“将军饮马”模型详解与拓展

平面几何中涉及最值问题的相关定理或公理有：

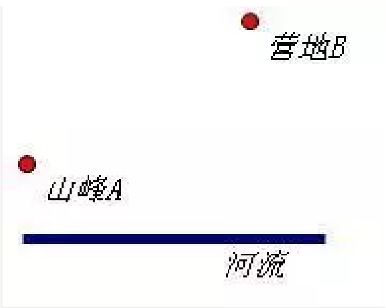
① 线段公理：两点之间，线段最短．并由此得到三角形三边关系；

② 垂线段的性质：从直线外一点到这条直线上各点所连的线段中,垂线段最短． 在一些“线段和最值”的问题中，通过翻折运动，把一些线段进行转化即可应用 ①、② 的基本图形，并求得最值，这类问题一般被称之为“将军饮马”问题。

问题提出：

唐朝诗人李欣的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河．”诗中隐含着一个有趣的数学问题．

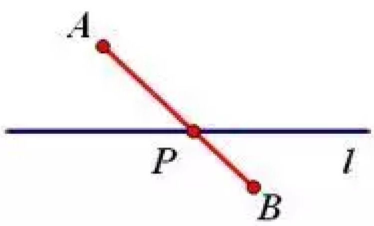
如图所示，诗中将军在观望烽火之后从山脚下的 A 点出发，走到河边饮马后再到 B 点宿营．请问怎样走才能使总的路程最短？



模型提炼：

模型【1】一定直线、异侧两定点

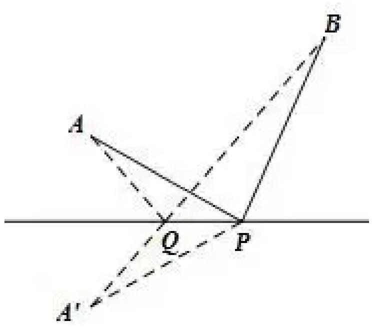
直线 l 和 l 的异侧两点 A、B，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA+PB$ 最小



解答：根据“两点之间，线段距离最短”，所以联结 AB 交直线 l 于点 P，点 P 即为所求点

模型【2】一定直线、同侧两定点

直线 l 和 l 的同侧两点 A、B，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA+PB$ 最小



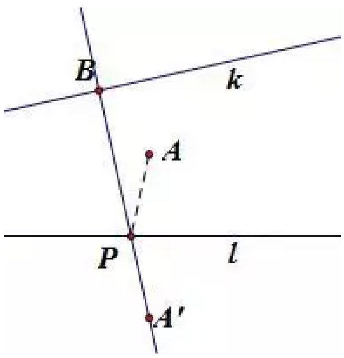
解答：

第一步：画点 A 关于直线 l 的对称点 A'（根据“翻折运动”的相关性质，点 A、A'到对称轴上任意点距离相等，如图所示，$AP=A'P$，即把一定直线同侧两定点问题转化为一定直线异侧两定点问题）

第二步：联结 $A'B$ 交直线 l 于点 Q，根据“两点之间，线段距离最短”，此时“$A'Q+QB$”最短即“$AQ+QB$”最短

模型【3】一定直线、一定点一动点

已知直线 l 和定点 A，在直线 k 上找一点 B（点 A、B 在直线 l 同侧），在直线 l 上找点 P，使得 $AP+PB$ 最小

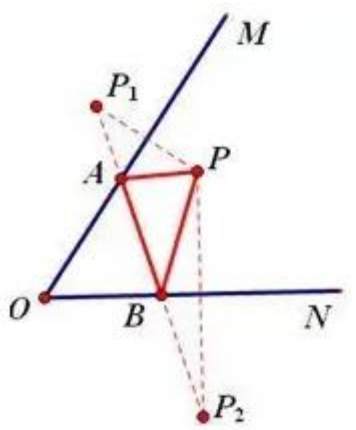


解答：

第一步：画点 A 关于直线 l 的对称点 A'

第二步：过点 A'做 $A'B\perp k$ 于点 B 且交直线 l 于点 P，根据“从直线外一点到这条直线上各点所连的线段中,垂线段最短”，可知 $A'P+PB$ 最小即 $AP+PB$ 最小

模型【4】一定点、两定直线



点 P 是∠MON 内的一点，分别在 OM，ON 上作点 A，B，使△PAB 的周长最小

解答：

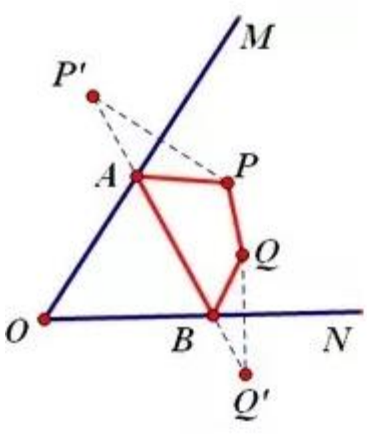
策略：两次翻折

第一步：分别画点 P 关于直线 OM、ON 的对称点 P_1、P_2

第二步：联结 P_1P_2，交 OM、ON 于点 A、点 B

（根据"翻折运动"的相关性质，$AP=AP1$，$BP=BP2$；根据"两点之间，线段距离最短"可知此时 $AP1+BP2+AB$ 最短即△ABP 周长最短）

拓展

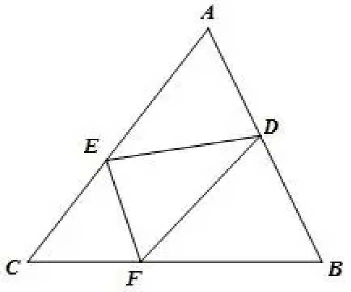


如果两定点、两定直线呢？

"如图，点 P，Q 为∠MON 内的两点，分别在 OM，ON 上作点 A，B，使四边形 $PAQB$ 的周长最小"

问题升级：

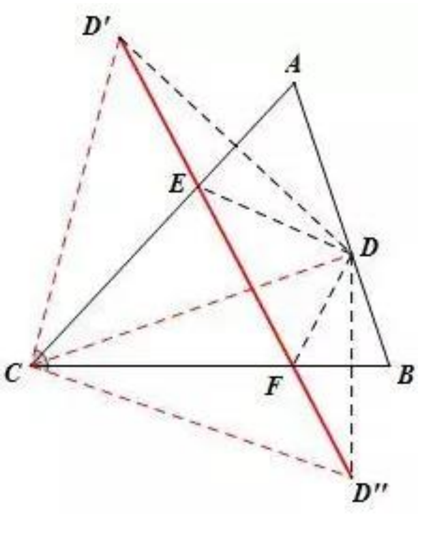
问题：如图，△*ABC* 中，点 *D*、*E*、*F* 分别在边 *AB*、*AC*、*BC* 上，试求作△*DEF* 的最小值



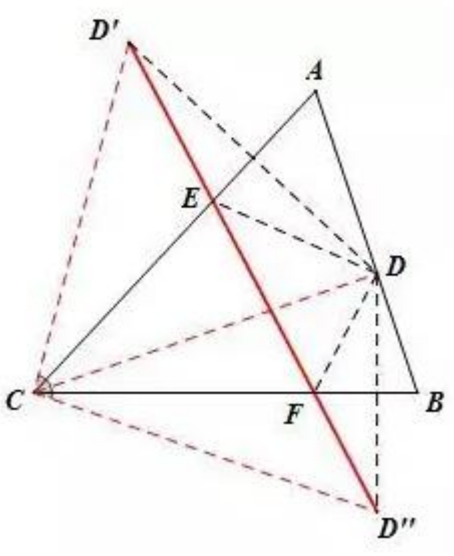
解答：

将点 *D* 视为定点，先作出△*DEF* 的最小值对应的线段 *D*’*D*’’，而后研究 *D*’*D*’’随着点 *D* 的位置变化过程中的最小值即可

无论点 *D* 位置在何处，点 *C* 对线段 *D*’*D*’’的张角不变，即∠ *D*’*CD*’’的大小不变，为 2∠*ACB*. 因而，为使得 *D*’*D*’’最小，只需要 *CD*’ = *CD*’’ = *CD* 最小即可，显然当 *CD*⊥*AB* 时，有垂线段最小，从而内接三角形△*DEF* 的周长最小



现在已经有 *CD*⊥*AB*，接下来说明点 *E*、点 *F* 也正好是△*ABC* 的高线的垂足！如下图：*D*’、*D*、*D*’’三点在以 *C* 为圆心的圆上，弧 *D*’*D* 所对圆心角为∠*D*’*CD*，



所对圆周角为∠*D*’*D*’’*D*，

故有：(1/2)∠*D*’*CD*=∠*D*’*D*”*D*.

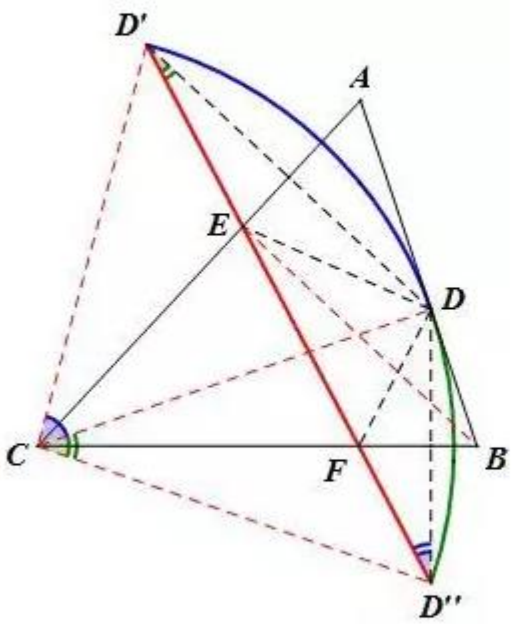
由翻折又有：(1/2)∠*D*’*CD*=∠*ECD*，

得∠*D*’*D*”*D*=∠*ECD*，

故 *C*、*E*、*D*、*D*’’四点共圆；

另一方面：∠*CDB*+∠*CD*”*B*=180°，

故 *C*、*D*、*B*、*D*’’四点共圆，综上有：*C*、*E*、*D*、*B*、*D*’’ 五点共圆，从而∠*CDB*=∠*CDB*=90°



从而得到一个重要结论：

锐角三角形的所有内接三角形中，垂足三角形周长最小。