

## 一元二次方程（一）

## 阅读与思考

一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  中， $b^2 - 4ac$  叫做一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的根的判别式，通常用“ $\Delta$ ”来表示，即  $\Delta = b^2 - 4ac$

(1) 当  $\Delta > 0$  时，一元二次方程有 2 个不相等的实数根；

(2) 当  $\Delta = 0$  时，一元二次方程有 2 个相等的实数根；

(3) 当  $\Delta < 0$  时，一元二次方程没有实数根.

如果一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两个实数根是  $x_1, x_2$ ，那么  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

(注意它的使用条件为  $a \neq 0$ ， $\Delta \geq 0$ )

## 一、一元二次方程的解

1、若关于  $x$  的一元二次方程  $kx^2 + x - 3 = 0$  的一个根是 1，则  $k$  的值为 ( )

- A. -3                      B. -2                      C. 2                      D. 3

2、已知  $x=1$  是方程  $x^2 + mx - 3 = 0$  的一个根，则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

3、(1)  $3\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48}$

(2) 先化简，再求值： $\frac{m-3}{3m^2-6m} \div (m+2-\frac{5}{m-2})$ ，其中  $m$  是方程  $x^2+3x-4=0$  的根.

4、已知关于  $x$  的方程  $x^2 - 2016x + m^2 - 3m = 0$  的一个根与关于  $x$  的方程  $x^2 + 2016x - m^2 + 3m = 0$  的一个根互为相反数，求  $m$  的值.

## 二、解一元二次方程-直接开方法

1、关于  $x$  的方程  $a(x+m)^2 + b = 0$  的解是  $x_1 = 2, x_2 = -1$  ( $a, b, m$  均为常数, 且  $a \neq 0$ ), 则  $a(2x+m-1)^2 + b = 0$  的解是 \_\_\_\_\_.

2、若一元二次方程  $ax^2 = b$  ( $ab > 0$ ) 的两个根分别是  $m+1$  与  $2m-4$ , 求  $\frac{b}{a}$  的值.

3、计算:

$$(1) \sqrt{18} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \div \sqrt{6}$$

$$(2) (\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2.$$

(2) 求方程  $(x+5)^2 = 12$  的解.

4、已知关于  $x$  的方程  $a(x+m)^2+b=0$  ( $a$ 、 $b$ 、 $m$  为常数,  $a \neq 0$ ) 的解是  $x_1=2$ ,  $x_2=-1$ , 那么方程  $a(x+m+2)^2+b=0$  的解\_\_\_\_\_.

### 三、解一元二次方程-配方法

1、配方法将方程  $x^2 - 4x + 3 = 0$  化成  $(x - a)^2 = b$  的形式, 则  $a - b$  的值是 ( )

- A. 1                      B. -1                      C. 3                      D. -3

2、计算:

(1) 解方程:  $3x^2 - 6x - 2 = 0$ ;                      (2)  $(\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x-1}) \div \frac{3}{x-1}$ .

3、解下列方程:

(1)  $x^2 - 6x - 9 = 0$ ;                      (2)  $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4}$ .

4、(1) 计算:  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 2\sqrt{(-2)^2} + (\sqrt{10} - 3)^0$

(2) 解方程  $x^2 - 4x + 5 = 0$

## 四、解一元二次方程-公式法

1、用公式法解一个一元二次方程的根为  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$ ，则此方程的二项式系数，一次项系数，

常数项分别为（ ）

- A. 3, 5, -1      B. -3, -5, 1      C. 3, -5, 1      D. -3, 5, -1

## 2、解方程

(1)  $2x^2 + 4x + 1 = 0$  (配方法)

(2)  $x^2 + 6x = 5$  (公式法)

3、已知关于  $x$  的一元二次方程  $(a+b)x^2 - 2cx + (a-b) = 0$ ，其中  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三边的长.

(1) 如果  $x=1$  是方程的一个根，试判断  $\triangle ABC$  的形状，并说明理由；

(2) 如果  $\triangle ABC$  是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.

4、已知关于  $x$  的方程  $(a^2 - 4a + 5)x^2 + 2ax + 4 = 0$ ,

(1) 证明：当  $a$  取任何实数时，方程都是一元二次方程；

(2) 当  $a=2$  时，解这个方程.

### 五、解一元二次方程-因式分解法

1、三角形两边长分别为 2 和 4，第三边是方程  $x^2 - 11x + 30 = 0$  的解，则这个三角形的周长是 ( )

- A. 11                      B. 11 或 12                      C. 12                      D. 10

2、一个三角形两边长分别为 3 和 5，第三边长是方程  $x^2 - 8x + 12 = 0$  的根，则该三角形的周长为 \_\_\_\_\_.

3、解方程：

(1)  $2x^2 - 8 = 0$ ;

(2)  $\frac{6}{x-2} = \frac{x}{x+3} - 1$ ;

(3)  $3x^2 - 6x + 2 = 0$ ;

(4)  $3x(x-1) = 2(x-1)$ .

4、解方程：

(1)  $(x-1)^2 - 8 = 0$ ;

(2)  $2x^2 - 5x + 3 = 0$ .

## 六、解一元二次方程-换元法

1、已知实数  $x$  满足  $(x^2 - 2x + 1)^2 + 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 0$ ，那么  $x^2 - 2x + 1$  的值为（ ）

- A. -1 或 3      B. -3 或 1      C. 3      D. 1

## 2、阅读理解

解方程时，我们经常将整体多次出现的部分打包进行换元处理，从而达到了降次、转整等目的，这一“神奇”的方法叫换元法。

例如：解方程： $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ 。

解：设  $x^2 - x = y$ 。原方程化为  $y^2 - 8y + 12 = 0$ 。∴  $(y - 2)(y - 6) = 0$ 。∴  $y - 2 = 0$  或  $y - 6 = 0$ 。∴  $y_1 = 2$ ， $y_2 = 6$ 。

当  $y = 2$  时，即  $x^2 - x = 2$ 。∴  $(x - 2)(x + 1) = 0$ ，∴  $x - 2 = 0$  或  $x + 1 = 0$ 。∴  $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$

当  $y = 6$  时，即  $x^2 - x = 6$ 。∴  $(x - 3)(x + 2) = 0$ 。∴  $x - 3 = 0$  或  $x + 2 = 0$ 。∴  $x_3 = 3$ ， $x_4 = -2$ 。∴ 原方程的解是  $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ ， $x_3 = 3$ ， $x_4 = -2$ 。

请你利用换元法解方程： $(x^2 - 7)^2 - (x^2 - 7) - 2 = 0$ 。

## 3、解答题。

(1) 已知  $a$ 、 $b$  为实数，且满足  $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 3) = 4$ ，求  $a^2 + b^2$  的值。

(2) 已知  $\triangle ABC$  的三边分别是  $a$ ， $b$ ， $c$ ，且满足  $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = 0$ ，判断  $\triangle ABC$  的形状并说明理由。

4、请阅读下面解方程  $(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) - 3=0$  的过程.

解：设  $x^2+1=y$ ，则原方程可变形为  $y^2 - 2y - 3=0$ .

解得  $y_1=3$ ， $y_2=-1$ .

当  $y=3$  时， $x^2+1=3$ ， $\therefore x=\pm\sqrt{2}$ .

当  $y=-1$  时， $x^2+1=-1$ ， $x^2=-2$  此方程无实数解.

$\therefore$  原方程的解为  $x_1=\sqrt{2}$ ， $x_2=-\sqrt{2}$ .

我们将上述解方程的方法叫做换元法.

请用换元法解方程： $(\frac{x}{x-1})^2 - 2(\frac{x}{x-1}) - 15=0$ .