正方形 答案与解析

例 1 ①④⑤ 提示：在 AD 上取 $AH=AE$，连 EH，则∠AHE＝45°，∴∠HED＝∠HDE＝22.5°，则 HE＝HD．又∵HE＝HD＞AE，故②不正确．又 $S_{\Delta AGD}=S_{\Delta FGD}>S_{\Delta CGD}$，故③不正确．

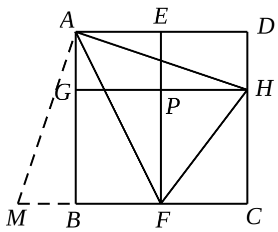
例 2 提示：(1)延长 DM 交 CE 于 N，连 DF，NF，先证明△ADM≌△ENM，再证明△CDF≌△ENF 得 FD＝FN，∠DFN＝∠CFE＝90°，故 MD⊥MF 且 MD＝MF．

(2)延长 DM 到 N 点，使 DM＝MN，连 FD，FN，先证明△ADM≌△ENM，得 AD＝EN，∠MAD＝∠MEN，则 AD∥EN．延长 EN，DC 交于 S 点，则∠ADC＝∠CSN＝90°．在四边形 $FCSE$ 中，∠FCS＋∠FEN＝180°，又∵∠FCS＋∠FCD＝180°，故∠FEN＝∠FCD，再证△CDF≌△ENF．∴(1)中结论仍成立．

例 3 提示：延长 BC 至点 H，使得 CH＝AE，连结 DE，DF，由 Rt△DAE≌Rt△DCH 得，DE＝DH，进而推证△DEF≌△DFH，Rt△DGE≌Rt△DCH．

例 4 设 AG＝a，BG＝b，AE＝x，ED＝y，则

$$\begin{cases} a+b=x+y, & ① \\ 2ax=by. & ② \end{cases}$$



由①得 $a-x=y-b$，平方得 $a^2-2ax+x^2=y^2-2by+b^2$．

将②代入得 $a^2-2ax+x^2=y^2-4ax+b^2$，

∴$(a+x)^2=b^2+y^2$，得 $a+x=\sqrt{b^2+y^2}$．

∵$b^2+y^2=CH^2+CF^2=FH^2$，

∴$a+x=FH$，即 $DH+BF=FH$．

延长 CB 至 M，使 BM＝DH，连结 AM，由 Rt△ABM≌Rt△ADH，得 AM＝AH，∠MAB＝∠HAD．

∴∠MAH＝∠MAB＋∠BAH＝∠BAH＋∠HAD＝90°．

再证△AMF≌△AHF．∴∠MAF＝∠HAF．

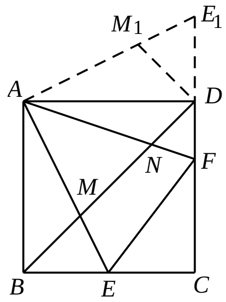
即∠$HAF=\frac{1}{2}$∠MAH＝45°．

例 5 (1)如图，延长 CD 至点 E_1，使 $DE_1=BE$，连结 AE_1，则 $\triangle ADE_1\cong\triangle ABE$.

从而，$\angle DAE_1=\angle BAE$，$AE_1=AE$，于是 $\angle EAE_1=90°$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AE_1F$ 中，$EF=BE+DF=E1D+DF=E1F$，则 $\triangle AEF\cong\triangle AE_1F$.

故 $\angle EAF=\angle E_1AF=\frac{1}{2}\angle EAE1=45°$.



(2)如图，在 AE_1 上取一点 $M1$，使得 $AM_1=AM$，连结 M_1D，M_1N. 则

$\triangle ABM\cong\triangle ADM_1$，$\triangle ANM\cong\triangle ANM_1$，

故 $\angle ABM=\angle ADM_1$，$BM=DM_1$，$MN=M_1N$.

∵ $\angle NDM_1=90°$ ，从而 $M1N^2=M_1D^2+ND^2$，∴ $MN2=BM^2+DN^2$.

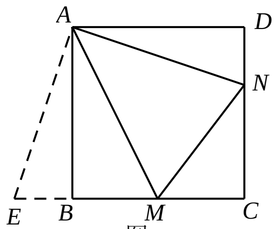
例 6 (1) $BM+DN=MN$ 成立.

如图 a，把 $\triangle AND$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ ，得到 $\triangle ABE$，E、B、M 三点共线，则 $\triangle DAN\cong\triangle BAE$，

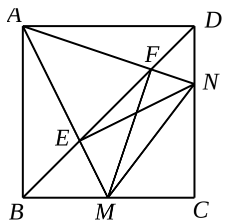
∴ $AE=AN$，$\angle EAM=\angle NAM=45°$ ，$AM=AM$，得 $\triangle AEM\cong\triangle ANM$，∴ $ME=MN$.

∵ $ME=BE+BM=DN+BM$，∴ $DN+BM=MN$.

(2) $DN-BM=MN$.



图a



图b

如图 b，对于图 2，连 BD 交 AM 于 E，交 AN 于 F，连 EN，FM 可进一步证明：①$\triangle CMN$ 的周长等于正方形边长的 2 倍；

②$EF2=BE2+DF2$；

③$\triangle AEN$，$\triangle AFM$ 都为等腰直角三角形；

④ $S_{\Delta AMN}=2S_{\Delta AEF}$.

A 级

1．75° 2．② 3．$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4．$3\sqrt{2}$ 5．C 6．B 7．B 8．B

9．提示：$\triangle ABE\cong\triangle DCE$，$\triangle ADF\cong\triangle CDF$，证明 $\angle ABE+\angle BAF=90°$.

10．提示：延长 CE 交 DA 的延长线于 G，证明 $FG=FC$.

11．提示：连 PC，则 $PC=EF$.

12．(1)延长 DM 交 EF 于 N，由△ADM≌△ENM，得 $DM=NM$，$MF=\frac{1}{2}DN$，$FD=FN$，故 $MD\perp MF$，且 $MD=MF$.

(2)延长 DM 交 CE 于 N，连结 DF，FN，先证明△ADM≌△ENM，再证明△CDF≌△ENF，(1)中结论仍成立.

B级

1. $2\sqrt{2}$　2. 60°°　提示：$MA^2+MC^2=MD^2+MB^2$　3. 5　4. D　5. C　6. B　7. B

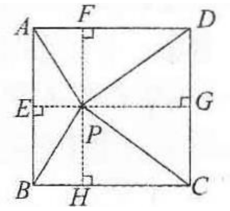
8. 提示:⑴在 AD 上截取 $AF=AM$，∠DFM=∠MBN，由△DFM≌△MBN，故 $DM=MN$.

⑵证法同上，结论仍成立.

⑶在 AD 延长线取一点 E，使 $DE=BM$，可证明△DEM≌△MBN，故 $DM=MN$.

9. 提示：构造边长为 1 的正方形 $ABCD$，P 为正方形 $ABCD$ 内一点，过 P 作 $FH\parallel AB$ 交 AD 于 F，交 BC 于 H，作 $EG\parallel AD$ 交 AB 于 E，交 CD 于 G. 设 $AE=a$，则 $BE=1-a$. 设 $AF=b$，则 $DF=1-b$. ∴$PA=\sqrt{a^2+b^2}$，同理：$PB=\sqrt{(1-a)^2+b^2}$，$PC=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$，$PD=\sqrt{a^2+(1-b)^2}$.

又∵$PA+PB+PC+PD\geq 2AC=2\sqrt{2}$，∴命题得证.



10. 提示：$MN=BM+DN$，延长 CD 至 M'，使 $M'D=BM$，证明△ADM'≌△ABM，△$AM'N$≌△AMN，则∠MAN=∠$M'AN=\frac{1}{2}$∠$M'AM$=45°.

11. 提示：八边形八个内角分成两组，每一组四个角都相等.

12. 连结 RN，MP，△MPC≌△BAC≌△BRN，则 $RB=MP$，又△RNM≌△PCB，则 $RM=BP$，从而四边形 $RBPM$ 是平行四边形，故 $BP\parallel RM$.