等腰三角形的判定

阅读与思考

在学习了等腰三角形性质与判定后，我们可以对等腰三角形的判定、证明线段相等的方法作出归纳总结.

1．等腰三角形的判定：

⑴从定义入手，证明一个三角形的两条边相等；

⑵从角入手，证明一个三角形的两个角相等.

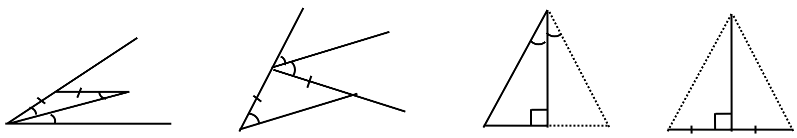
2．证明线段相等的方法：

⑴当所证的两条线段位于两个三角形，通过全等三角形证明；

⑵当所证的两条线段位于同一个三角形，通过等角对等边证明；

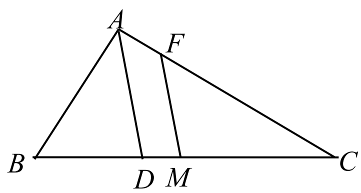
⑶寻找某条线段，证明所证的两条线段都与它相等.

善于发现、构造等腰三角形，进而利用等腰三角形的性质为解题服务，是解几何题的一个常用技巧. 常见的构造方法有：平分线+平行线、平分线+垂线、中线+垂线．如图所示：



例题与求解

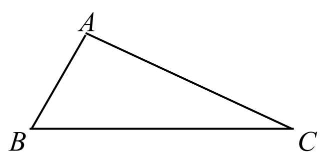
【例 1】 如图，在△ABC 中，AB=7，AC=11，点 M 是 BC 的中点，AD 是∠BAC 的平分线，MF∥AD，则 CF 的长为____________.



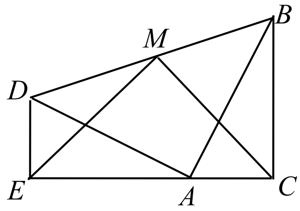
【例 2】 如图，在△ABC 中，∠B=2∠C，则 AC 与 $2AB$ 之间的关系是（　　）

A．AC＞$2AB$　　B．AC＝$2AB$

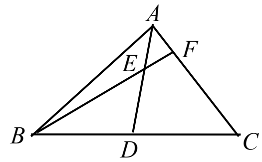
C．AC≤$2AB$　　D．AC＜$2AB$



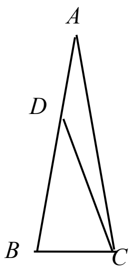
【例 3】两个全等的含 30^0，60^0 角的三角板 ADE 和三角板 ABC，如图所示放置，E、A、C 三点在一条直线上，连结 BD，取 BD 中点 M，连结 ME，MC，试判断△EMC 的形状，并说明理由.



【例 4】如图，已知在△ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，E 是 AD 上一点，且 $BE=AC$，延长 BE 交 AC 于 F，求证：$AF=EF$.



【例 5】如图，在等腰△ABC 中，$AB=AC$，∠$A=20^0$，在边 AB 上取点 D，使 $AD=BC$，求∠BDC 度数.



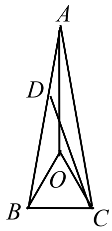


图 1

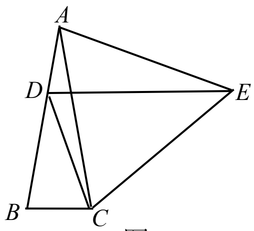


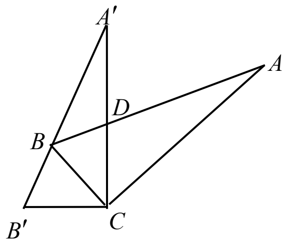
图 2

能力训练

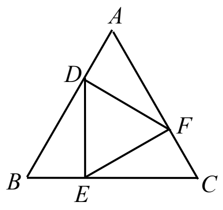
A 级

1．已知△ABC 为等腰三角形，由顶点 A 所引 BC 边的高线恰等于 BC 边长的一半，则∠BAC=__________．

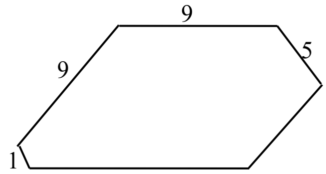
2．如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90^0，∠ABC=66^0，△ABC 以点 C 为中点旋转到△$A'B'C$ 的位置，顶点 B 在斜边 $A'B'$上，$A'C$ 与 AB 相交于 D，则∠BDC=_________．



(第 2 题)



(第 3 题)

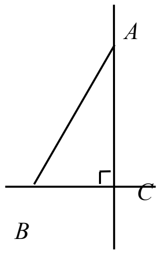


(第 4 题)

3．如图，△ABC 是边长为 6 的等边三角形，DE⊥BC 于 E，EF⊥AC 于 F，FD⊥AB 于 D，则 AD=_______．

4．如图，一个六边形的六个内角都是 120^0，其连续四边的长依次是 $1cm$，$9cm$，$9cm$，$5cm$，那么这个六边形的周长是____________cm．

5．如图，△ABC 中，AB=AC，∠B=36^0，D、E 是 BC 上两点，使∠ADE=∠AED=2∠BAD，则图中等腰三角形共有（　　）



A．3 个　　　　B．4 个

C．5 个　　　　D．6 个

6．若△ABC 的三边长是 a，b，c，且满足 $a^4=b^4+c^4-b^2c^2$，$b^4=a^4+c^4-a^2c^2$，$c^4=a^4+b^4-a^2b^2$，则△ABC（　　）

A．钝角三角形　　B．直角三角形　C．等腰直角三角形　　D．等边三角形

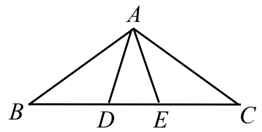
7．等腰三角形一腰上的高等于该三角形某一条边的长度的一半，则其顶角等于（　　）

A．30^0　　B．30^0 或 150^0　　C．120^0 或 150^0　　D．30^0 或 120^0 或 150^0

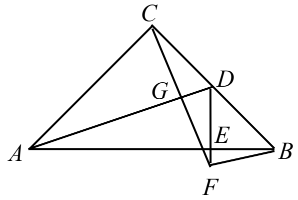
8．如图，已知 Rt△ABC 中，∠C=90^0，∠A=30^0，在直线 BC 或 AC 上取一点 P，使得△PAB 是等腰三角形，则符合条件的 P 点有（　　）

A．2 个　　　　B．4 个

C．6 个　　　　D．8 个



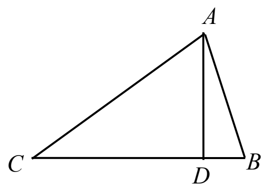
9．如图在等腰 Rt△ABC 中，∠ACB=90^0，D 为 BC 中点，DE⊥AB，垂足为 E，过点 B 作 BF∥AC 交 DE 的延长线于点 F，连接 CF 交 AD 于 G.



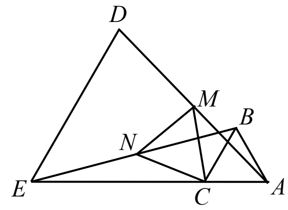
⑴ 求证：AD⊥CF；

⑵ 连结 AF，度判断△ACF 的形状，并说明理由.

10．如图，△ABC 中，AD⊥BC 于 D，∠B=2∠C，求证：AB+BD=CD.



11．如图，已知△*ABC* 是等边三角形，*E* 是 *AC* 延长线上一点，选择一点 *D*，使得△*CDE* 是等边三角形，如果 *M* 是线段 *AD* 的中点，*N* 是线段 *BE* 的中点，求证：△*CMN* 是等边三角形．



12．如图 1，Rt△*ABC* 中，$\angle ACB=90^0$，*CD*⊥*AB*，垂足为 *D*，*AF* 平分∠*CAB*，交 *CD* 于点 *E*，交 *CB* 于点 *F*．

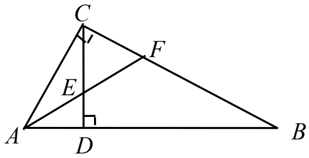


图 1

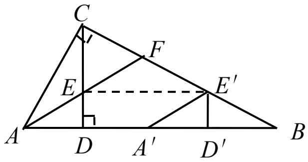


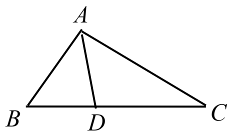
图 2

⑴ 求证：*CE*=*CF*；

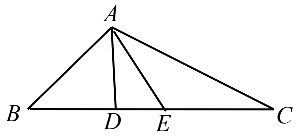
⑵ 将图 1 中的△*ADE* 沿 *AB* 向右平移到△*A'D'E* 的位置，使点 *E'*落在 *BC* 边上，其他条件不变，如图 2 所示，试猜想：*BE'*与 *CF* 有怎样的数量关系？请证明你的结论．

B 级

1．如图，$\triangle ABC$ 中，AD 平分$\angle BAC$，$AB+BD=AC$，则$\angle B$：$\angle C$ 的值=__________.



(第 1 题)



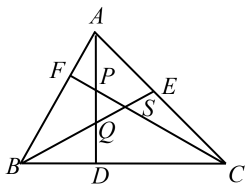
(第 2 题)

2．如图，$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 的垂直平分线分别交 BC 于 D、E，若$\angle BAC+\angle DAE=150^0$，则$\angle BAC$ 的度数是____________.

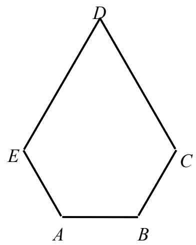
3．在等边$\triangle ABC$ 所在平面内求一点 P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PAC$ 都是等腰三角形，具有这样性质的点 P 有_________个.

4．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=60^0$，$\angle ACB=45^0$，AD、CF 都是高，相交于 P，角平分线 BE 分别交 AD、CF 于 Q、S，则图中的等腰三角形的个数是（　　　）

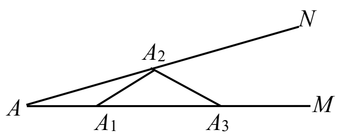
A．2　　　B．3　　　C．4　　　D．5



(第 4 题)



第 5 题



(第 6 题)

5．如图，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A=\angle B=120^0$，$EA=AB=BC=\dfrac{1}{2}DC=\dfrac{1}{2}DE$，则$\angle D=$（　　）

A．30^0　　　B．45^0　　　C．60^0　　　D．67.5^0

6．如图，$\angle MAN=16^0$，A_1 点在 AM 上，在 AN 上取一点 A_2，使 $A_2A_1=AA_1$，再在 AM 上取一点 A_3，使 $A_3A_2=A_2A_1$，如此一直作下去，到不能再作为止，那么作出的最后一点是（　　）

A．A_5　　　B．A_6　　　C．A_7　　　D．A_8

7．若 P 为△ABC 所在平面内一点，且∠APB=∠BPC=∠CPA=120^0，则点 P 叫作△ABC 的费尔马点，如图 1．

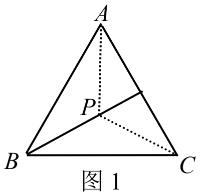


图 1

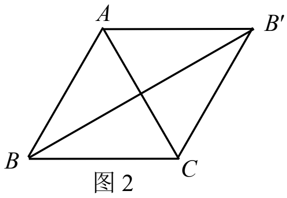
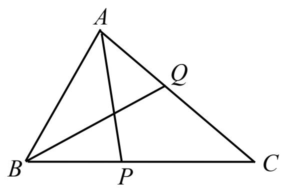


图 2

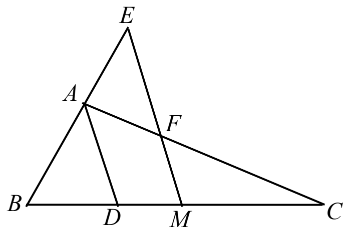
⑴若点 P 为锐角△ABC 的费尔马点，且∠ABC=60^0，PA=3，PC=4，则 PB 的值为_____．

⑵如图 2，在锐角△ABC 外侧作等边△$ACB′$，连结 $BB′$．求证：$BB′$过△ABC 的费尔马点 P，且 $BB′$=PA+PB+PC．

8．如图，△ABC 中，∠BAC=60^0，∠ACB=40^0，P、Q 分别在 BC、AC 上，并且 AP、BQ 分别是∠BAC、∠ABC 的角平分线，求证：BQ+AQ=AB+BP．



9．如图，在△ABC 中，AD 是∠BAC 的平分线，M 是 BC 的中点，过 M 作 $ME // AD$ 交 BA 延长线于 E，交 AC 于 F，求证：$BE=CF=\frac{1}{2}(AB+AC)$．



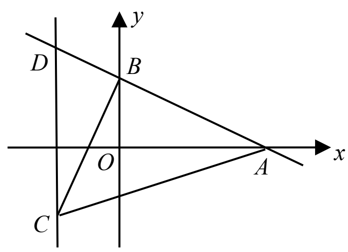
10．在等边△ABC 的边 BC 上任取一点 D，作∠$DAE=60^0$，DE 交∠C 的外角平分线于 E，那么△ADE 是什么三角形？证明你的结论．

11．如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，直线l：$y=-\frac{1}{2}x+m$与x轴、y轴的正半轴分别相交于点 A、B，过点 $C(-4，-4)$作平行于y轴的直线交 AB 于点 D，$CD=10$．

⑴求直线l的解析式；

⑵求证：$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；

⑶将直线l沿y轴负方向平移，当平移恰当的距离时，直线与x，y轴分别相交于点 A'、B'，在直线 CD 上存在点 P，使得$\triangle A'B'P$ 是等腰直角三角形，请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标．



12．如图 1，在平面直角坐标系中，△*AOB* 为等腰直角三角形，*A*(4，4)．

⑴ 求 *B* 点坐标；

⑵ 如图 2，若 *C* 为 x 轴正半轴上一动点，以 *AC* 为直角边作等腰直角△*ACD*，∠*ACD*=90^0，连接 *OD*，求∠*AOD* 度数；

⑶ 如图 3，过点 *A* 作 y 轴于 *E*，*F* 为 x 轴负半轴上一点，*G* 在 *EF* 的延长线上，以 *EG* 为直角边作等腰 Rt△*EGH*，过 *A* 作 x 轴垂线交 *EH* 于点 *M*，连接 *FM*，等式 $\dfrac{AM-FM}{OF}$ =1 是否成立？若成立，请证明；若不成立，说明理由．

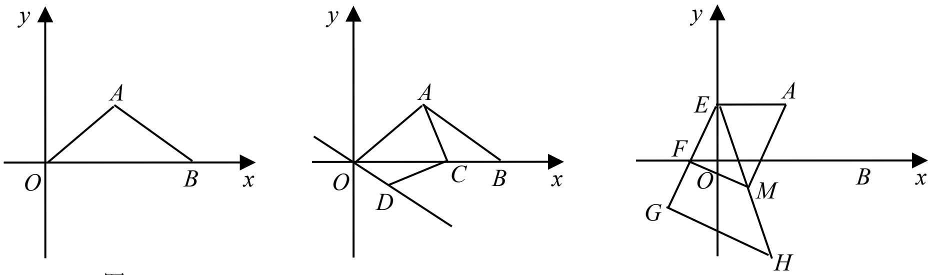


图 1　　图 2　　图 3