等腰三角形的性质

阅读与思考

等腰三角形是一类特殊三角形，具有特殊的性质，这些性质为角度的计算、线段相等、直线位置关系的证明等问题提供了新的理论依据．因此，在解与等腰三角形相关的问题时，除了要运用全等三角形知识方法外，又不能囿于全等三角形，应善于利用等腰三角形的性质探求新的解题途径，应熟悉以下基本图形、基本结论．

⑴ 图 1 中，$\angle A=180^0-2\angle B$，$\angle B=\angle C=\dfrac{180^0-\angle A}{2}$，$\angle DAC=2\angle B=2\angle C$．

⑵ 图 2 中，只要下述四个条件：

① $AB=AC$；② $\angle 1=\angle 2$；③ $CD=DB$；④ $AD\perp BC$ 中任意两个成立，就可以推出其余两个成立．

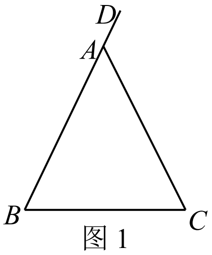


图 1

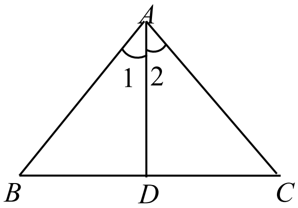
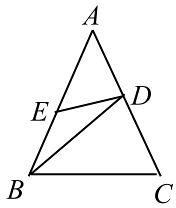


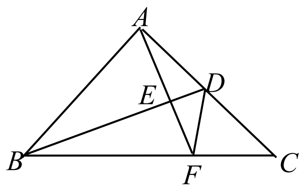
图 2

例题与求解

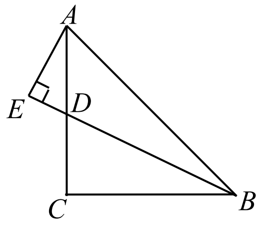


【例 1】如图，在△*ABC* 中，*D* 在 *AC* 上，*E* 在 *AB* 上，且 *AB*=*AC*，*BC*=*BD*，*AD*=*DE*=*BE*，则∠*A*=____________．

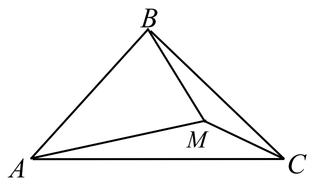
【例 2】如图，在△*ABC* 中，已知∠*BAC*=90^0，*AB*=*AC*，*D* 为 *AC* 中点，*AE*⊥*BD* 于 *E*，延长 *AE* 交 *BC* 于 *F*，求证：∠*ADB*=∠*CDF*．



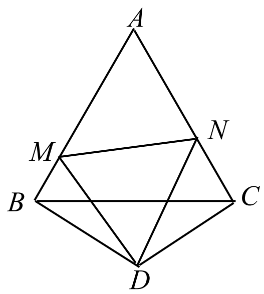
【例 3】如图，在△*ABC* 中，*AC*=*BC*，∠*ACB*=90^0，*D* 是 *AC* 上一点，且 *AE* 垂直 *BD* 的延长线于 *E*，又 *AE*=$\dfrac{1}{2}$*BD*，求证：*BD* 是∠*ABC* 的角平分线．



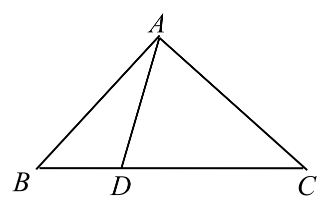
【例 4】 如图，在△ABC 中，$\angle BAC=\angle BCA=44^0$，$M$ 为△ABC 内一点，使$\angle MCA=30^0$，$\angle MAC=16^0$，求$\angle BMC$ 度数.



【例 5】 如图，△ABC 是边长为 1 的等边三角形，△BDC 是顶角$\angle BDC=120^0$ 的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 60^0 角，角的两边分别交 AB 于 M，交 AC 于 N，连结 MN，形成一个三角形．求证：△AMN 的周长等于 2.



【例 6】 如图，△ABC 中，$\angle ABC=46^0$，D 是 BC 边上一点，$DC=AB$，$\angle DAB=21^0$，试确定$\angle CAD$ 的度数.



能力训练

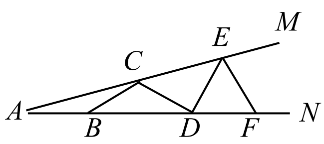
A 级

1．如果等腰三角形一腰上的高另一腰的夹角为 45^0，那么这个等腰三角形的底角为____________.

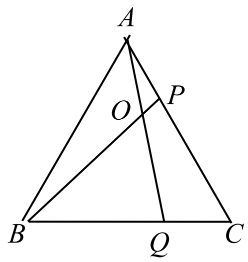
2．如图，已知$\angle A=15^0$，$AB=BC=CD=DE=EF$，则$\angle FEM=$____________.

3．如图，在等边△ABC 的 AC，BC 边上各取一点 P、Q，使 $AP=CQ$，AQ，BP 相交于点 O，则$\angle BOQ=$____________.

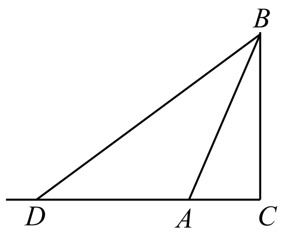
4．如图，在△ABC 中，$\angle BCA=90^0$，$\angle BAC=60^0$，$BC=4$，在 CA 的延长线取点 D，使 $AD=AB$，则 D，B 两点之间的距离是____________.



(第 2 题)



(第 3 题)



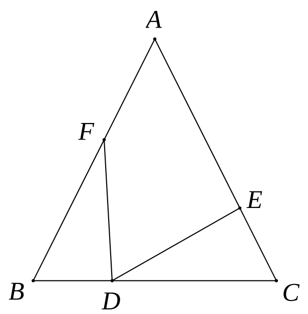
(第 4 题)

5．如图，在△ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，$BF=CD$，$CE=BD$，那么$\angle EDF$ 等于（　　）

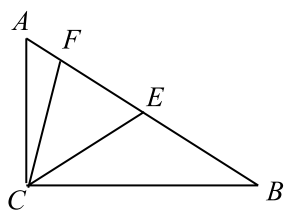
A．$90^0-\frac{1}{2}\angle A$　　B．$90^0-\angle A$　　C．$180^0-\angle A$　　D．$45^0-\frac{1}{2}\angle A$

6．如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90^0$，$AC=AE$，$BC=BF$，则$\angle ECF=$（　　）

A．60^0　　B．45^0　　C．30^0　　D．不确定



第 5 题图



第 6 题图

7．△ABC 的一个内角的大小是 40^0，且$\angle A=\angle B$，那么$\angle C$ 的外角的大小是（　　）

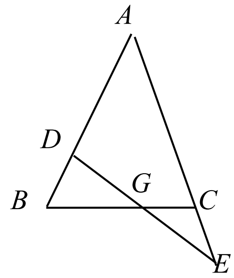
A．140^0　　B．80^0 或 100^0　　C．100^0 或 140^0　　D．80^0 或 140^0

8．三角形三边长 a，b，c 满足$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-b+c}$，则三角形一定是（　　）

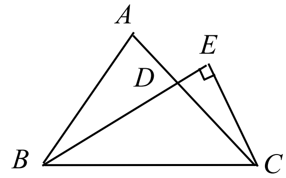
A．等边三角形　　B．以 a 为底边的等腰三角形

C．以 c 为底边的等腰三角形　　D．等腰三角形

9．如图，在△ABC 中，$AB=AC$，D，E 分别是腰 AB，AC 延长线上的点，且 $BD=CE$，连结 DE 交 BC 于 G，求证：$DG=EG$．



10．如图，在△ABC 中，$\angle BAC=90^0$，$AB=AC$，BE 平分$\angle ABC$，$CE\perp BE$，求证：$CE=\frac{1}{2}BD$．



11．已知 Rt△ABC 中，$AC=BC$，$\angle C=90^0$，D 为 AB 边中点，$\angle EDF=90^0$，将$\angle EDF$ 绕 D 点旋转，它的两边分别交 AC，BC(或它们的延长线)于 E、F，当$\angle EDF$ 绕 D 点旋转到 $DE\perp AC$ 于 E 时(如图 1)，易证：$S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，当$\angle EDF$ 绕 D 点旋转到 DE 和 AC 不垂直时，在图 2 和图 3 这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，$S_{\triangle DEF}$，$S_{\triangle CEF}$，$S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明．

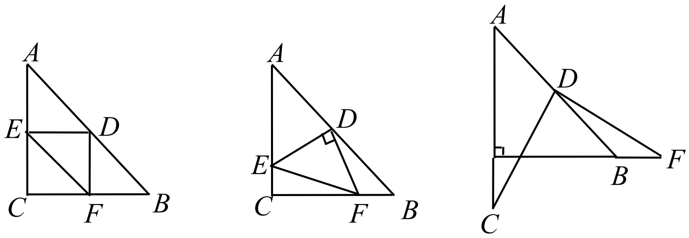
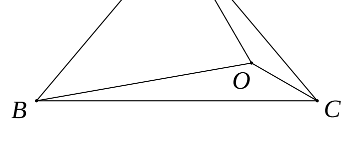


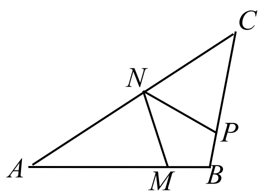
图 1 图 2 图 3

12．如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=80^0$，O 为△ABC 内一点，且$\angle OBC=10^0$，$\angle OCA=20^0$，求$\angle BAO$ 的度数．

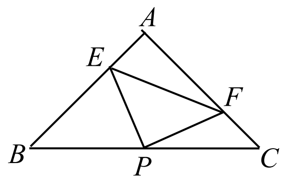


B 级

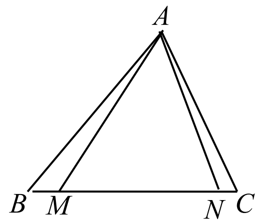
1．如图，在△ABC 中，∠ABC=100^0，AM=AN，CN=CP，则∠MNP=_________.



(第 1 题)



(第 2 题)



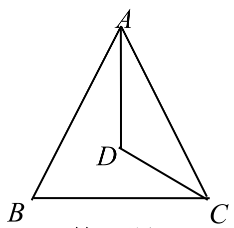
(第 3 题)

2．如图，在△ABC 中，AB=AC，∠BAC=90^0，直角∠EPF 的顶点 P 是 BC 的中点，两边 PE，PF 分别交 AB，AC 于点 E，F，给出以下 4 个结论：①AE=CF；②△EPF 是等腰直角三角形；③$S_{四边形AEPF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$；④$EF$=$AP$. 当∠$EPF$ 在△ABC 内绕顶点 P 旋转时(点 E 不与 A，B 重合). 上述结论正确的是___________.

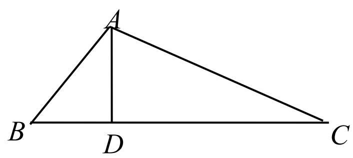
3．如图，在△ABC 中，AB=BC，M，N 为 BC 边上两点，并且∠BAM=∠CAN，MN=AN，则∠MAC 的度数是___________.

4．如图，在△ABC 中，AB=AC，∠BAC 与∠ACB 的平分线相交于 D，∠ADC=130^0，那么∠CAB 的大小是（　　）

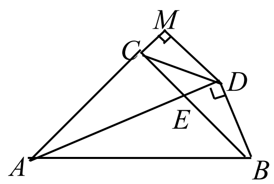
A．80^0　　B．50^0　　C．40^0　　D．20^0



(第 4 题)



(第 5 题)



(第 6 题)

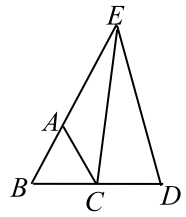
5．如图，在△ABC 中，∠BAC=120^0，AD⊥BC 于 D，且 AB+BD=DC，则∠C 的大小是（　　）

A．20^0　　B．25^0　　C．30^0　　D．45^0

6．如图，在△ABC 中，AC=BC，∠ACB=90^0，AE 平分∠BAC 交 BC 于 E，BD⊥AE 于 D，DM⊥AC 交 AC 的延长线于 M，连 CD，下列四个结论：①∠ADC=45^0；②$BD=\frac{1}{2}AE$；③AC+CE=AB；④AB-BC=2MC. 其中正确结论的个数为（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

7．如图，已知△ABC为等边三角形，延长BC至D，延长BA至E，并且使$AE=BD$，连结CE、DE，求证：$CE=DE$．

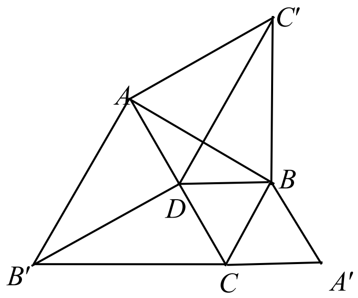


8．如图，△ABC中，已知∠$C=60^0$，$AC>BC$，又△ABC'、△$A'BC$、△$AB'C$都是△ABC外的等边三角形，而点D在AC上，且$BC=DC$．

⑴ 证明：△$C'BD$≌△$B'DC$；

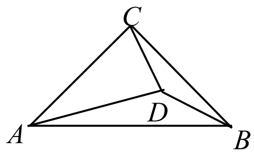
⑵ 证明：△$AC'D$≌△$DB'A$；

⑶ 对△ABC、△ABC'、△$A'BC$、△$AB'C$，从面积大小关系上，你能得出什么结论？



9．在△ABC中，已知$AB=AC$，且过△ABC某一顶点的直线可将△ABC分成两个等腰三角形，试求△ABC各内角的度数．

10．如图，在△ABC 中，$\angle C=90^0$，$\angle CAD=30^0$，$AC=BC=AD$，求证：$CD=BD$．



11．已知△ABC 中，$\angle B$ 为锐角，从顶点 A 向边 BC 或 BC 的延长线引垂线交 BC 于 H 点，又从顶点 C 向边 AB 或 AB 的延长线引垂线交 AB 于 K，试问：当 $\frac{2BH}{BC}$，$\frac{2BK}{AB}$ 是整数时，△ABC 是怎样的三角形？并证明你的结论．