=5$（公式法）

【思路点拨】（1）配方法求解可得；

（2）公式法求解可得．

【规范解答】解：（1）$2x^2+4x=-1$，

$x^2+2x=-\frac{1}{2}$，

$x^2+2x+1=-\frac{1}{2}+1$，即（$x+1$）$^2=\frac{1}{2}$，

∴ $x+1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $x=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $x_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）$x^2+6x-5=0$，

∵ $a=1$，$b=6$，$c=-5$，

∴ $\Delta=36-4\times1\times(-5)=56$，

则 $x=\frac{-6\pm2\sqrt{14}}{2}=-3\pm\sqrt{14}$，

$x_1=-3+\sqrt{14}$，$x_2=-3-\sqrt{14}$．

【考点评析】本题考查了一元二次方程的解法．解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，要根据方程的特点灵活选用合适的方法．

3、已知关于 x 的一元二次方程（$a+b$）x^2-2cx+（$a-b$）$=0$，其中 a，b，c 分别为△ABC 三边的长．

（1）如果 $x=1$ 是方程的一个根，试判断△ABC 的形状，并说明理由；

（2）如果△ABC 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根．

【思路点拨】（1）把 $x=1$ 代入方程，整理后得出 $a-c=0$，求出 $a=c$，根据等腰三角形的判定得出即可；

（2）根据等边三角形的性质得出 $a=b=c$，代入方程得出 $x^2-x=0$，再求出方程的解即可．

【规范解答】解：（1）△ABC 是等腰三角形，

理由：∵ $x=1$ 是方程的根，

∴（$a+b$）$-2c+$（$a-b$）$=0$，

∴$a+b-2c+a-b=0$，

∴$a-c=0$，

∴$a=c$，

∴△ABC是等腰三角形；

（2）如果△ABC是等边三角形，则 $a=b=c$，

原方程可化为：$2ax^2-2ax=0$，

∴$x^2-x=0$，

解得：$x_1=0$，$x_2=1$.

【考点评析】本题考查了等腰三角形的判定，等边三角形的性质，一元二次方程的解和解一元二次方程等知识点，能熟记等腰三角形的判定定理和等边三角形的性质是解此题的关键.

4、已知关于 x 的方程（a^2-4a+5）$x^2+2ax+4=0$，

（1）证明：当 a 取任何实数时，方程都是一元二次方程；

（2）当 $a=2$ 时，解这个方程.

【思路点拨】（1）要证明无论 a 取何实数这个方程都是一元二次方程，只要说明无论 a 为什么值时 a^2-4a+5 的值都不是 0，可以利用配方法来证明；

（2）当 $a=2$ 时，就可以求出方程的具体形式，解方程就可求出方程的解.

【规范解答】（1）证明：$a^2-4a+5=(a^2-4a+4)+1=(a-2)^2+1$，

∵$(a-2)^2\geqslant0$，

∴$(a-2)^2+1\neq0$，

∴无论 a 取何实数关于 x 的方程（a^2-4a+5）$x^2+2ax+4=0$ 都是一元二次方程；

（2）解：当 $a=2$ 时，原方程变为 $x^2+4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=-2$.

【考点评析】本题主要理解配方法，证明一个二次三项式大于或小于 0 的方法.

五、解一元二次方程-因式分解法

1、三角形两边长分别为 2 和 4，第三边是方程 $x^2-11x+30=0$ 的解，则这个三角形的周长是（　　）

A. 11　　B. 11 或 12　　C. 12　　D. 10

【思路点拨】根据一元二次方程的解法即可求出第三边，然后根据三角形的三边关系即可求出周长.

【规范解答】解：由 $x^2-11x+30=0$，

解得：$x=6$ 或 $x=5$，

当第三边长为 6 时，

由三角形三边关系可知：2+4＝6，

故不能组成三角形，

当第三边为 5 时，

由三角形三边关系可知：4+2＞5，能够组成三角形，

∴这个三角形的周长为：2+4+5＝11，

故选：*A*.

【考点评析】本题考查一元二次方程的解法，解题的关键是求出利用三角形三边关系求出第三边长.

2、一个三角形两边长分别为 3 和 5，第三边长是方程 $x^2-8x+12=0$ 的根，则该三角形的周长为 ＿14＿.

【思路点拨】先利用因式分解法求出方程的两根，再结合构成三角形的条件求出第三边的长即可得到答案.

【规范解答】解：∵$x^2-8x+12=0$，

∴（$x-2$）（$x-6$）＝0，

∴$x-2=0$ 或 $x-6=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=6$，

当 $x=6$ 时，三角形三边长为 3，5，6，能构成三角形，则三角形周长为 3+5+6＝14；

当 $x=2$ 时，三角形三边长为 3，5，2，

∵3+2＝5，

∴不能构成三角形；

综上所述，该三角形的周长为 14，

故答案为：14.

【考点评析】本题主要考查了解一元二次方程﹣因式分解法，构成三角形的条件，正确求出方程的两个根是解题的关键.

3、解方程：

（1）$2x^2-8=0$；

（2）$\frac{6}{x-2}=\frac{x}{x+3}-1$；

（3）$3x^2-6x+2=0$；

（4）$3x(x-1)=2(x-1)$.

【思路点拨】（1）利用直接开平方法求解即可；

（2）先把分式方程化为整式方程，然后解方程，最后检验即可；

（3）利用配方法求解即可；

（4）利用因式分解法求解即可．

【规范解答】解：（1）$2x^2-8=0$，

$x^2=4$，

∴$x_1=2$，$x_2=-2$；

（2）$\frac{6}{x-2}=\frac{x}{x+3}-1$，

去分母得：$6(x+3)=x(x-2)-(x-2)(x+3)$，

整理得：$9x=-12$，

解得：$x=-\frac{4}{3}$，

检验，$x=-\frac{4}{3}$时，$(x-2)(x+3)\neq 0$，

∴原方程的解为$x=-\frac{4}{3}$；

（3）$3x^2-6x+2=0$，

$3x^2-6x=-2$，

$x^2-2x=-\frac{2}{3}$，

$x^2-2x+1=-\frac{2}{3}+1$，即$(x-1)^2=\frac{1}{3}$，

∴$x-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$x_1=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$；

（4）$3x(x-1)=2(x-1)$，

$3x(x-1)-2(x-1)=0$，

$(x-1)(3x-2)=0$，

∴$x-1=0$或$3x-2=0$，

∴$x_1=1$，$x_2=\frac{2}{3}$．

【考点评析】本题主要考查解一元二次方程的能力，根据不同的方程选择合适的方法是解题的关键；也考查了解分式方程的能力．

4、解方程：

（1）$(x-1)^2-8=0$；

（2）$2x^2-5x+3=0$．

【思路点拨】（1）移项后开方即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可．

（2）方程左边分解因式，即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可．

【规范解答】解：（1）移项得：$(x-1)^2=8$，

$x-1=\pm 2\sqrt{2}$，

$x_1=1+2\sqrt{2}$，$x_2=1-2\sqrt{2}$；

（2）$2x^2-5x+3=0$，

$(2x-3)(x-1)=0$，

$2x-3=0$，$x-1=0$，

$x_1=1.5$，$x_2=1$．

【考点评析】本题考查了解一元二次方程－因式分解法，因式分解法就是先把方程的右边化为 0，再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式，那么这两个因式的值就都有可能为 0，这就能得到两个一元一次方程的解，这样也就把原方程进行了降次，把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了（数学转化思想）．也考查了解一元二次方程－直接开平方法．

六、换元法解一元二次方程

1、已知实数 x 满足 $(x^2-2x+1)^2+2(x^2-2x+1)-3=0$，那么 x^2-2x+1 的值为（　　）

A．－1 或 3　　B．－3 或 1　　C．3　　D．1

【思路点拨】设 $x^2-2x+1=a$，则 $(x^2-2x+1)^2+2(x^2-2x+1)-3=$化为 $a^2+2a-3=0$，求出方程的解，再判断即可．

【规范解答】解：设 $x^2-2x+1=a$，

∵ $(x^2-2x+1)^2+2(x^2-2x+1)-3=0$，

∴ $a^2+2a-3=0$，

解得：$a=-3$ 或 1，

当 $a=-3$ 时，$x^2-2x+1=-3$，

即 $(x-1)^2=-3$，此方程无解；

当 $a=1$ 时，$x^2-2x+1=1$，

此时方程有解，

故选：*D*.

【考点评析】本题考查了用换元法解一元二次方程，能正确换元是解此题的关键．

2、阅读理解

解方程时，我们经常将整体多次出现的部分打包进行换元处理，从而达到了降次、转整等目的，这一“神奇”的方法叫换元法.

例如：解方程：$(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$.

解：设 $x^2-x=y$. 原方程化为 $y^2-8y+12=0$. ∴ $(y-2)(y-6)=0$. ∴ $y-2=0$ 或 $y-6=0$. ∴ $y_1=2$，$y_2=6$.

当 $y=2$ 时，即 $x^2-x=2$. ∴ $(x-2)(x+1)=0$，∴ $x-2=0$ 或 $x+1=0$. ∴ $x_1=2$，$x_2=-1$

当 $y=6$ 时，即 $x^2-x=6$. ∴ $(x-3)(x+2)=0$. ∴ $x-3=0$ 或 $x+2=0$. ∴ $x_3=3$，$x_4=-2$. ∴原方程的解是 $x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=3$，$x_4=-2$.

请你利用换元法解方程：$(x^2-7)^2-(x^2-7)-2=0$.

【思路点拨】根据换元法，设 $x^2-7=y$；再对原方程进行变形，求出 y 的值；最后将 y 的值代入 x^2-7 中，求出方程的解.

【规范解答】解：设 $x^2-7=y$.

原方程化为 $y^2-y-2=0$，

∴ $(y-2)(y+1)=0$，

∴ $y-2=0$ 或 $y+1=0$，

$y_1=2$，$y_2=-1$.

当 $y=2$ 时，即 $x^2-7=2$.

∴ $x^2=9$，

∴ $x_1=3$，$x_2=-3$；

当 $y=-1$ 时，即 $x^2-7=-1$.

∴ $x^2=6$，

∴ $x_1=\sqrt{6}$，$x_2=-\sqrt{6}$.

∴原方程的解是 $x_1=3$，$x_2=--3$，$x_3=\sqrt{6}$，$x_4=-\sqrt{6}$.

【考点评析】本题考查了换元法解一元二次方程，解题的关键是用转化的思想来解方程.

3、解答题.

（1）已知 a、b 为实数，且满足 $(a^2+b^2)(a^2+b^2+3)=4$，求 a^2+b^2 的值.

（2）已知△ABC 的三边分别是 a，b，c，且满足 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$，判断△$ABC$ 的形状并说明理由.

【思路点拨】（1）设 $t=a^2+b^2$（$t\geqslant0$），则原方程转化为 $t(t+3)=4$，利用因式分解法解方程即可；

（2）先把前面两项展开得到 $a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+c^2(a-b)=0$，再分组分解，得到公因式 $(a-b)$，则

$ab(a-b)-c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)=0$，所以把等式左边分解得到$(a-b)(ab-ac-bc+c^2)=0$，接着在把中括号内分组分解得到$(a-b)(b-c)(a-c)=0$，然后根据有理数积的性质得到$a-b=0$或$b-c=0$或$a-c=0$，于是根据等腰三角形的判定方法进行判断.

【规范解答】解：(1) 设$t=a^2+b^2$（$t\geqslant 0$），则原方程转化为$t(t+3)=4$，

整理，得$(t+4)(t-1)=0$，

所以$t+4=0$或$t-1=0$.

所以$t=-4$（舍去）或$t=1$.

即$a^2+b^2=1$.

所以a^2+b^2的值为1；

(2) $\triangle ABC$为等腰三角形．理由如下：

$\because a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$，

$\therefore a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+c^2(a-b)=0$，

$\therefore ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)=0$，

$\therefore ab(a-b)-c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)=0$，

$\therefore (a-b)(ab-ac-bc+c^2)=0$，

$\therefore (a-b)[a(b-c)-c(b-c)]=0$，

$\therefore (a-b)(b-c)(a-c)=0$，

$\therefore a-b=0$或$b-c=0$或$a-c=0$，

$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形.

【考点评析】本题考查了换元法解一元二次方程和因式分解的应用，换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理.

4、请阅读下面解方程$(x^2+1)^2-2(x^2+1)-3=0$的过程.

解：设$x^2+1=y$，则原方程可变形为$y^2-2y-3=0$.

解得$y_1=3$，$y_2=-1$.

当$y=3$时，$x^2+1=3$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

当$y=-1$时，$x^2+1=-1$，$x^2=-2$此方程无实数解.

$\therefore$原方程的解为$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$.

我们将上述解方程的方法叫做换元法.

请用换元法解方程：$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2\left(\frac{x}{x-1}\right)-15=0$.

【思路点拨】根据材料的提示，可以利用换元法解答分式方程，注意最后要验根.

【规范解答】解：$(\frac{x}{x-1})^2-2(\frac{x}{x-1})-15=0$，

设$\frac{x}{x-1}=a$，

则 $a^2-2a-15=0$，

解得，$a=-3$ 或 $a=5$，

当 $a=-3$ 时，$\frac{x}{x-1}=-3$，解得，$x=\frac{3}{4}$，经检验 $x=\frac{3}{4}$是分式方程的解，

当 $a=5$ 时，$\frac{x}{x-1}=5$，解得 $x=\frac{5}{4}$，经检验 $x=\frac{5}{4}$是分式方程的解，

∴原分式方程的解是 $x_1=\frac{3}{4}$，$x_2=\frac{5}{4}$.

【考点评析】本题考查换元法解一元二次方程、换元法解解分式方程，解题的关键是明确用换元法解方程的方法.