

配方法

阅读与思考

把一个式子或一个式子的部分写成完全平方式或者几个完全平方式的和的形式，这种方法叫配方法，配方法是代数变形的重要手段，是研究相等关系，讨论不等关系的常用技巧.

配方法的作用在于改变式子的原有结构，是变形求解的一种手段；配方法的实质在于揭示式子的非负性，是挖掘隐含条件的有力工具.

配方法解题的关键在于“配方”，恰当的“拆”与“添”是配方常用的技巧，常见的等式有：

$$1、a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$2、a \pm 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$$

$$3、a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$$

$$4、a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$

配方法在代数式的求值，解方程、求最值等方面有较广泛的应用，运用配方解题的关键在于：

(1) 具有较强的配方意识，即由题设条件的平方特征或隐含的平方关系，如 $a = (\sqrt{a})^2$ 能联想起配方法.

(2) 具有整体把握题设条件的能力，即善于将某项拆开又重新分配组合，得到完全平方式.

例题与求解

【例 1】 已知实数 x, y, z 满足 $x + y = 5, z^2 = xy + y - 9$ ，那么 $x + 2y + 3z =$ _____

【例 2】 若实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ ，则代数式 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ 的最大值是 ()

A、27

B、18

C、15

D、12

【例 3】 已知 $a + b - 2\sqrt{a-1} - 4\sqrt{b-2} = 3\sqrt{c-3} - \frac{1}{2}c - 5$ ，求 $a + b + c$ 的值.

【例 4】 证明数列 49, 4489, 444889, 44448889, ... 的每一项都是一个完全平方数.

【例 5】 一幢 33 层的大楼有一部电梯停在第一层，它一次最多容纳 32 人，而且只能在第 2 层至第 33 层中某一层停一次，对于每个人来说，他往下走一层楼梯感到 1 分不满意，往上走一层楼梯感到 3 分不满意，现在有 32 个人在第一层，并且他们分别住在第 2 至第 33 层的每一层，问：电梯停在哪一层时，可以使得这 32 个人不满意的总分达到最小？最小值是多少？（有些人可以不乘电梯即直接从楼梯上楼）.

【例 6】 已知自然数 n 使得 $n^2 - 19n + 91$ 为完全平方数，求 n 的值.

能力训练

- 1、计算 $\sqrt{10+8\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ = _____.
- 2、已知 $a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3=0$ ，则 $a^3+b^3+c^3-3abc$ = _____.
- 3、 x, y 为实数，且 $x^2+\frac{y^2}{2}+4 \leq xy+2y$ ，则 $x+y$ 的值为 _____.
- 4、当 $x > 2$ 时，化简代数式 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ ，得 _____.
- 5、已知 $m=4x^2-12xy+10y^2+4y+9$ ，当 x = _____， y = _____ 时， m 的值最小.
- 6、若 $M=10a^2+b^2-7a+6, N=a^2+b^2+5a+1$ ，则 $M-N$ 的值 ()
- A、负数 B、正数 C、非负数 D、可正可负
- 7、计算 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ 的值为 ()
- A、1 B、 $\sqrt{5}$ C、 $2\sqrt{5}$ D、 $3\sqrt{5}$
- 8、设 a, b, c 为实数， $x=a^2-2b+\frac{\pi}{3}, y=b^2-2c+\frac{\pi}{6}, z=c^2-2a+\frac{\pi}{2}$ ，则 x, y, z 中至少有一个值 ()
- A、大于零 B、等于零 C、不大于零 D、小于零
- 9、下列代数式表示的数一定不是某个自然数的平方(其中 n 为自然数)的是()
- A、 $3n^2-3n+3$ B、 $4n^2+4n+4$ C、 $5n^2-5n+5$
- D、 $7n^2-7n+7$ E、 $11n^2-11n+11$
- 10、已知实数 a, b, c 满足 $a^2+2b=7, b^2-2c=-1, c^2-6a=-17$ ，则 $a+b+c$ 的值等于 ()
- A、2 B、3 C、4 D、5
- 11、解方程组
$$\begin{cases} x = \frac{2z^2}{1+z^2} \\ y = \frac{2x^2}{1+x^2} \\ z = \frac{2y^2}{1+y^2} \end{cases}$$

12、能使 $2^n + 256$ 是完全平方数的正整数 n 的值为多少？

13、已知 $a > b$ ，且 $(a+b) + (a+ab-b) + \frac{a}{b} = 243$ ， a, b 为自然数，求 a, b 的值.

13、设 a 为质数， b 为正整数，且 $9(2a+b)^2 = 509(4a+511b)$ ，求 a, b 的值.

14、某宾馆经市场调研发现，每周该宾馆入住的房间数 y 与房间单价 x 之间存在如图所示的一次函数关系.

(1) 根据图象求 y 与 x 之间的函数关系式 ($0 < x < 160$);

(2) 从经济效益来看，你认为该宾馆如何制定房间单价，能使其每周的住宿收入最高？每周最高住宿收入是多少元？

