

## 一元二次方程（一）

### 阅读与思考

一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  中， $b^2 - 4ac$  叫做一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的根的判别式，通常用“ $\Delta$ ”来表示，即  $\Delta = b^2 - 4ac$

(1) 当  $\Delta > 0$  时，一元二次方程有 2 个不相等的实数根；

(2) 当  $\Delta = 0$  时，一元二次方程有 2 个相等的实数根；

(3) 当  $\Delta < 0$  时，一元二次方程没有实数根.

如果一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两个实数根是  $x_1, x_2$ ，那么  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

(注意它的使用条件为  $a \neq 0$ ， $\Delta \geq 0$ )

### 八、根的判别式

1、关于  $x$  的一元二次方程  $(x+2)(x-2) = 2x - 4$  的根的情况是 ( )

- A. 有两个不相等的实数根
- B. 有两个相等的实数根
- C. 只有一个实数根
- D. 没有实数根

2、已知关于  $x$  的方程  $b(x^2 - 1) + 2ax + c(x^2 + 1) = 0$ ，其中  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三边的长.

- (1) 若  $x = -1$  是方程的根，试判断  $\triangle ABC$  的形状；
- (2) 若方程有两个相等的实数根，试判断  $\triangle ABC$  的形状.

3、已知关于  $x$  的一元二次方程  $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$ ，其中  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三边的长.

- (1) 如果  $x = -1$  是方程的根，试判断  $\triangle ABC$  的形状，并说明理由；
- (2) 如果方程有两个相等的实数根，试判断  $\triangle ABC$  的形状，并说明理由；
- (3) 如果  $\triangle ABC$  是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.

4、已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (2m - 1)x + 3 = 0$ .

- (1) 当  $m = 2$  时，判断方程根的情况；
- (2) 当  $m = -2$  时，求出方程的根.

## 九、根与系数的关系

1、对于一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ )，下列说法：

①若  $a+b+c=0$ ，则方程必有一根为  $x=1$ ；

②若方程  $ax^2+c=0$  有两个不相等的实根，则方程  $ax^2+bx+c=0$  无实根；

③若方程  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ ) 两根为  $x_1, x_2$  且满足  $x_1 \neq x_2 \neq 0$ ，则方程  $cx^2+bx+a=0$  ( $c \neq 0$ )，必有实根  $\frac{1}{x_1}$ ，  
 $\frac{1}{x_2}$ ；

④若  $x_0$  是一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  的根，则  $b^2-4ac=(2ax_0+b)^2$ 。

其中正确的 ( )

A. ①②

B. ①④

C. ②③④

D. ①③④

2、关于  $x$  的方程： $x^2 - (2k - 1)x + k^2 - 2k + 3 = 0$  有两个不相等的实数根。

(1) 求实数  $k$  的取值范围；

(2) 用含  $k$  的代数式表示  $|x_1 - x_2|$ ；

(3) 设方程的两个实数根分别为  $x_1, x_2$ ，是否存在实数  $k$ ，使得  $|x_1| - |x_2| = \sqrt{3}$ ？若存在，试求出  $k$  的值；  
若不存在，说明理由。

3、已知：关于  $x$  的方程  $x^2+kx-1=0$ ,

(1) 求证：无论  $k$  为何值时，方程始终有两个不相等的实数根；

(2) 若  $k=2$ ，且方程的两个根分别是  $\alpha$  与  $\beta$ ，求  $\alpha+\beta - \alpha\beta$  的值.

## 十、由实际问题抽象出一元二次方程

1、如图，有一块长 50 米，宽 25 米的矩形空地，现要在空地内开辟两横三纵共五条等宽人行通道，且通道面积为 249 平方米. 设人行通道的宽为  $x$  米，则下列方程正确的是 ( )



A.  $2 \times 50x + 3x(25 - x) = 249$

B.  $3 \times 25x + 2x(50 - 2x) = 249$

C.  $(50 - 2x)(25 - 3x) = 50 \times 25 - 249$

D.  $(50 - 3x)(25 - 2x) = 50 \times 25 - 249$

2、《算学宝鉴》中记载了我国南宋数学家杨辉提出的一个问题：“直田积八百六十四步，之云阔不及长一十二步，问阔及长各几步？”译文：“一个矩形田地的面积等于 864 平方步，且它的宽比长少 12 步，问长与宽各是多少步？”若设矩形田地的长为  $x$  步，则可列方程为 \_\_\_\_\_.

3、某一皮衣专卖店销售某款皮衣，其进价为每件 750 元，经市场调查发现，按每件 1100 元出售，平均每天可售出 30 件，每件降价 50 元，平均每天的销售量可增加 10 件，皮衣专卖店若想要平均每天获利 12000 元，则每件皮衣定价为多少元？

(1) 以下是小明和小红的两种不同设法，请帮忙填完整：

小明：设每件皮衣降价  $x$  元，由题意，可列方程：\_\_\_\_\_。

小红：设每件皮衣定价为  $y$  元，由题意，可列方程：\_\_\_\_\_。

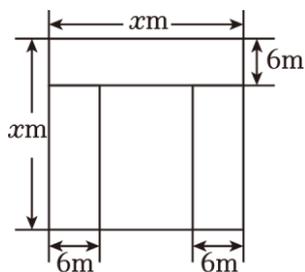
(2) 请写出一种完整的解答过程。

3、百货大楼服装柜销售中发现：“宝乐”牌童装平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元。为了迎接“十·一”国庆节，商场决定采取适当的降价措施，扩大销售量，增加盈利，尽快减少库存。经市场调查发现：如果每件童装降价 1 元，那么平均每天就可多售出 2 件，要使平均每天销售这种童装盈利 1200 元，那么每件童装应降价多少元？

请先填空后再列方程求解：设每件童装降价 \_\_\_\_\_ 元，那么平均每天就可多售出 \_\_\_\_\_ 件，现在一天可售出 \_\_\_\_\_ 件，每件盈利 \_\_\_\_\_ 元。

## 十一、一元二次方程的应用

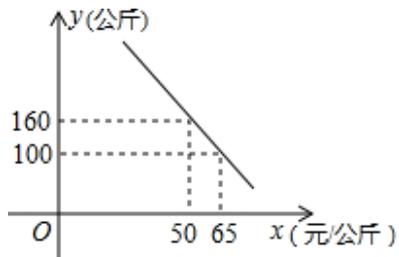
1、为了喜迎元旦，某区筹备了精彩的文艺演出，筹办组在一块正方形的广场空地上搭建舞台，并设计了如图所示的方案，其中阴影部分为舞台。舞台区域的宽均为 6 米，中间空白的面积为 216 平方米，若设正方形空地的边长为  $x$  米，则可列方程 \_\_\_\_\_。



2、为提高农民收入，某区一水果公园引进一种新型蟠桃，蟠桃进价为每公斤 40 元。上市后通过一段时间的试营销发现：当蟠桃销售单价在每公斤 40 元至 90 元之间（含 40 元和 90 元）时，每月的销售量  $y$ （公斤）与销售单价  $x$ （元/公斤）之间的关系可近似地看作一次函数，其图象如图所示。

（1）求  $y$  与  $x$  的函数解析式，并写出定义域；

（2）如果想要每月获得 2400 元的利润，那么销售单价应定为每公斤多少元。



3、由于新冠疫情的影响，口罩需求量急剧上升，经过连续两次价格的上调，口罩的价格由每包 10 元涨到了每包 16.9 元。

（1）求出这两次价格上调的平均增长率；

（2）在有关部门大力调控下，口罩价格还是降到了每包 10 元，而且调查发现，定价为每包 10 元时，一天可以卖出 30 包，每降价 1 元，可以多卖出 5 包。当销售额为 315 元时，且让顾客获得更大的优惠，应该降价多少元？