双曲线

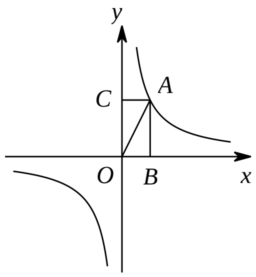
形如 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的函数叫做反比例函数，这也是现实生活中普遍使用的模型，如通过改变电阻来控制电流的变化，从而使舞台的灯光达到变幻的效果；又如过湿地时，在地面上铺上木板，人对地面的压强减小，从而使人不陷入泥中.

反比例函数的基本性质有：

1. 反比例函数图象是由两条曲线组成的双曲线，双曲线向坐标轴无限延伸，但不能与坐标轴相交；
2. k 的正负性，决定双曲线大致位置及 y 随 x 的变化情况；
3. 双曲线上的点是关于中心对称的，双曲线也是轴对称图形，对称轴是直线 $y=x$ 及 $y=-x$.

反比例函数与一次函数有着内在的联系. 如在作图时都要经历列表、描点、连线的过程；研究它们的性质时，都是通过几个具体的函数归纳出一般的规律，但它们毕竟不同.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 $|k|$ 的几何意义是：$|k|$ 等于双曲线上任意一点作 x 轴、y 轴的垂线所得的矩形的面积，如图：



（1）$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|k|$；

（2）$S_{矩形ACOB}=|k|$.

求两个函数图象的交点坐标，常通过解由这两个函数解析式组成的方程组得到.

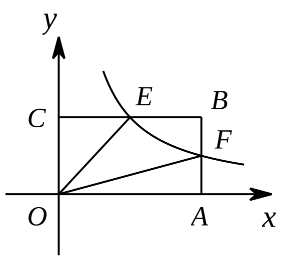
求符合某种条件的点的坐标，常根据问题的数量关系和几何元素间的关系建立关于横纵坐标的方程（组），解方程（组）求得相关点的坐标.

解反比例函数有关问题时，应充分考虑它的对称性，这样既能从整体上思考问题，又能提高思维的周密性.

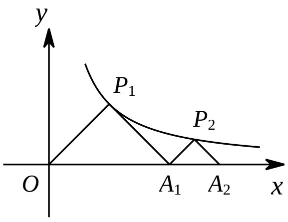
反比例函数是描述变量之间相互关系的重要数学模型之一，用反比例函数解决实际问题，既要分析问题情景，建立模型，又要综合方程、一次函数等知识.

例题与求解

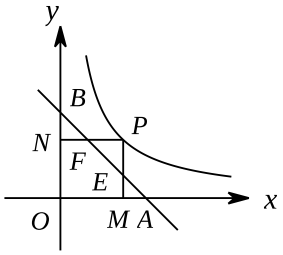
【例 1】（1）如图，已知双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 经过矩形 $OABC$ 边 AB 的中点 F 且交 BC 于点 E，四边形 $OEBF$ 的面积为 2，则 $k=$__________.



（2）如图，$\triangle P_1OA_1$，$\triangle P_2A_1A_2$都是等腰直角三角形，点 P_1，P_2在函数 $y=\dfrac{4}{x}(x>0)$ 的图象上，斜边 OA_1，A_1A_2都在 x 轴上，则点 A_2的坐标是__________.



【例 2】如图，P 是函数 $y=\dfrac{1}{2x}(x>0)$ 图象上一点，直线 $y=-x+1$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，$PM\perp x$ 轴于 M，交 AB 于 E，$PN\perp y$ 轴于 N，交 AB 于 F，则 $AF\cdot BE$ 的值为_________.

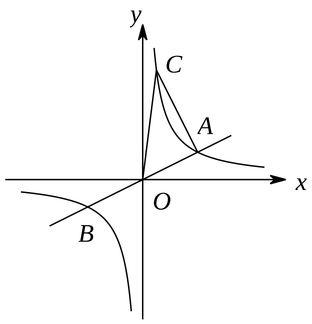


【例 3】如图，已知直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 交于 A、B 两点，且点 A 的横坐标为 4.

（1）求 k 的值；

（2）若双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 上一点 C 的纵坐标为 8，求$\triangle AOC$的面积；

（3）过原点 O 的另一条直线 l 交 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 于 P、Q 两点（P 点在第一象限），若由点 A、B、P、Q 为顶点组成的四边形面积为 24，求点 P 的坐标.

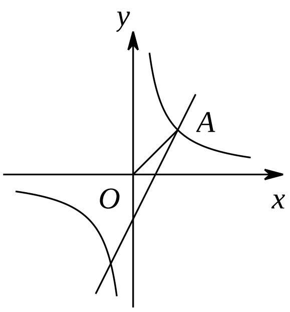


【例 4】已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{2x}$ 和一次函数 $y=2x-1$，其中一次函数的图象经过 (a,b)，$(a+1,b+k)$ 两点.

（1）求反比例函数的解析式；

（2）如图，已知 A 点在第一象限且同时在上述两个函数的图象上，求 A 点坐标；

（3）利用（2）的结果，请问：在 x 轴上是否存在点 P，使△AOP 为等腰三角形？若存在，把符合条件的 P 点坐标都求出来；若不存在，请说明理由.



【例 5】一次函数 $y=ax+b$ 的图象分别与 x 轴、y 轴交于点 M、N，与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象相交于点 A、B，过点 A 分别作 $AC\perp x$ 轴，$AE\perp y$ 轴，垂足分别为 C，E；过点 B 分别作 $BF\perp x$ 轴，$BD\perp y$ 轴，垂足分别为 F，D，AC 与 BD 交于点 K，连接 CD.

（1）若点 A，B 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象的同一分支上，如图 1，试证明：

① $S_{四边形AEDK}=S_{四边形CFBK}$；② $AN=BM$.

（2）若点 A，B 分别在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象的不同分支上，如图 2，则 AN 与 BM 还相等吗？试证明你的结论.

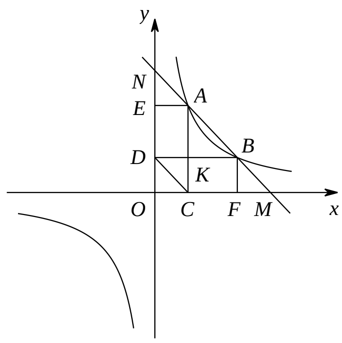


图 1

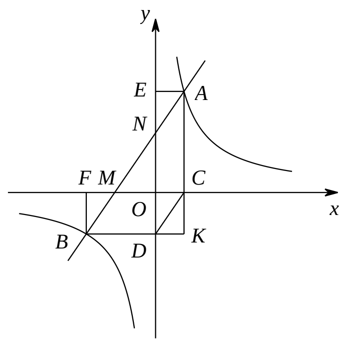


图 2

【例 6】点 $A(4,0)$，$B(0,3)$ 与点 C 构成边长是 3，4，5 的直角三角形，如果点 C 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上，求 k 可能取的一切值.

能力训练

A　级

1. 已知 $y=(m-2)x^{3-m^2}$ 是反比例函数，则 $m=$_________.

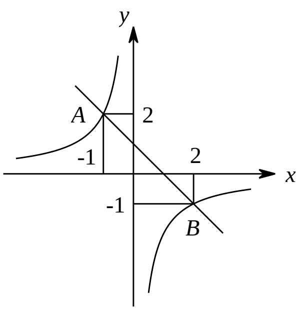
2. 若反比例函数 $y=\dfrac{k-3}{x}$ 的图象位于第二、四象限，则满足条件的正整数 k 的值是_________.

3. 已知双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 经过点 $(-1,3)$，如果 $A(a_1,b_1)$，$B(a_2,b_2)$ 两点在该双曲线上，且 $a_1<a_2<0$，那么 b_1______b_2.

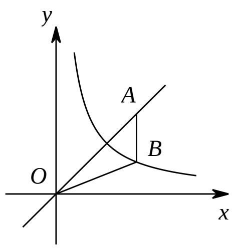
4. 已知函数 $y=\dfrac{-a^2-1}{x}$（a 为常数）的图象上有三点 $(3,y_1)$，$(-1,y_2)$，$(2,y_3)$，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是__________________.

5. 如图，一次函数与反比例函数相交于 A，B 两点，则图中使反比例函数的值小于一次函数的值的 x 的取值范围是__________________.

6. 如图，B 为双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 上一点，直线 AB 平行于 y 轴交直线 $y=x$ 于点 A，若 $OB^2-AB^2=4$，则 $k=$________.

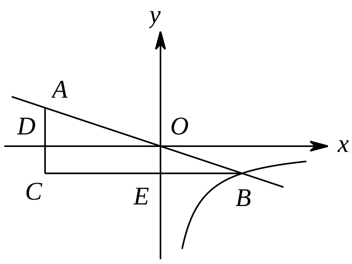


（第 5 题）



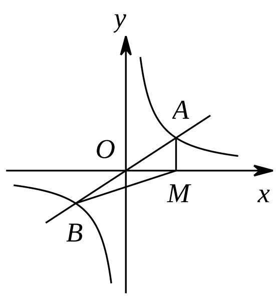
（第 6 题）

7. 如图，直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 交于 A、B 两点，过点 A 作 $AM\perp x$ 轴于 M 点，连接 BM，若 $S_{\triangle ABM}=2$，则 k 的值是（　　）



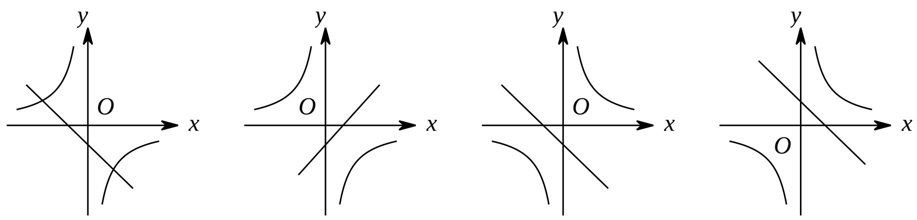
A. 2　　B. $m-2$　　C. m　　D. 4

8. 如图，反比例函数 $y=\dfrac{-4}{x}$ 的图象与直线 $y=-\dfrac{1}{3}x$ 的交点为 A、B，过 A 作 y 轴的平行线与过 B 作 x 轴的平行线相交于点 C，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）

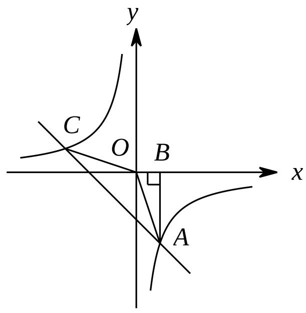


A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

9. 函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 在同一坐标系中的图象可能是（　　）



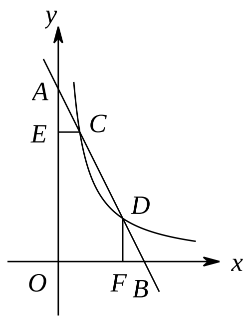
10. 如图，Rt△*ABO* 的顶点 *A* 是双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 与直线 $y=-x+(k+1)$ 在第四象限的交点，*AB*⊥*x* 轴于 *B*，且 $S_{\triangle ABO}=\dfrac{3}{2}$.



（1）求这两个函数的解析式；

（2）求直线与双曲线的两个交点 *A*，*C* 的坐标和△*AOC* 的面积.

11. 如图，在平面直角坐标系中，直线 *AB* 与 *y* 轴、*x* 轴分别交于点 *A*、点 *B*，与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 在第一象限的图象交于点 $C(1,6)$、$D(3,n)$，过 *C* 点作 *CE*⊥*y* 轴于 *E*，过点 *D* 作 *DF*⊥*x* 轴于 *F*.

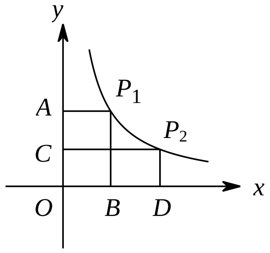


（1）求 *m*，*n* 的值；

（2）求直线 *AB* 的函数解析式；

（3）求证：△*AEC* ≌△*DFB*.

12. 如图所示，已知双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象上有两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，且 $x_1<x_2$，分别过 P_1，P_2 向 x 轴作垂线，垂足为 B，D，过 P_1，P_2 向 y 轴作垂线，垂足分别为 A，C.



（1）若记四边形 AP_1BO 和四边形 CP_2DO 的面积分别为 S_1，S_2，周长分别为 C_1，C_2，试比较 S_1 和 S_2，C_1 和 C_2 的大小；

（2）若 P 是双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 上一点，分别过 P 向 x 轴、y 轴作垂线，垂足分别为 M，N. 试问当 P 在何处时四边形 $PMON$ 的周长最小，最小值为多少？

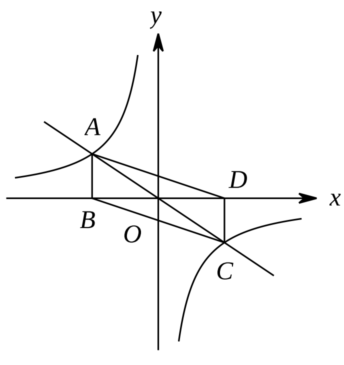
B 级

1. 已知 $y=y_1+y_2$，且 y_1 与 $\frac{1}{x}$ 成反比例，y_2 与 $2x$ 成反比例. 且当 $x=2$ 时，$y=7$；当 $x=-1$ 时，$y=-5$. 当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$y=$____________.

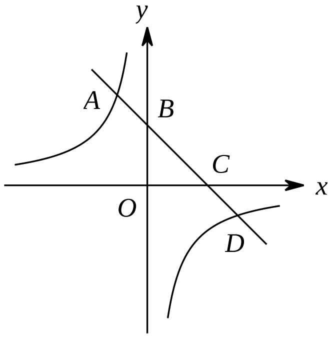
2. 直线 $y=ax(a>0)$ 与双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，则 $4x_1y_2-3x_2y_1=$_________.

（荆门市中考试题）

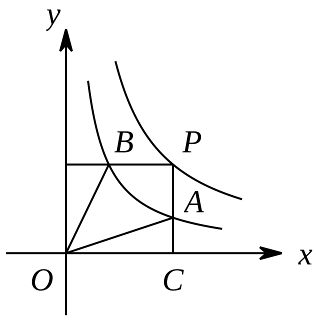
3. 如图，过原点的直线与反比例函数 $y=-\frac{7}{x}$ 的图象交于点 A，C，自点 A 和点 C 作 x 轴的垂线，垂足分别为 B 和 D，则四边形 $ABCD$ 的面积等于_________.



4. 已知函数 $y=-x+1$ 的图象与 x 轴、y 轴分别交于点 C，B，与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 交于点 A，D，若 $AB+CD=BC$，则 k 的值为________.



5. 两个反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 和 $y=\dfrac{1}{x}$ 在第一象限内的图象如图所示，点 P 在 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上，$PC\perp x$ 轴于点 C，交 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象于点 A，$PD\perp y$ 轴于点 D，交 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象于点 B，当点 P 在 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上运动时，有以下结论：



① $\triangle ODB$ 与 $\triangle OCA$ 的面积相等；

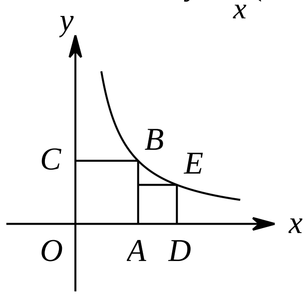
② 四边形 $PAOB$ 的面积不会发生变化；

③ PA 与 PB 始终相等；

④ 当点 A 是 PC 的中点时，点 B 一定是 PD 的中点.

其中一定正确的是______________.

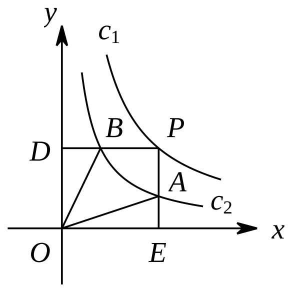
6. 如图，正方形 $OABC$，$ADEF$ 的顶点 A，D，C 在坐标轴上，点 F 在 AB 上，点 B，E 在函数 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 的图象上，则点 E 的坐标是（　　）



A. $(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$　　B. $(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})$

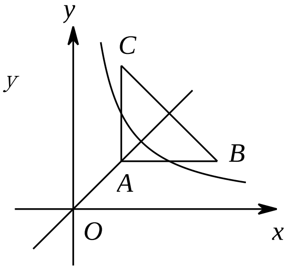
C. $(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})$　　D. $(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2})$

7. 如图，两个反比例函数 $y=\dfrac{k_1}{x}$ 和 $y=\dfrac{k_2}{x}(k_1>k_2>0)$ 在第一象限内的图象依次是曲线 c_1 和 c_2，设 P 点在 c_1 上，$PE\perp x$ 轴于点 E，交 c_2 于点 A，$PD\perp y$ 轴于点 D，交 c_2 于点 B，则四边形 $PAOB$ 的面积为（　　）



A. k_1+k_2　　B. k_1-k_2　　C. $k_1\cdot k_2$　　D. $\dfrac{k_1}{k_2}$

8. 等腰直角三角形 ABC 位于第一象限，$AB=AC=2$，直角顶点 A 在直线 $y=x$ 上，其中 A 点的横坐标为 1，且两条直角边 AB、AC 分别平行于 x 轴、y 轴，若双曲线 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 与△ABC 有交点，则 k 的取值范围是（　　）



A. $1<k<2$　　B. $1\le k\le 3$

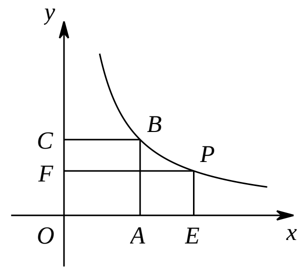
C. $1\le k\le 4$　　D. $1\le k<4$

9. 如图，正方形 $OABC$ 的面积为 9，点 O 为坐标原点，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上，点 B 在函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象上，点 $P(m,n)$ 是函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象上的任意一点，过点 P 分别作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 E，F，并设矩形 $OEPF$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分的面积为 S.

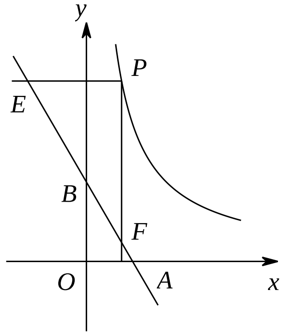
（1）求 B 点坐标和 k 的值；

（2）当 $S=\frac{9}{2}$ 时，求点 P 的坐标；

（3）写出 S 关于 m 的函数关系式.



10. 如图，已知直线 $l: y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 交 x 轴于 A，交 y 轴于 B，P 为反比例函数 $y=\frac{3}{x}(x>0)$ 上一点，过 P 作 x 轴平行线交直线 l 于 E，过 P 作 y 轴平行线交直线 l 于 F. 求 $AE\cdot BF$ 的值.



11. 已知一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于点 $M(2,3)$， $N(-4,m)$.

（1）求一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的解析式；

（2）求△*MON* 的面积.

12. 已知直角坐标系内有一条直线和一条曲线，这条直线和 x 轴，y 轴分别交于点 A 和点 B，且 $OA=OB=1$. 这条曲线是函数 $y=\frac{1}{2x}$ 的图象在第一象限内的一个分支，点 P 是这条曲线上任意一点，它的坐标是 (a,b)，由点 P 向 x 轴、y 轴作垂线 *PM*，*PN*（垂足分别为 M，N），分别与直线 *AB* 相交于点 E 和点 F.

（1）设交点 E 和 F 都在线段 *AB* 上（如图），分别求 E，F 的坐标（用 a 的代数式表示 E 点坐标，用 b 的代数式表示 F 点坐标，只需写出答案，不要求写出计算过程）；

（2）求△*OEF* 的面积（结果用 a，b 的代数式表示）；

（3）△*AOF* 与△*BOE* 是否一定相似？如果一定相似，请予以证明；如果不一定相似或者一定不相似，请简要说明理由；

（4）当点 P 在曲线上移动时，△*OEF* 随之变动，指出在△*OEF* 的三个内角中，是否有大小始终保持不变的那个角和它的大小，并证明你的结论.