配方法 解析

例 1 10 提示：x=5-y代入$z^2=xy+y-9$，然后配方.

例 2 A 提示：原式=$3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)$.

例 3 $a+b+c$=20 提示：将等式整理，得$\left(a-1-2\sqrt{a-1}+1\right)+\left(b-2-4\sqrt{b-2}+4\right)+\frac{1}{2}\left(c-3-6\sqrt{c-3}+9\right)=0$

即$\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{b-2}-2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{c-3}-3\right)^2$=0

例 4 原式=$\underbrace{44\cdots44}_{n+1}\underbrace{88\cdots88}_{n+1}+1=\underbrace{44\cdots44}_{n+1}\underbrace{00\cdots00}_{n+1}+\underbrace{88\cdots88}_{n+1}+1=4\times\underbrace{11\cdots11}_{n+1}\times10^{n+1}+8\times\underbrace{11\cdots11}_{n+1}+1=4$

$\times\underbrace{11\cdots11}_{n+1}\times\left(9\times\underbrace{11\cdots11}_{n+1}+1\right)+8\times\underbrace{11\cdots11}_{n+1}+1=36\times\underbrace{(11\cdots11)^2}_{n+1}+12\times\underbrace{11\cdots11}_{n+1}+1=\left(6\times\underbrace{11\cdots11}_{n+1}+1\right)^2$

例 5 已知，这 32 个人恰好是第 2 至第 33 层各住 1 人，对于每个乘电梯上、的人，他所住的层数一定不小于直接上楼的人所住的层数，事实上，设住 S 层的人乘电梯，而住 t 层的人直接上楼，S＜t，交换两人的上楼方式，其余的人不变，则不满意总分减少.

设电梯停在第 x 层，在第一层有 y 人没有乘电梯而直接上楼，那么不满意总分为：

$$S=3\left[1+2+\cdots+(33-x)\right]+3(1+2+\cdots+y)+\left[1+2+\cdots+(x-y-2)\right]$$

$$=\frac{3\times(33-x)(34-x)}{2}+\frac{3y(y+1)}{2}+\frac{(x-y-2)(x-y-1)}{2}$$

$$=2x^2-(y+102)x+2y^2+3y+1684$$

$$=2\left(x-\frac{y+102}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(15y^2-180y+3068\right)$$

$$=2\left(x-\frac{y+102}{4}\right)^2+\frac{1}{8}(y-6)^2+316\geq316$$

又当 x=27，y=6 时，$S_{最小值}$=316 .

故当电梯停在第 27 层时，总分最小，最小值为 316 分.

例 6 若 $\mathrm{n}^2-19\mathrm{n}+91$ 为完全平方数，则 $4\left(\mathrm{n}^2-19\mathrm{n}+91\right)$ 也是完全平方数.

设 $4\left(\mathrm{n}^2-19\mathrm{n}+91\right)=\mathrm{m}^2$（m 为自然数）配方得 $(2\mathrm{n}-19)^2+3=\mathrm{m}^2$，

∴（m+2n-19）（m-2n+19）=3

于是$\begin{cases}m+2n-19=3\\m-2n+19=1\end{cases}$或$\begin{cases}m+2n-19=1\\m-2n+19=3\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}m=2\\n=10\end{cases}$或$\begin{cases}m=2\\n=10\end{cases}$

故当 n=9 或 10 时 $\mathrm{n}^2-19\mathrm{n}+91$ 是完全平方数.

能力训练

1. $4+\sqrt{2}$ 2. 0 3. 6 4. $2\sqrt{x-1}$ 5. -3，-2, 5 6. B 7. C

8. A 提示：$x+y+z=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+\pi-3$ 大于 0.

9. B 提示：取 n=2 和 3 可否定 A、C、D、E，而 $4n^2+4n+4=4(n^2+n+1)$，$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$，故 n^2+n+1 不是完全平方数. 10. B

11. （x，y，z）=（0,0,0）或（1,1,1） 提示：取倒数.

12. 提示：当 n<8 时，$\left(a=\sqrt{1-b^2}\right)^2=01+a^2-b^2$，若它是完全平方数，则 n 必为偶数.

$a^2-b^2=m$

若 n=2，则 $2^n+256=2^2\times65$；若 n=4，则 $2^n+256=2^4\times17$；若 n=6，则 $2^n+256=2^6\times5$；若 n=8，则 $2^n+256=2^8\times2$.所以当 n ≤8 时，2^n+256 都不是完全平方数.

当 n>8 时，$2^n+256=2^8(2^{n-8}+1)$，若它是完全平方数，则 $2^{n-8}+1$ 为一奇数的平方，设 $2^{n-8}+1=(2k+1)^2$（k 为自然数），则 $2^{n-10}+1=k(k+1)$，由于 k 和 k+1 一奇一偶，∴k=1，于是 $2^{n-10}=2$，故 n=11.

13. 提示：设 a=kb（k 为正整数），则 $k(b+1)^2=243=27\times3^2=3\times9^2$，解得 $\begin{cases}a=54\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=24\\b=8\end{cases}$

14. 由 $9(2a+b)^2=509^2\times3^2k^2$，得到 2a+b=509k，b=509k-2a，代入原式得 $4a+511(509k-2a)=509\times3^2k^2$，$a=\dfrac{k(511-9k)}{2}$，因为 a 为质数，故有以下情况：

⑴当 k=1 时，$a=\dfrac{511-9}{2}=251$，为质数，b=509k-2a=7.

⑵当 k=2 时，a=511-18=493=17×29，不为质数，舍去.

⑶当 k>2 且 k 为奇数时，$a=k\bullet\dfrac{511-9k}{2}$ 为质数且 k>2，则 $\dfrac{511-9k}{2}=1$，此方程无整数解，舍去.

⑷当 k>2 且 k 为偶数时，$a=\dfrac{k}{2}(511-9k)$ 为质数，且 $\dfrac{k}{2}>1$，则 511-9k=1，此方程无整数解，舍去.

综上所述，a=251，b=7.

15. 提示：⑴ y=-9x+1440 （0<x<160）.

⑵每周的住宿收入是 S 元，则 $S=(-9x+1440)x=-9x^2+1440x=-9(x-80)^2+57600$

当 x=80 时，$S_{最大}=57600$ 元.