二次根式的概念与性质

阅读与思考

式子$\sqrt{a}(a\geq 0)$叫做二次根式，二次根式的性质是二次根式运算、化简求值的基础，主要有：

1. $\sqrt{a}\geq 0$　说明了$\sqrt{a}$与$|a|$、a^2一样都是非负数.

2. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$（$a\geqslant 0$）　解二次根式问题的基本途径——通过平方，去掉根号有理化.

3. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geq 0)\\-a(a\leq 0)\end{cases}$　揭示了与绝对值的内在一致性.

4. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$　（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）.

5. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）　给出了二次根式乘除法运算的法则.

6. 若$a>b>0$，则$\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$，反之亦然，这是比较二次根式大小的基础.

运用二次根式性质解题应注意：

（1）每一性质成立的条件，即等式中字母的取值范围；

（2）要学会性质的“正用”与“逆用”，既能够从等式的左边变形到等式的右边，也能够从等式的右边变形到等式的左边.

例题与求解

【例 1】设x，y都是有理数，且满足方程$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)x+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)y-4-\pi=0$，那么$x-y$的值是____________.

【例 2】当$1\leq x\leq 2$，经化简，$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=$____________.

【例 3】若$a>0$，$b>0$，且$\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=3\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)$，求$\dfrac{2a+3b+\sqrt{ab}}{a-b+\sqrt{ab}}$的值.

【例 4】若实数 x，y，m 满足关系式：

$$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y}$$，试确定 m 的值．

【例 5】已知 $a+b-2\sqrt{a-1}-4\sqrt{b-2}=3\sqrt{c-3}-\dfrac{1}{2}c-5$，求 $a+b+c$ 的值．

【例 6】在△ABC 中，AB，BC，AC 三边的长分别为 $\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小辉同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点△ABC（即△ABC 三个顶点都在小正方形的顶点处），如图 1 所示．这样不需求△ABC 的高，而借用网格就能计算出它的面积．

（1）请你将△ABC 的面积直接填写在横线上：_________．

（2）我们把上述求△ABC 面积的方法叫作构图法．若△ABC 三边的长分别为 $\sqrt{5}a$，$2\sqrt{2}a$，$\sqrt{17}a$（$a>0$），请利用图 2 中的正方形网格（每个小正方形的边长为 a）画出相应的△ABC，并求出它的面积．

（3）若△ABC 三边的长分别为 $\sqrt{m^2+16n^2}$，$\sqrt{9m^2+4n^2}$，$2\sqrt{m^2+n^2}$（$m>0$，$n>0$，且 $m\neq n$）试运用构图法求出这个三角形的面积．

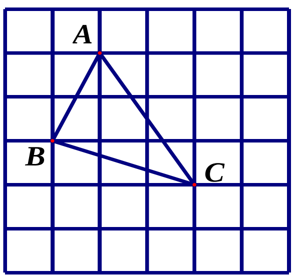

图 1

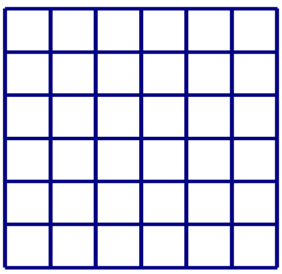
图 2

能力训练

A 级

1．要使代数式$\dfrac{\sqrt{|x-3|-2}}{x^2-4x+3}$有意义．则$x$的取值范围是______________.

2．阅读下面一题的解答过程，请判断是否正确?若不正确，请写出正确的解答．

已知a为实数，化简$\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}$．　　　　解：原式＝$a\sqrt{-a}-a\cdot\dfrac{1}{a}\sqrt{-a}=(a-1)\sqrt{-a}$．

3．已知正数a，b，有下列命题：

（1）若$a=1$，$b=1$，则$\sqrt{ab}\le 1$；

（2）若$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$，则$\sqrt{ab}\le\dfrac{3}{2}$；

（3）若$a=2$，$b=3$，则$\sqrt{ab}\le\dfrac{5}{2}$；

（4）若$a=1$，$b=5$，则$\sqrt{ab}\le 3$.

根据以上命题所提供的信息，请猜想：若$a=6$，$b=7$，则$\sqrt{ab}\le$__________.

4．已知实数a，b，c满足$\dfrac{1}{2}|a-b|+\sqrt{2b+c}+c^2-c+\dfrac{1}{4}=0$，则$a\cdot(b+c)$的值为________.

5．代数式$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$的最小值是（　　）．

A．0　　B．$1+\sqrt{2}$　　C．1　　D．不存在

6．下列四组根式中是同类二次根式的一组是（　　）．

A．$\sqrt{2.5}$和$2\sqrt{0.5}$　　B．$3a\sqrt{a}$和$3b\sqrt{b}$

C．$\sqrt{a^2b}$和$\sqrt{ab^2}$　　D．$\sqrt{ab^7c^3}$和$\sqrt{\dfrac{c^3}{ab}}$

7．化简$\sqrt{9x^2-6x+1}-\left(\sqrt{3x-5}\right)^2$的结果是（　　）．

A．$6x-6$　　B．$-6x+6$　　C．-4　　D．4

8．设 a 是一个无理数，且 a，b 满足 $ab-a-b+1=0$，则 b 是一个（　　）．

A．小于 0 的有理数　　B．大于 0 的有理数

C．小于 0 的无理数　　D．大于 0 的无理数

9．已知 $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=3\sqrt{b}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)$，其中 $ab\neq0$，求 $\frac{a-5b+\sqrt{ab}}{a+b+\sqrt{ab}}$ 的值．

10．已知 $6+\sqrt{11}$ 与 $6-\sqrt{11}$ 的小数部分分别是 a，b，求 ab 的值．

11．设 a，b，c 为两两不等的有理数．

求证：$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ 为有理数．

12．设 x，y 都是正整数，且使 $\sqrt{x-116}+\sqrt{x+100}=y$，求 y 的最大值．

B 级

1．已知 x， y 为实数，$y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{9-x^2}+1}{x-3}$，则 $5x+6y=$________.

2．已知实数 a 满足 $|1999-a|+\sqrt{a-2000}=a$，则 $a-1999^2=$__________.

3．正数 m， n 满足 $m+4\sqrt{mn}-2\sqrt{m}-4\sqrt{n}+4n=3$，那么 $\dfrac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2002}$ 的值为______.

4．若 a， b 满足 $3\sqrt{a}+5|b|=7$，则 $s=2\sqrt{a}-3|b|$ 的取值范围是________.

5．已知整数 x， y 满足 $\sqrt{x}+2\sqrt{y}=50$，那么整数对（x， y）的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

6．已知 $\dfrac{1}{a}-|a|=1$，那么代数式 $\dfrac{1}{a}+|a|$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$-\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{5}$

7．设等式 $\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立，其中 x， y， a 是两两不同的实数．则代数式 $\dfrac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$ 的值为（　　）．

A．3　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．2　　D．$\dfrac{5}{3}$

8．已知 $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$，则 $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$ 的值为（　　）．

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

9．设 a， b， c 是实数，若 $a+b+c=2\sqrt{a+1}+4\sqrt{b+1}+6\sqrt{c-2}-14$，求

$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$ 的值．

10．已知 $ax^3=by^3=cz^3$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求证：$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

11．已知在等式 $\frac{ax+b}{cx+d}=s$ 中，a，b，c，d 都是有理数，x 是无理数．求：

（1）当 a，b，c，d 满足什么条件时，s 是有理数，

（2）当 a，b，c，d 满足什么条件时，s 是无理数．

12．设 $s=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}$，求不超过 s 的最大整数[s].

13．如图，C 为线段 BD 上一动点，分别过点 B，D 作 $AB\perp BD$，$ED\perp BD$，连结 AC，EC，已知 $AB=5$，$DE=1$，$BD=8$，设 $CD=x$.

（1）用含 x 的代数式表示 $AC+CE$ 的长；

（2）请问点 C 满足什么条件是 $AC+CE$ 的值最小？

（3）根据（2）中的规律和结论，请构图求出代数式 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(12-x)^2+9}$ 的最小值.