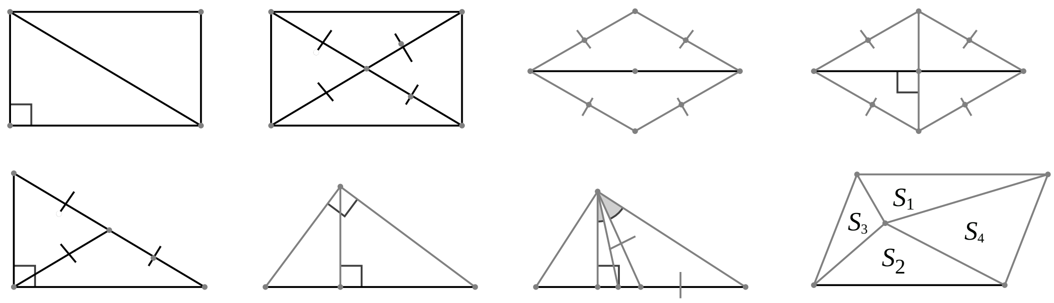
平行四边形、矩形、菱形

阅读与思考

平行四边形、矩形、菱形的性质定理与判定定理是从对边、对角、对角线三个方面探讨的，矩形、菱形都是特殊的平行四边形，矩形的特殊性由一个直角所体现，菱形的特殊性是由邻边相等来体现，因此它们除兼有平行四边形的一般性质外，还有特有的性质；反过来，判定一个四边形为矩形或菱形，也就需要更多的条件.

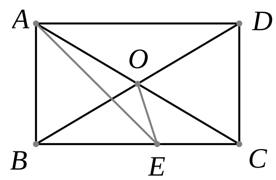
连对角线后平行四边形、矩形、菱形就与特殊三角形联系在一起，所以讨论平行四边形、矩形、菱形相关问题时，常用到特殊三角形性质、全等三角形法；另一方面，又要善于在四边形的背景下思考问题，运用平行四边形、矩形、菱形的丰富性质为解题服务，常常是判定定理与性质定理的综合运用.

熟悉以下基本图形：



例题与求解

【例 1】如图，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于 O，AE 平分 $\angle BAD$，交 BC 于 E，$\angle CAE=15°$，那么 $\angle BOE=$________.



【例 2】下面有四个命题：

①一组对边相等且一组对角相等的四边形是平行四边形；

②一组对边相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形；

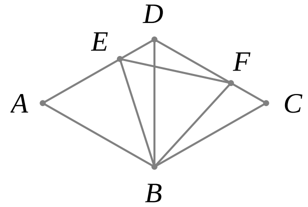
③一组对角相等且这一组对角的顶点所连结的对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形；

④一组对角相等且这一组对角的顶点所连结的对角线被另一条对角线平分的四边形是平行四边形；

其中，正确的命题的个数是（　　）

A.1　　B. 2　　C. 3　　D.4

【例 3】如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$BD=2$，E，F 分别是边 AD，CD 上的两个动点且满足 $AE+CF=2$.

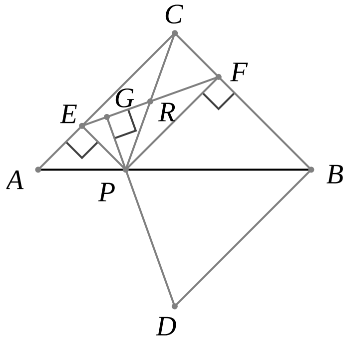


（1）判断△BEF 的形状，并说明理由；

（2）设△BEF 的面积为 S，求 S 的取值范围.

【例 4】如图，设 P 为等腰直角三角形 ACB 斜边 AB 上任意一点，$PE\perp AC$ 于点 E，$PF\perp BC$ 于点 F，$PG\perp EF$ 于点 G，延长 GP 并在春延长线上取一点 D，使得 $PD=PC$.

求证：$BC\perp BD$，$BC=BD$.



【例 5】在□$ABCD$ 中，∠BAD 的平分线交直线 BC 于点 E，交直线 DC 的延长线于点 F.

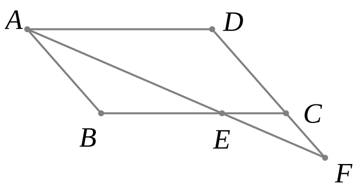


图1

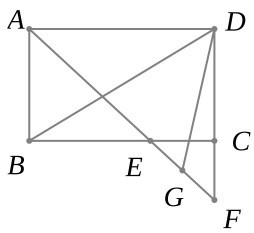


图2

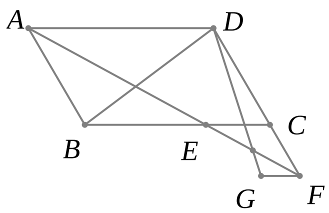


图3

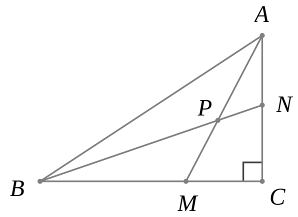
（1）在图 1 中证明 $CE=CF$；

（2）若∠$ABC=90°$，G 是 EF 的中点（如图 2），直接写出∠BDG 的度数；

（3）若∠$ABC=120°$，$FG\parallel CE$，$FG=CE$，分别连结 DB，DG（如图 3），求∠BDG 的度数.

【**例 6**】如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，点 M 在 BC 上，且 $BM=AC$，点 N 在 AC 上，且 $AN=MC$，AM 与 BN 相交于点 P.

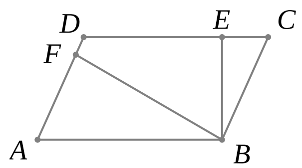
求证：$\angle BPM=45°$.



能力训练

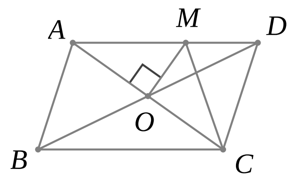
A 级

1. 如图，▱$ABCD$ 中，$BE\perp CD$，$BF\perp AD$，垂足分别为 E、F，若 $CE=2$，$DF=1$，$\angle EBF=60°$，则▱$ABCD$ 的面积为________.



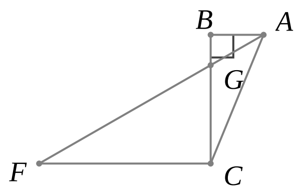
第1题

2. 如图，▱$ABCD$ 的对角线相交于点 O，且 $AD\neq CD$，过点 O 作 $OM\perp AC$，交 AD 于点 M，若$\triangle CDM$ 周长为 a，那么▱$ABCD$ 的周长为 ________.



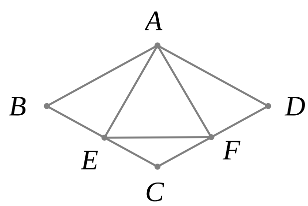
第2题

3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle BAC=78°$，过 C 作 $CF\parallel AB$，连结 AF 与 BC 相交于 G，若 $GF=2AC$，则$\angle BAG$ 的大小是________.



第3题

4. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle EAF=60°$，$\angle BAE=20°$，则$\angle CEF$ 的大小是________.



第4题

5. 四边形的四条边长分别是 a，b，c，d，其中 a，c 为对边，且满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=2ab+2cd$，则这个四边形一定是（　　）

A.两组角分别相等的四边形　　B. 平行四边形

C. 对角线互相垂直的四边形　　D. 对角线相等的四边形

6.现有以下四个命题：

①对角线相等的四边形是矩形；②对角线互相垂直的四边形是菱形；③有一个角为直角且对角线互相平分的四边形为矩形；④菱形的对角线的平方和等于边长的平方的 4 倍.

其中，正确的命题有（　　）

A. ①②　B.③④　C. ③　D. ①②③④

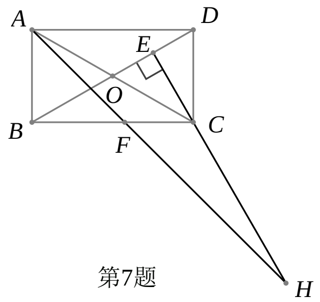
7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$，AF 平分 $\angle DAB$，过点 C 作 $CE\perp BD$ 于 E，延长 AF，EC 交于点 H，下列结论中：①$AF=FH$；②$BO=BF$；③$CA=CH$；④$BE=3ED$.正确的是（　　）

A. ②③

B. ③④

C. ①②④

D. ②③④

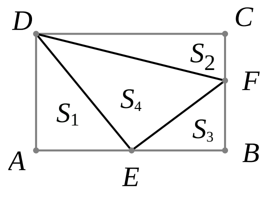


第7题

8. 如图，矩形 $ABCD$ 的长为 a，宽为 b，如果 $S_1=S_2=\frac{1}{2}(S_3+S_4)$，则 $S_4=$（　　）

A. $\frac{3}{8}ab$　　B. $\frac{3}{4}ab$

C. $\frac{2}{3}ab$　　D. $\frac{1}{2}ab$

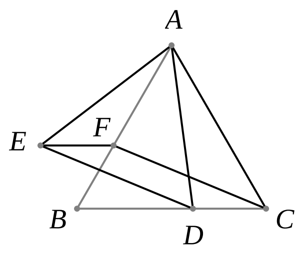


第8题

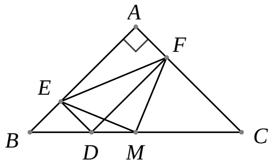
10. 如图，△ABC 为等边三角形，D、F 分别是 BC、AB 上的点，且 $CD=BF$，以 AD 为边作等边△ADE.

（1）求证：△ACD≌△CBF；

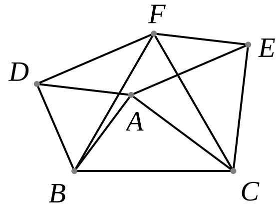
（2）当 D 在线段 BC 上何处时，四边形 $CDEF$ 为平行四边形，且∠$DEF=30°$，证明你的结论.



11. 如图，在 Rt△ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=90°$，点 D 为 BC 上任一点，$DF\perp AC$ 于 F，$DE\perp AC$ 于 E，M 为 BC 中点，试判断△MEF 是什么形状的三角形，并证明你的结论.

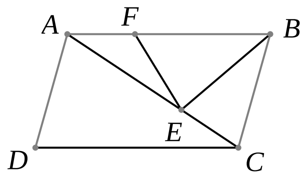


12. 如图，△ABC 中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，△ABD，△ACE，△BCF 都是等边三角形，求四边形 $AEFD$ 的面积.



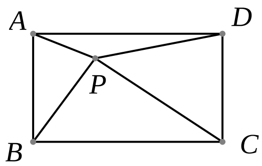
B 级

1. 如图，已知 $ABCD$ 是平行四边形，E 在 AC 上，$AE=2EC$，F 在 AB 上，$BF=2AF$，如果△BEF 的面积为 2 cm^2，则▱$ABCD$ 的面积是________.



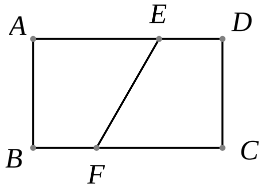
第1题

2. 如图，已知 P 为矩形 $ABCD$ 内一点，$PA=3$，$PD=4$，$PC=5$，则 $PB=$________.



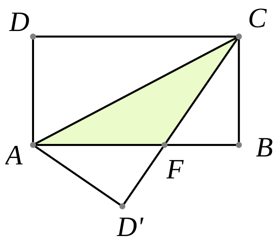
第2题

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$cm，$BC=8$cm，现将矩形折叠，使 B 点与 D 点重合，则折痕 EF 长为________.

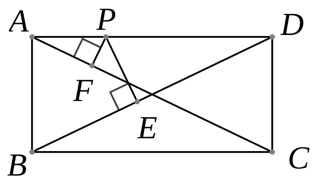


第3题

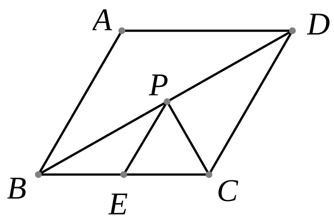
4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=4$，将矩形沿 AC 折叠，使点 D 落在点 D' 处，CD' 交 AB 于点 F，则重叠部分△AFC 的面积为 ________.



第4题



第5题



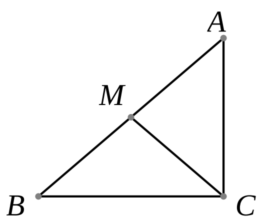
第6题

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AD=12$，$AB=5$，P 是 AD 边上任意一点，$PE\perp BD$ 于 E，$PF\perp AC$ 于 F，那么 $PE+PF$ 的值为________.

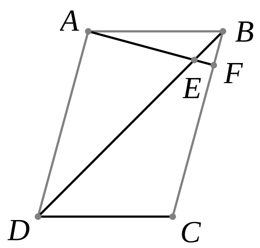
6. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4 cm，且∠$ABC=60°$，E 是 BC 的中点，P 点在 BD 上，则 $PE+PC$ 的最小值为________.

7. 如图，△ABC 的周长为 24，M 是 AB 的中点，$MC=MA=5$，则△ABC 的面积是（　　）

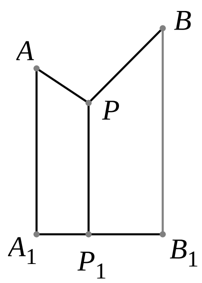
A. 30　B. 24　C.16　D.12



第7题



第8题



第9题

8. 如图，▱$ABCD$ 中，∠$ABC=75°$，$AF\perp BC$ 于 F，AF 交 BD 于 E，若 $DE=2AB$，则∠AED 的大小是（　　）

A. 60°　B. 65°　C.70°　D.75°

9. 如图，已知∠A=∠B，AA_1，PP_1，BB_1 均垂直于 A_1B_1，$AA_1=17$，$PP_1=16$，$BB_1=20$，$A_1B_1=12$，则 $AP+PB$ 的值为（　　）

A. 15　B.14　C. 13　D.12

10. 如图 1，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C=90°$，现将$\triangle ABC$ 补成矩形，使$\triangle ABC$ 的两个顶点为矩形一边的两个端点，第三个顶点落在矩形这一边的对边上，那么符合要求的矩形可画出两个：矩形 $ACBD$ 和矩形 $AEFB$（如图 2）.

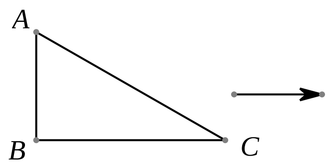


图1

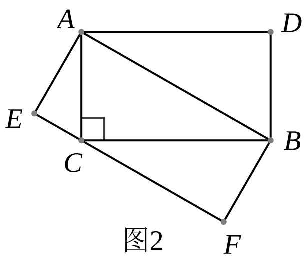


图2

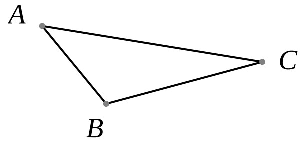


图3

解答问题：

（1）设图 2 中矩形 $ACBD$ 和矩形 $AEFB$ 的面积分别为 S_1，S_2，则 S_1________ S_2（填“＞”、“＝”或“＜”）.

（2）如图 3，$\triangle ABC$ 是钝角三角形，按短文中的要求把它补成矩形，那么符合要求的矩形可以画出________个，利用图 3 画出来.

（3）如图 4，$\triangle ABC$ 是锐角三角形且三边满足 $BC>AC>AB$，按短文中的要求把它补成矩形，那么符合要求的矩形可以画出________个，利用图 4 画出来.

（4）在（3）中所画出的矩形中，哪一个的周长最小？为什么？

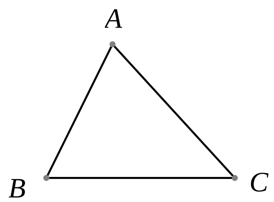


图4

11.四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA$，$\angle BAD=120°$，M 为 BC 上一点，N 为 CD 上一点.求证：若$\triangle AMN$ 有一个内角等于 $60°$，则$\triangle AMN$ 为等边三角形.

12. 如图，六边形 $ABCDEF$ 中，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$CD \parallel AF$，对边之差 $BC-EF=ED-AB=AF-CD>0$.

求证：该六边形的各角相等.