二次根式的概念与性质　答案

例1 18 提示:$(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-4)+(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1)\pi=0$　得 $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-4=0\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-1=0\end{cases}$

例2　原式=$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|,\because 1\le x\le 2,$

$\therefore \sqrt{x-1}+1>0,\sqrt{x-1}-1<0,\therefore$ 原式=$\sqrt{x-1}+1-\left(\sqrt{x-1}-1\right)$=2

例3　2　提示:由$\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=3\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)$得$2-2\sqrt{ab}-15b=0$即$\left(\sqrt{a}-5\sqrt{b}\right)$

$\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)$=0,因$a>0,b>0$故只有$\sqrt{a}-5\sqrt{b}$=0,得$a=25b$

例4 提示:由二次根式定义得$\begin{cases}x-199+y\ge 0\\ 199-x-y\ge 0\end{cases}$ 即$\begin{cases}x+y\ge 199\\ x+y\le 199\end{cases}$ $\therefore x+y=199$

$\therefore \sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$,由非负数及其性质得

$\begin{cases}3x+5y-2-m=0\\ 2x+3y-m=0\end{cases}$ 解得$m=201$

例5　20　提示:将等式整理配方得$(\sqrt{a-1}-1)^2+\left(\sqrt{b-2}-2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{c-3}-3\right)^2=0$

例6 (1)$S_{\triangle ABC}=3\times3-1-3-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

(2)$\sqrt{17a}$可看作两直角边为$4a$和a的直角三角形的斜边,$\sqrt{5a}$,$2\sqrt{2a}$类似.

$\triangle ABC$如图a所示(位置不唯一),$S_{\triangle ABC}=2a\times4a-\frac{1}{2}\times a\times 2a-\frac{1}{2}\times 2a\times 2a$

$-\frac{1}{2}\times a\times 4a=3a^2$

(3)构造△ABC 如图 b 所示，

$$S_{\Delta ABC}=3m\times4n-\frac{1}{2}\times m\times 4n-\frac{1}{2}\times 3m\times 2n-\frac{1}{2}\times 2m\times 2n=5mn.$$

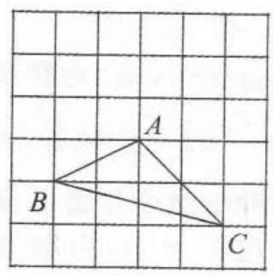

图 a

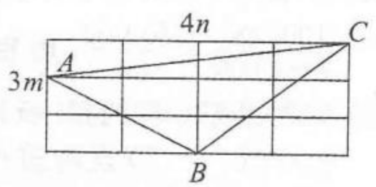

图 b

A 级

1. $\begin{cases} |x-3|-2\ge 0, \\ x^2-4x+3\ne 0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x\ge 5或x\le 1, \\ x\ne 3或x\ne 1, \end{cases}$ $\therefore x\ge 5x或x<1$.

2. 不正确，正确的答案是 $(1-a)\cdot\sqrt{-a}$

3. $\left(\frac{13}{2}\right)^2$　4. $-\frac{1}{16}$　5.B　6.D　7.D　8.B　9. $\frac{5}{7}$　10. $7\sqrt{11}-23$

11. 提示:设法证明 $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2$

12. $\because x-116, x+100, y$ 都为整数，

$\therefore \sqrt{x-116}, \sqrt{x+100}$ 必为整数.

设 $x-116=m^2, x+100=n^2(m<n, m, n为正整数)$, 得

$m^2-n^2=(x-116)-(x-100)=216$, 即 $(m+n)(n-m)$=216=4×54=2×108.

当 $m+n=108$时， y 的值最大，最大值为 108.

B 级

1. -16　2. 2000　提示：由 $a-2000\ge 0$ 得 $a\ge 2000$　3. $-\frac{1}{401}$

4. $-\frac{21}{5}\le s\le\frac{14}{3}$　提示：$\sqrt{a}=\frac{21+5s}{19}, |b|=\frac{14-3s}{19}$　5. D

6. D　提示：由 $\frac{1}{a}=1+|a|$ 得 $a>0$　7. B　8. C　9. 66

10. 提示：令 $ax^3=by^3=cz^3=k$，则 $\frac{1}{x}=\sqrt[3]{\frac{a}{k}}, \frac{1}{y}=\sqrt[3]{\frac{b}{k}}, \frac{1}{z}=\sqrt[3]{\frac{c}{k}}$

11.(1) 当 $a=c=0, d\ne 0$ 时，$s=\frac{b}{d}$ 是有理数；当 $c\ne 0$ 时，$s=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$,其中 $\frac{a}{c}$ 是有理数，$cx+d$ 是无理数,$b-\frac{ad}{c}$ 是有理数;要使 s 为有理数，只有 $b-\frac{ad}{c}=0$，即 $bc=ad$.综上知，当 $a=c=0且d\ne 0或c\ne 0$ 且 $bc=ad$ 时，s 是有理数.

(2)当 $c=0, d\ne 0$时，且 $a\ne 0, s$ 是无理数;当 $c\ne 0$时，$s=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$,

其中 $\frac{a}{c}$ 是有理数，$cx+d$ 是无理数，$b-\frac{ad}{c}$ 是有理数，所以，当 $b-\frac{ad}{c}\ne 0$，即 $bc\ne ad, s$ 为无理数.

综上知，当$c=0,a\neq 0,d\neq 0$或$c\neq 0,bc\neq ad$时,s是无理数.

12. $\because \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2}-\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

$=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-2\times\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore S=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+1+\frac{1}{1999}-\frac{1}{2000}=2000-\frac{1}{2000}$.$\therefore [S]=1999$

13.(1)AC+CE=$\sqrt{25+(8-x)^2}+\sqrt{x^2+1}$.

(2)当 A,C,E 三点共线时，AC 十 CE 的值最小.

(3)如图，作 BD=12，过点 B 作 AB⊥BD，过点 D 作 DE⊥BD，且使 AB=2,DE=3，连结 AE 交 BD 于点 C，设 BC=x，则 CD =12-x,AE 的长即为$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(12-x)^2+9}$的最小值，过点 A 作 AF//BD 交 ED 的延长线于点 F，则 DF=AB=2，EF=ED+DF=5，

AF=BD = 8 , AE=$\sqrt{AF^2+EF^2}$ $=\sqrt{12^2+5^2}$ =13，即原式的最小值为 13.