

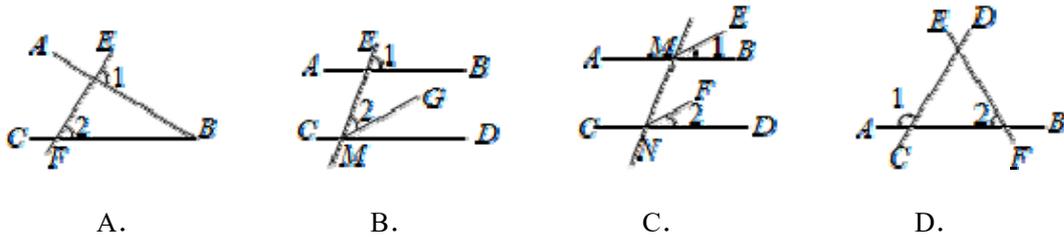
昆山市 2022-2023 学年第二学期七年级数学期末模拟卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）

1. 下列各式中计算正确的是( )

- A.  $x^8 \div x^2 = x^4 (x \neq 0)$
- B.  $(x^{-4})^2 = x^8$
- C.  $x + x^3 = x^4$
- D.  $x^{-2} \cdot x^5 = x^3$

2. 如图，下列图形中的  $\angle 1$  和  $\angle 2$  不是同位角的是( )



3. 不等式  $\frac{5x+3}{2} \geq 3x$  的解集是( )

- A.  $x \geq -3$
- B.  $x \leq -3$
- C.  $x \geq 3$
- D.  $x \leq 3$

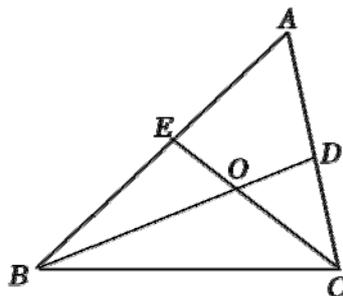
4. 如果方程组  $\begin{cases} x=3 \\ ax+by=5 \end{cases}$  的解与方程组  $\begin{cases} y=4 \\ bx+ay=2 \end{cases}$  的解相同，则  $a$ 、 $b$  的值是( )

- A.  $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$
- B.  $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$
- C.  $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$
- D.  $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

5. 下列等式从左边到右边的变形中，属于因式分解的是( )

- A.  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- B.  $4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2$
- C.  $x^2 + 3x - 1 = x(x+3) - 1$
- D.  $a^2 + 1 = a(a + \frac{1}{a})$

6. 如图， $\triangle ABC$  的角平分线  $BD$ ， $CE$  交于点  $O$ ，若  $\angle ACB = 80^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ 。则  $\angle BOE =$  ( )



- A.  $40^\circ$
- B.  $50^\circ$
- C.  $60^\circ$
- D.  $55^\circ$

7. 下列说法错误的是( )

- A. 若  $a-4 > b-4$ , 则  $a > b$                       B. 若  $\frac{a}{1+m^2} > \frac{b}{1+m^2}$ , 则  $a > b$
- C. 若  $a < b$ , 则  $am < bm$                       D. 若  $a > b$ , 则  $a+5 > b+3$

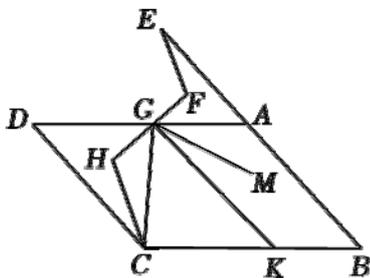
8. 将一箱苹果分给若干小朋友, 若每个小朋友分得 4 个, 则还剩余 16 个苹果; 若每个小朋友分得 6 个, 则有一个小朋友分得的苹果不足 5 个. 若小朋友的人数为  $x$  人, 则列式正确的是( )

- A.  $0 < 4x+16-6(x-1), 5$                       B.  $0, 4x+16-6(x-1) < 5$
- C.  $1 < 4x+16-6(x-1), 5$                       D.  $1, 4x+16-6(x-1) < 5$

9. 已知下列命题: ①相等的角是对顶角; ②在同一平面内, 垂直于同一条直线的两条直线平行; ③互补的两个角, 若一个为锐角, 则另一个为钝角; ④邻补角的平分线互相垂直. 其中真命题的个数为( )

- A. 3                      B. 2                      C. 1                      D. 0

10. 如图,  $E$  在线段  $BA$  的延长线上,  $\angle EAD = \angle D$ ,  $\angle B = \angle D$ ,  $EF \parallel HC$ , 连  $FH$  交  $AD$  于  $G$ ,  $\angle FGA$  的余角比  $\angle DGH$  大  $16^\circ$ ,  $K$  为线段  $BC$  上一点, 连  $CG$ , 使  $\angle CKG = \angle CGK$ , 在  $\angle AGK$  内部有射线  $GM$ ,  $GM$  平分  $\angle FGC$ . 则下列结论: ①  $AD \parallel BC$ ; ②  $GK$  平分  $\angle AGC$ ; ③  $\angle FGA = 42^\circ$ ; ④  $\angle MGK = 21^\circ$ . 其中正确结论的个数有( )



- A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 若  $5x-3y-2=0$ , 则  $2^{5x} \div 2^{3y-2} =$ \_\_\_\_\_.

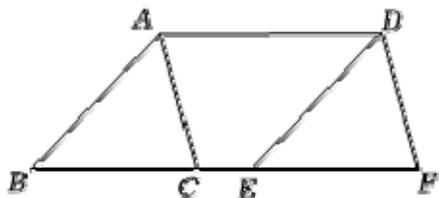
12. 正八边形每个外角的度数为\_\_\_\_\_.

13.  $-0.000000052$  米, 用科学记数法表示这个数为\_\_\_\_\_.

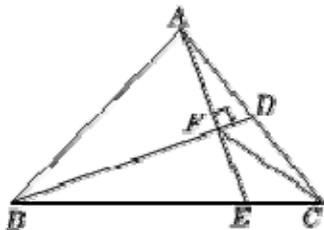
14. 请写出一个以  $x, y$  为未知数的二元一次方程组, 且同时满足下列两个条件: ①由两个二元一次方程组成; ②方程组的解为  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ . 这样的方程组可以是\_\_\_\_\_.

15. 命题“两个全等三角形的周长相等”的逆命题是\_\_\_\_\_.

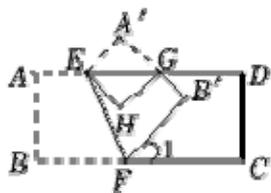
16. 如图，将  $\triangle ABC$  沿  $BC$  方向平移  $6\text{cm}$  得到  $\triangle DEF$ ，若  $BF = 5CE$ ，则  $BC$  的长为\_\_\_\_\_.



17. 如图，在  $\triangle ABC$  中，已知  $BD$  为  $\triangle ABC$  的中线，过点  $A$  作  $AE \perp BD$  分别交  $BD$ 、 $BC$  于点  $F$ 、 $E$ ，连接  $CF$ ，若  $DF = 2$ ， $AF = 6$ ， $BE:EC = 3:1$ ，则  $S_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ .



18. 如图，将长方形纸片  $ABCD$  沿  $EF$  折叠后，点  $A$ ， $B$  分别落在  $A'$ ， $B'$  的位置，再沿  $AD$  边将  $\angle A'$  折叠到  $\angle H$  处，已知  $\angle 1 = 50^\circ$ ，则  $\angle FEH = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ .



三. 解答题 (共 9 小题, 满分 66 分)

19. (6 分) 计算:

(1)  $-1^{2018} \times 4 + (-\frac{1}{3})^{-2} + (\pi - 5)^0$ ;

(2)  $(-2a^3)^2 + (a^2)^3 - 2a \cdot a^5$ .

20. (6 分) 分解因式:

(1)  $-3a^2 + 6ab - 3b^2$ ;

(2)  $9a^2(x - y) + 4b^2(y - x)$ .

21. (6分) 解方程组或不等式组:

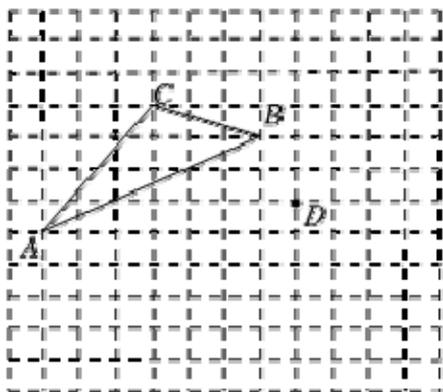
$$(1) \begin{cases} 3x+4y=2 \\ 2x-y=5 \end{cases} .$$

$$(2) \begin{cases} x-3(x-1) < 7 \\ x-2, \frac{2x-3}{3} \end{cases} .$$

22. (4分) 先化简, 再求值:  $[(2x+3y)^2 - (2x+y)(2x-y)] \div (-2y)$ , 其中  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ .

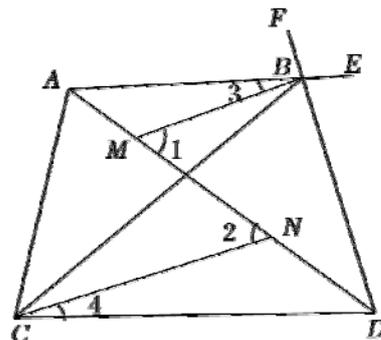
23. (8分) 在正方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1 个单位长度,  $\triangle ABC$  的三个顶点的位置如图所示. 现将  $\triangle ABC$  平移, 使点  $C$  变换为点  $D$ , 点  $A$ 、 $B$  的对应点分别是点  $E$ 、 $F$ .

- (1) 在图中请画出  $\triangle ABC$  平移后得到的  $\triangle EFD$ ;
- (2) 在图中画出  $\triangle ABC$  的  $AB$  边上的高  $CH$ ;
- (3) 若连接  $CD$ 、 $AE$ , 则这两条线段之间的位置关系是\_\_\_\_\_;
- (4) 线段  $AC$  扫过的面积为\_\_\_\_\_.



24. (8分) 如图,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ .

- (1) 试说明  $\angle 3 = \angle 4$ ;
- (2) 若  $\angle BAD = \angle BDA$ , 且  $\angle EBF = 110^\circ$ , 求  $\angle ADC$  的度数.



25. (8分) 学校为了奖励在“诗词大赛”中获奖同学, 准备购买甲、乙两种奖品, 已知购买 1 件甲奖品、4 件乙奖品, 共需 240 元; 购买 2 件甲奖品、1 件乙奖品, 共需 165 元.

(1) 求每件甲奖品和每件乙奖品各多少元?

(2) 如果学校准备购买甲、乙两种奖品共 40 件, 总费用不超过 2140 元, 那么至少购买多少件乙奖品?

26. (10分) 阅读理解:

对任意一个两位数  $\overline{ab}$ , 如果满足个位数字与十位数字互不相同, 且都不为零, 那么称这个两位数为“互异数”. 将一个“互异数”的个位数字与十位数字对调后得到一个新的两位数, 把这个新两位数与原两位数的和与 11 的商记为  $f(\overline{ab})$ .

例如:  $\overline{ab}=12$ , 对调个位数字与十位数字得到新两位数 21, 新两位数与原两位数的和为  $21+12=33$ , 和与 11 的商为  $33 \div 11=3$ , 所以  $f(12)=3$ .

问题呈现:

填空:

①下列两位数: 30, 31, 33 中, “互异数”为\_\_\_\_\_.

②计算:  $f(\overline{23})=$ \_\_\_\_,  $f(\overline{mn})=$ \_\_\_\_\_.

数学思考:

如果一个“互异数”  $b$  的十位数字是  $k$ , 个位数字是  $2(k+1)$ , 且  $f(b)=11$ , 请求出“互异数”  $b$ .

问题解决:

如果一个“互异数”  $m$  的十位数字是  $x$ , 个位数字是  $x-4$ , 另一个“互异数”  $n$  的十位数字是  $x-5$ , 个位数字是 2, 且满足  $f(m)-f(n)<8$ , 请直接写出满足条件的  $x$  的值.

27. (10分) 如图1至图2, 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle BAC = \alpha^\circ$ , 点 $D$ 在边 $AC$ 所在直线上, 作 $DE$ 垂直于直线 $BC$ , 垂足为点 $E$ ;  $BM$ 为 $\triangle ABC$ 的角平分线,  $\angle ADE$ 的平分线交直线 $BC$ 于点 $G$ .

特例感悟:

(1) 如图1, 延长 $AB$ 交 $DG$ 于点 $F$ , 若 $BM \parallel DG$ ,  $\angle F = 30^\circ$ .

解决问题:

①  $\angle ABC = \underline{\quad}^\circ$ ;

② 求证:  $AC \perp AB$ ;

深入探究:

(2) 如图2, 当 $\alpha < 90$ ,  $DG$ 与 $BM$ 反向延长线交于点 $H$ , 用含 $\alpha$ 的代数式表示 $\angle BHD = \underline{\quad}$ ;

拓展延伸:

(3) 当点 $D$ 在直线 $AC$ 上移动时, 若射线 $DG$ 与射线 $BM$ 相交, 设交点为 $N$ , 直接写出 $\angle BND$ 与 $\alpha$ 的关系式.

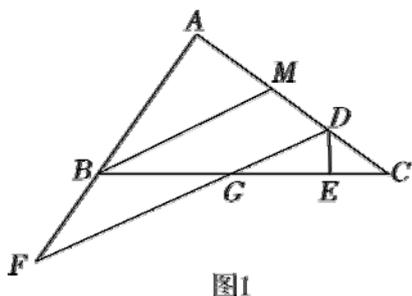


图1

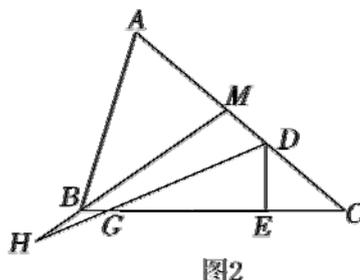
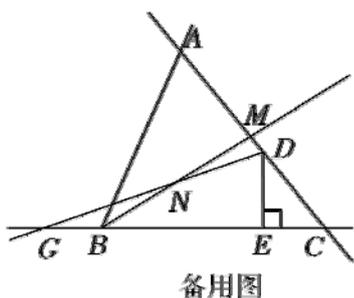
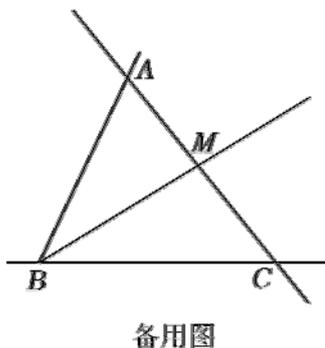


图2



备用图



备用图

## 参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）

1. 下列各式中计算正确的是( )

A.  $x^8 \div x^2 = x^4 (x \neq 0)$

B.  $(x^{-4})^2 = x^8$

C.  $x + x^3 = x^4$

D.  $x^{-2} \cdot x^5 = x^3$

【详解】解：A.  $x^8 \div x^2 = x^6 \neq x^4 (x \neq 0)$ ，故 A 不正确；

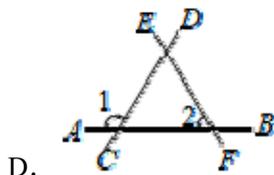
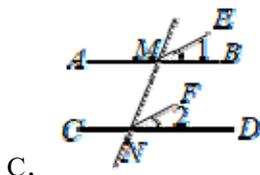
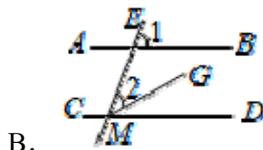
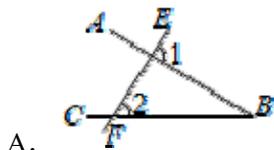
B.  $(x^{-4})^2 = x^{-8} \neq x^8$ ，故 B 不正确；

C.  $x$  与  $x^3$  不是同类项不能加减，故 C 不正确；

D.  $x^{-2} \cdot x^5 = x^3$ ，故 D 正确。

故本题选：D。

2. 如图，下列图形中的  $\angle 1$  和  $\angle 2$  不是同位角的是( )



【详解】解：A 中的  $\angle 1$  与  $\angle 2$ ，是直线  $AB$ 、 $BC$  被直线  $EF$  所截的同位角，因此 A 不合题意；

B 中的  $\angle 1$  与  $\angle 2$ ，是直线  $AB$ 、 $MG$  被直线  $EM$  所截的同位角，因此 B 不合题意；

C 中的  $\angle 1$  与  $\angle 2$ ，没有公共的截线，因此不是同位角，所以 C 符合题意；

D 中的  $\angle 1$  与  $\angle 2$ ，是直线  $CD$ 、 $EF$  被直线  $AB$  所截的同位角，因此 D 不合题意。

故本题选：C。

3. 不等式  $\frac{5x+3}{2} \geq 3x$  的解集是( )

A.  $x \geq -3$

B.  $x \leq -3$

C.  $x \geq 3$

D.  $x \leq 3$

【详解】解：去分母得： $5x+3 \geq 6x$ ，

移项合并同类项得： $x \leq 3$ 。

故本题选：D。

4. 如果方程组  $\begin{cases} x=3 \\ ax+by=5 \end{cases}$  的解与方程组  $\begin{cases} y=4 \\ bx+ay=2 \end{cases}$  的解相同, 则  $a$ 、 $b$  的值是( )

- A.  $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

【详解】解: 根据题意得: 方程组  $\begin{cases} ax+by=5 \\ bx+ay=2 \end{cases}$  的解为  $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ ,

$$\therefore \begin{cases} 3a+4b=5 \\ 3b+4a=2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}.$$

故本题选: B.

5. 下列等式从左边到右边的变形中, 属于因式分解的是( )

- A.  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$       B.  $4m^2+4m+1=(2m+1)^2$   
 C.  $x^2+3x-1=x(x+3)-1$       D.  $a^2+1=a(a+\frac{1}{a})$

【详解】解:  $\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2$  是多项式乘以多项式运算, 不是因式分解,

$\therefore A$  不合题意;

$\because 4m^2+4m+1=(2m+1)^2$  是因式分解,

$\therefore B$  符合题意;

$\because x^2+3x-1=x(x+3)-1$  的结果不是整式的乘积形式, 不是因式分解,

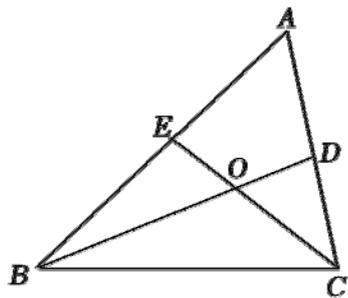
$\therefore C$  不合题意;

$\because a^2+1=a(a+\frac{1}{a})$  的结果中含有分式, 不是整式的乘积形式, 不是因式分解,

$\therefore D$  不合题意.

故本题选: B.

6. 如图,  $\triangle ABC$  的角平分线  $BD$ ,  $CE$  交于点  $O$ , 若  $\angle ACB=80^\circ$ ,  $\angle A=60^\circ$ . 则  $\angle BOE=($  )



- A.  $40^\circ$       B.  $50^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $55^\circ$

**【详解】解：**  $\because \angle ACB = 80^\circ$ ，  $\angle A = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$  的角平分线  $BD$ ，  $CE$  交于点  $O$ ，

$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$ ，  $\angle ACE = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle AEC = 180^\circ - \angle A - \angle ACE = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle AEC$  是  $\triangle BOE$  的外角，

$\therefore \angle BOE = \angle AEC - \angle ABD = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ 。

故本题选：C。

7. 下列说法错误的是( )

A. 若  $a - 4 > b - 4$ ， 则  $a > b$

B. 若  $\frac{a}{1+m^2} > \frac{b}{1+m^2}$ ， 则  $a > b$

C. 若  $a < b$ ， 则  $am < bm$

D. 若  $a > b$ ， 则  $a + 5 > b + 3$

**【详解】解：** A、不等式两边都加上4，不等号的方向不变，即  $a > b$ ，原变形正确，不合题意；

B、不等式两边都乘  $1+m^2$ ，不等号的方向不变，即  $a > b$ ，原变形正确，不合题意；

C、不等式两边都乘  $m$ ，必须规定  $m \neq 0$ ，才有  $am < bm$ ，原变形错误，符合题意；

D、不等式两边都加上5，不等号的方向不变，即  $a + 5 > b + 5$ ，所以  $a + 5 > b + 3$ ，原变形正确，不合题意。

故本题选：C。

8. 将一箱苹果分给若干小朋友，若每个小朋友分得4个，则还剩余16个苹果；若每个小朋友分得6个，则有一个小朋友分得的苹果不足5个。若小朋友的人数为  $x$  人，则列式正确的是( )

A.  $0 < 4x + 16 - 6(x-1),, 5$

B.  $0,, 4x + 16 - 6(x-1) < 5$

C.  $1 < 4x + 16 - 6(x-1),, 5$

D.  $1,, 4x + 16 - 6(x-1) < 5$

**【详解】解：** 根据小朋友的人数为  $x$ ，

$\therefore$  每位小朋友分4个苹果，则还剩16个苹果；若每位小朋友分6个苹果，则有一个小朋友所分苹果不足5个，

$\therefore 1,, 4x + 16 - 6(x-1) < 5$ 。

故本题选：D。

9. 已知下列命题：①相等的角是对顶角；②在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行；③互补的两个角，若一个为锐角，则另一个为钝角；④邻补角的平分线互相垂直。其中真命题的个数为( )

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

**【详解】解：** ①相等的角是对顶角，错误，对顶角既要考虑大小，还要考虑位置；

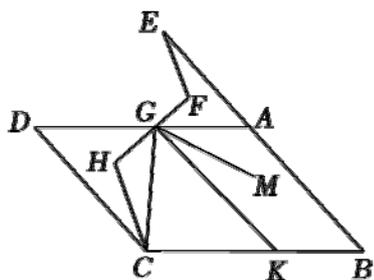
②在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行，正确；

③互补的两个角一定是一个锐角，另一个为钝角，正确；

④邻补角的平分线互相垂直，正确。

故本题选：A。

10. 如图， $E$  在线段  $BA$  的延长线上， $\angle EAD = \angle D$ ， $\angle B = \angle D$ ， $EF \parallel HC$ ，连  $FH$  交  $AD$  于  $G$ ， $\angle FGA$  的余角比  $\angle DGH$  大  $16^\circ$ ， $K$  为线段  $BC$  上一点，连  $CG$ ，使  $\angle CKG = \angle CGK$ ，在  $\angle AGK$  内部有射线  $GM$ ， $GM$  平分  $\angle FGC$ 。则下列结论：①  $AD \parallel BC$ ；②  $GK$  平分  $\angle AGC$ ；③  $\angle FGA = 42^\circ$ ；④  $\angle MGK = 21^\circ$ 。其中正确结论的个数有( )



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【详解】解：∵  $\angle EAD = \angle D$ ， $\angle B = \angle D$ ，

∴  $\angle EAD = \angle B$ ，

∴  $AD \parallel BC$ ，故①正确；

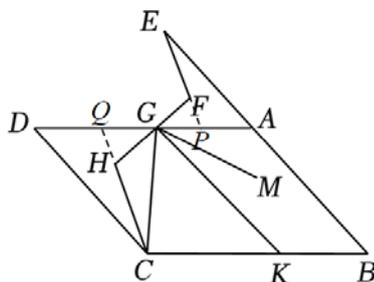
∴  $\angle AGK = \angle CKG$ ，

∵  $\angle CKG = \angle CGK$ ，

∴  $\angle AGK = \angle CGK$ ，

∴  $GK$  平分  $\angle AGC$ ，故②正确；

如图，延长  $EF$  交  $AD$  于  $P$ ，延长  $CH$  交  $AD$  于  $Q$ ，



∵  $EF \parallel CH$ ，

∴  $\angle EPQ = \angle CQP$ ，

∵  $\angle EPQ = \angle E + \angle EAG$ ，

∴  $\angle CQG = \angle E + \angle EAG$ ，

∴  $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle HCK + \angle CQG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle E + \angle EAG + \angle HCK = 180^\circ;$$

$$\therefore \angle FGA \text{ 的余角比 } \angle DGH \text{ 大 } 16^\circ,$$

$$\therefore 90^\circ - \angle FGA - \angle DGH = 16^\circ,$$

$$\therefore \angle FGA = \angle DGH,$$

$$\therefore 90^\circ - 2\angle FGA = 16^\circ,$$

$$\therefore \angle FGA = \angle DGH = 37^\circ, \text{ 故③错误};$$

$$\text{设 } \angle AGM = \alpha, \angle MGK = \beta,$$

$$\therefore \angle AGK = \alpha + \beta,$$

$$\therefore GK \text{ 平分 } \angle AGC,$$

$$\therefore \angle CGK = \angle AGK = \alpha + \beta,$$

$$\therefore GM \text{ 平分 } \angle FGC,$$

$$\therefore \angle FGM = \angle CGM,$$

$$\therefore \angle FGA + \angle AGM = \angle MGK + \angle CGK,$$

$$\therefore 37^\circ + \alpha = \beta + \alpha + \beta,$$

$$\therefore \beta = 18.5^\circ,$$

$$\therefore \angle MGK = 18.5^\circ, \text{ 故④错误}.$$

故本题选：B.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. 若  $5x - 3y - 2 = 0$ ，则  $2^{5x} \div 2^{3y-2} = \underline{\quad}$ .

【详解】解：由  $5x - 3y - 2 = 0$  得：  $5x - 3y = 2$ ，

$$\therefore 2^{5x} \div 2^{3y-2}$$

$$= 2^{5x-(3y-2)}$$

$$= 2^{5x-3y+2}$$

$$= 2^{2+2}$$

$$= 2^4$$

$$= 16.$$

故本题答案为：16.

12. 正八边形每个外角的度数为  $\underline{\quad}$ .

【详解】解：因为任何一个多边形的外角和都是  $360^\circ$ ，

所以正八边形的每个外角的度数是： $360^\circ \div 8 = 45^\circ$  .

故本题答案为： $45^\circ$  .

13.  $-0.000000052$  米，用科学记数法表示这个数为\_\_\_\_\_.

【详解】解： $-0.000000052 = -5.2 \times 10^{-8}$  米.

故本题答案为： $-5.2 \times 10^{-8}$  米.

14. 请写出一个以  $x$  ,  $y$  为未知数的二元一次方程组，且同时满足下列两个条件：①由两个二元一次方程

组成；②方程组的解为  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$  . 这样的方程组可以是\_\_\_\_\_.

【详解】解：方程组可以是  $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$  ,

把  $x=1$ 、 $y=2$  代入每个方程，每个方程的左右两边分别相等，满足题意.

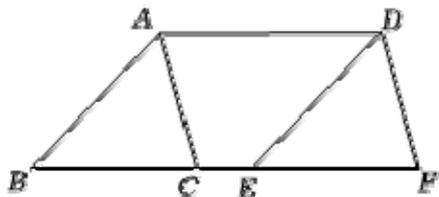
故本题答案为： $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$  .

15. 命题“两个全等三角形的周长相等”的逆命题是\_\_\_\_\_.

【详解】解：命题“两个全等三角形的周长相等”的逆命题是周长相等的两个三角形全等.

故本题答案为：周长相等的两个三角形全等.

16. 如图，将  $\triangle ABC$  沿  $BC$  方向平移  $6\text{cm}$  得到  $\triangle DEF$ ，若  $BF = 5CE$ ，则  $BC$  的长为\_\_\_\_\_.



【详解】解：由平移可得： $BE = CF = AD = 6\text{cm}$  ,

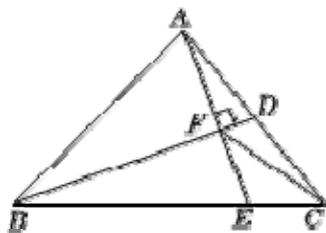
$\therefore BF = BE + EF = 6 + (CF - CE) = 6 + 6 - CE = 5CE$  ,

$\therefore CE = 2\text{cm}$  ,

$\therefore BC = BE - CE = 6 - 2 = 4(\text{cm})$  .

故本题答案为： $4\text{cm}$  .

17. 如图，在  $\triangle ABC$  中，已知  $BD$  为  $\triangle ABC$  的中线，过点  $A$  作  $AE \perp BD$  分别交  $BD$ 、 $BC$  于点  $F$ 、 $E$ ，连接  $CF$ ，若  $DF = 2$ ， $AF = 6$ ， $BE : EC = 3 : 1$ ，则  $S_{\triangle ABC} =$  \_\_\_\_\_.



【详解】解：∵  $AE \perp BD$ ， $DF = 2$ ， $AF = 6$ ，

$$\therefore S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} DF \cdot AF = 6，$$

∵  $BD$  为  $\triangle ABC$  的中线，

$$\therefore S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ADF} = 6，S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}，$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle BCF}，$$

$$\therefore BE : EC = 3 : 1，$$

$$\therefore 3S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BEF}，4S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ABC}，$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle BCF} = 4S_{\triangle CEF}，$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF} + S_{\triangle ACF}，$$

$$\therefore 4S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF} + S_{\triangle ACF}，$$

$$4(12 + S_{\triangle CEF}) = 4S_{\triangle CEF} + 4S_{\triangle CEF} + 12，$$

解得：  $S_{\triangle CEF} = 9$ ，

$$\therefore S_{\triangle ACE} = 9 + 12 = 21，$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4 \times 21 = 84。$$

故本题答案为：84.

18. 如图，将长方形纸片  $ABCD$  沿  $EF$  折叠后，点  $A$ ， $B$  分别落在  $A'$ ， $B'$  的位置，再沿  $AD$  边将  $\angle A'$  折叠到  $\angle H$  处，已知  $\angle 1 = 50^\circ$ ，则  $\angle FEH = \underline{\quad}^\circ$ 。



【详解】解：由折叠可知：  $\angle BFE = \angle B'FE$ ， $\angle AEF = \angle A'EF$ ， $\angle A'EG = \angle HEG$ ，

$$\therefore \angle 1 + \angle BFE + \angle B'FE = 180^\circ，\angle 1 = 50^\circ，$$

$$\therefore \angle BFE = 65^\circ,$$

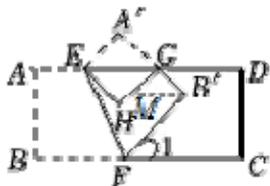
$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle BFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = 115^\circ,$$

$$\therefore \angle A'EF = 115^\circ,$$

如图，过  $B'$  作  $B'M \parallel AD$ ，则  $\angle DGB' = \angle GB'M$ ，



$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle MB'F = \angle 1,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle DGB' = \angle GB'F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGB' = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle A'GE = \angle DGB' = 40^\circ,$$

$$\because \angle A' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HEG = \angle A'EG = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle A'EH = 2 \times 50^\circ = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle FEH = \angle A'EF - \angle A'EH = 115^\circ - 100^\circ = 15^\circ.$$

故本题答案为：15.

### 三. 解答题（共 9 小题，满分 66 分）

19.（6 分）计算：

$$(1) -1^{2018} \times 4 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + (\pi - 5)^0;$$

$$(2) (-2a^3)^2 + (a^2)^3 - 2a \cdot a^5.$$

**【详解】解：** (1)  $-1^{2018} \times 4 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + (\pi - 5)^0$

$$= -1 \times 4 + 9 + 1$$

$$= -4 + 9 + 1$$

$$= 6;$$

$$(2) (-2a^3)^2 + (a^2)^3 - 2a \cdot a^5$$

$$= 4a^6 + a^6 - 2a^6$$

$$= 3a^6 .$$

20. (6分) 分解因式:

$$(1) -3a^2 + 6ab - 3b^2 ;$$

$$(2) 9a^2(x-y) + 4b^2(y-x) .$$

**【详解】解:** (1) 原式  $= -3(a^2 - 2ab + b^2) = -3(a-b)^2 ;$

$$(2) 原式 = (x-y)(3a+2b)(3a-2b) .$$

21. (6分) 解方程组或不等式组:

$$(1) \begin{cases} 3x+4y=2 \\ 2x-y=5 \end{cases} .$$

$$(2) \begin{cases} x-3(x-1) < 7 \\ x-2, \frac{2x-3}{3} \end{cases} .$$

**【详解】解:** (1)  $\begin{cases} 3x+4y=2 \textcircled{1} \\ 2x-y=5 \textcircled{2} \end{cases} ,$

$$\textcircled{2} \times 4 \text{ 得: } 8x-4y=20 \textcircled{3} ,$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \text{ 得: } 11x=22 ,$$

$$\text{解得: } x=2 ,$$

$$\text{将 } x=2 \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得: } 6+4y=2 ,$$

$$\text{解得: } y=-1 ,$$

$$\therefore \text{ 方程组的解为 } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} ;$$

$$(2) \begin{cases} x-3(x-1) < 7 \textcircled{1} \\ x-2, \frac{2x-3}{3} \textcircled{2} \end{cases} ,$$

$$\text{解不等式 } \textcircled{1} \text{ 得: } x > -2 ,$$

$$\text{解不等式 } \textcircled{2} \text{ 得: } x, 3 ,$$

$$\therefore \text{ 不等式组的解集为 } -2 < x, 3 .$$

22. (4分) 先化简, 再求值:  $[(2x+3y)^2 - (2x+y)(2x-y)] \div (-2y)$ , 其中  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ .

**【详解】解:** 原式  $= (4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x^2 + y^2) \div (-2y)$

$$= (12xy + 10y^2) \div (-2y)$$

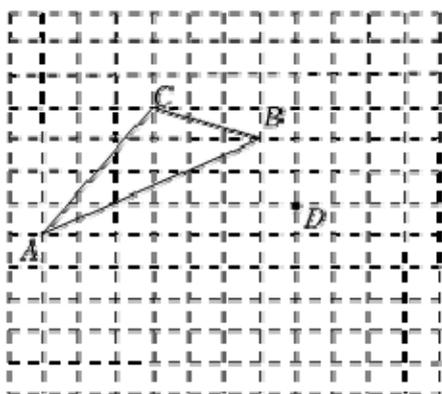
$$= -6x - 5y ,$$

当  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{2}$  时,

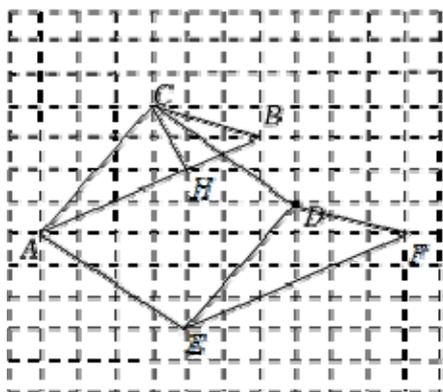
原式  $= -2 + 2.5 = 0.5$ .

23. (8分) 在正方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1 个单位长度,  $\triangle ABC$  的三个顶点的位置如图所示. 现将  $\triangle ABC$  平移, 使点  $C$  变换为点  $D$ , 点  $A$ 、 $B$  的对应点分别是点  $E$ 、 $F$ .

- (1) 在图中请画出  $\triangle ABC$  平移后得到的  $\triangle EFD$ ;
- (2) 在图中画出  $\triangle ABC$  的  $AB$  边上的高  $CH$ ;
- (3) 若连接  $CD$ 、 $AE$ , 则这两条线段之间的位置关系是\_\_\_\_\_;
- (4) 线段  $AC$  扫过的面积为\_\_\_\_\_.



【详解】解: (1) 如图,  $\triangle EFD$  即为所求;



- (2) 如图, 线段  $CH$  即为所求;
- (3)  $CD \parallel AE$ ,

故本题答案为:  $CD \parallel AE$ ;

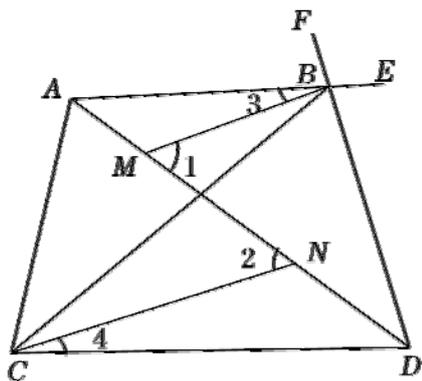
(4) 线段  $AC$  扫过的面积  $= 7 \times 7 - 4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 25$ ,

故本题答案为: 25.

24. (8分) 如图,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ .

- (1) 试说明  $\angle 3 = \angle 4$ ;

(2) 若  $\angle BAD = \angle BDA$ ，且  $\angle EBF = 110^\circ$ ，求  $\angle ADC$  的度数.



**【详解】**(1) 证明:  $\because \angle 1 = \angle 2$ ,

$\therefore BM \parallel CN$ ,

$\therefore \angle MBC = \angle NCB$ ,

$\because AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$ ,

$\therefore \angle MBC + \angle 3 = \angle NCB + \angle 4$ ,

即  $\angle 3 = \angle 4$ ;

(2) 解:  $\because \angle EBF = \angle ABD$ ,  $\angle EBF = 110^\circ$ ,

$\therefore \angle ABD = 110^\circ$ ,

$\because \angle BAD + \angle BDA + \angle ABD = 180^\circ$ ,  $\angle BAD = \angle BDA$ ,

$\therefore \angle BAD = \angle BDA = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 110^\circ) = 35^\circ$ ,

$\because AB \parallel CD$ ,

$\therefore \angle ADC = \angle BAD = 35^\circ$ .

25. (8分) 学校为了奖励在“诗词大赛”中获奖同学, 准备购买甲、乙两种奖品, 已知购买 1 件甲奖品、4 件乙奖品, 共需 240 元; 购买 2 件甲奖品、1 件乙奖品, 共需 165 元.

(1) 求每件甲奖品和每件乙奖品各多少元?

(2) 如果学校准备购买甲、乙两种奖品共 40 件, 总费用不超过 2140 元, 那么至少购买多少件乙奖品?

**【详解】**解: (1) 设每件甲奖品的价格是  $x$  元, 每件乙奖品的价格是  $y$  元,

根据题意得: 
$$\begin{cases} x + 4y = 240 \\ 2x + y = 165 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 60 \\ y = 45 \end{cases}$$

答: 每件甲奖品的价格是 60 元, 每件乙奖品的价格是 45 元;

(2) 设购买  $m$  件乙奖品, 则购买  $(40 - m)$  件甲奖品,

根据题意得：  $60(40 - m) + 45m = 2140$ ，

解得：  $m = \frac{52}{3}$ ，

又  $\because m$  为正整数，

$\therefore m$  的最小值为 18，

答：至少购买 18 件乙奖品。

26. (10 分) 阅读理解：

对任意一个两位数  $\overline{ab}$ ，如果满足个位数字与十位数字互不相同，且都不为零，那么称这个两位数为“互异数”。将一个“互异数”的个位数字与十位数字对调后得到一个新的两位数，把这个新两位数与原两位数的和与 11 的商记为  $f(\overline{ab})$ 。

例如： $\overline{ab} = 12$ ，对调个位数字与十位数字得到新两位数 21，新两位数与原两位数的和为  $21 + 12 = 33$ ，和与 11 的商为  $33 \div 11 = 3$ ，所以  $f(12) = 3$ 。

问题呈现：

填空：

① 下列两位数：30，31，33 中，“互异数”为\_\_\_\_\_。

② 计算： $f(\overline{23}) = \underline{\quad}$ ， $f(\overline{mn}) = \underline{\quad}$ 。

数学思考：

如果一个“互异数”  $b$  的十位数字是  $k$ ，个位数字是  $2(k+1)$ ，且  $f(b) = 11$ ，请求出“互异数”  $b$ 。

问题解决：

如果一个“互异数”  $m$  的十位数字是  $x$ ，个位数字是  $x-4$ ，另一个“互异数”  $n$  的十位数字是  $x-5$ ，个位数字是 2，且满足  $f(m) - f(n) < 8$ ，请直接写出满足条件的  $x$  的值。

**【详解】解：**问题呈现：①  $\because$  对任意一个两位数  $\overline{ab}$ ，如果满足个位数字与十位数字互不相同，且都不为零，那么称这个两位数为“互异数”，

$\therefore$  为“互异数”的是 31，

故本题答案为：31；

②  $f(\overline{23}) = (23 + 32) \div 11 = 5$ ，

$f(\overline{mn}) = (10m + n + 10n + m) \div 11 = m + n$ ，

故本题答案为：5， $m + n$ ；

数学思考：∵  $f(\overline{mn}) = m + n$ ， $f(b) = 11$ ，

$$\therefore k + 2(k + 1) = 11,$$

解得： $k = 3$ ，

$$\therefore b = 10 \times 3 + 2 \times (3 + 1) = 38;$$

问题解决：∵  $f(m) - f(n) < 8$ ，

$$\therefore (x + x - 4) - (x - 5 + 2) < 8,$$

解得： $x < 9$ ，

$$\therefore x - 4 > 0, \quad x - 5 > 0,$$

$$\therefore x > 5,$$

∴  $5 < x < 9$ ，且  $x$  为正整数，

$$\therefore x = 6, 7, 8,$$

①当  $x = 6$  时， $m = 62$ ， $n = 12$ ，

②当  $x = 7$  时， $m = 73$ ， $n = 22$ （不合题意，舍去），

③当  $x = 8$  时， $m = 84$ ， $n = 32$ ，

综上， $x$  为 6 或 8.

27. (10分) 如图 1 至图 2，在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = \alpha^\circ$ ，点  $D$  在边  $AC$  所在直线上，作  $DE$  垂直于直线  $BC$ ，垂足为点  $E$ ； $BM$  为  $\triangle ABC$  的角平分线， $\angle ADE$  的平分线交直线  $BC$  于点  $G$ 。

特例感悟：

(1) 如图 1，延长  $AB$  交  $DG$  于点  $F$ ，若  $BM \parallel DG$ ， $\angle F = 30^\circ$ 。

解决问题：

①  $\angle ABC = \underline{\quad}^\circ$ ；

② 求证： $AC \perp AB$ ；

深入探究：

(2) 如图 2，当  $\alpha < 90$ ， $DG$  与  $BM$  反向延长线交于点  $H$ ，用含  $\alpha$  的代数式表示  $\angle BHD = \underline{\quad}$ ；

拓展延伸：

(3) 当点  $D$  在直线  $AC$  上移动时，若射线  $DG$  与射线  $BM$  相交，设交点为  $N$ ，直接写出  $\angle BND$  与  $\alpha$  的关系式。

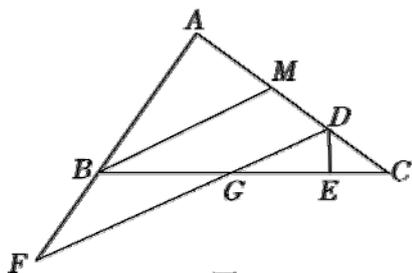


图1

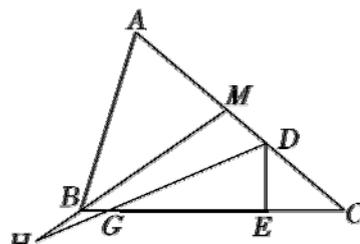
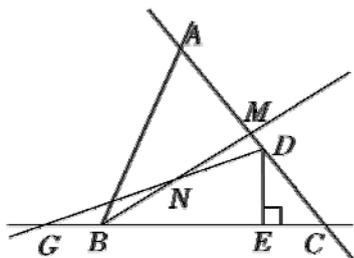
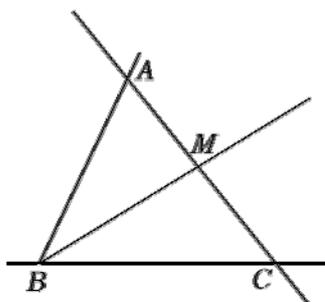


图2



备用图



备用图

【详解】解：(1) ①  $\because BM \parallel DG$  ,

$$\therefore \angle ABM = \angle F = 30^\circ ,$$

$\because BM$  为  $\triangle ABC$  的角平分线,

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ABM = 60^\circ ,$$

故本题答案为:  $60^\circ$  ;

②证明: 由①得:  $\angle CBM = \angle ABM = 30^\circ$  ,

$$\because BM \parallel DG ,$$

$$\therefore \angle DGC = \angle CBM = 30^\circ ,$$

$$\because DE \perp BC ,$$

$$\therefore \angle EDG = 60^\circ ,$$

$\because DG$  平分  $\angle ADE$  ,

$$\therefore \angle ADF = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ ,$$

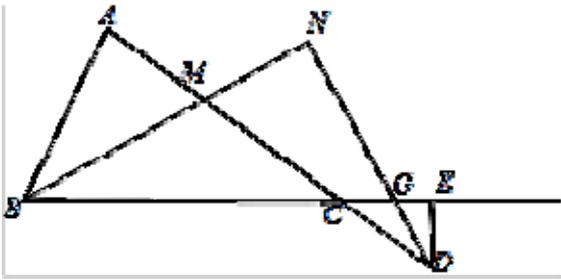
$$\therefore AC \perp AB ;$$

(2) 由八字模型可得:  $\triangle BHG$  和  $\triangle DEG$  中,

$$\angle BHD = \angle EDG + 90^\circ - \angle HBG = \frac{1}{2} \angle ADE + 90^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC) = \frac{1}{2} (\angle ADE + \angle ABC) - 90^\circ = 45^\circ - \frac{1}{2} \alpha ,$$

故本题答案为:  $45^\circ - \frac{1}{2} \alpha$  ;

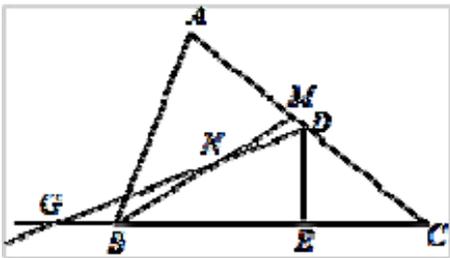
(3) ①如图,



由八字模型可得： $\triangle ABM$  和  $\triangle NMD$  中，

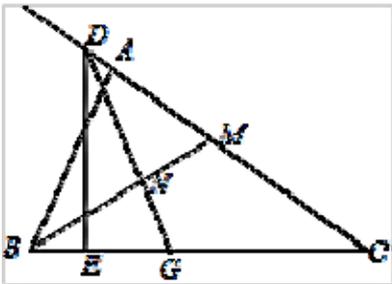
$$\angle BND = \angle ABN + \angle A - \angle MDN = \frac{1}{2}\angle ABC + \alpha - \frac{1}{2}(90^\circ - \angle ACB) = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) + \alpha - 45^\circ = 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha ;$$

②如图，



由四边形的内角和得： $\angle BND = 360^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ADE = 270^\circ - \frac{1}{2}(270^\circ - \alpha) = 135^\circ + \frac{1}{2}\alpha ;$

③如图，



由八字模型可得： $\angle BND + \angle ABM = \angle ADG + \angle DAB ,$

$$\therefore \angle BND = \frac{1}{2}\angle ADE + (180^\circ - \alpha) - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(90^\circ - \angle ACB) + (180^\circ - \alpha) - \frac{1}{2}\angle ABC = 135^\circ - \frac{1}{2}\alpha ;$$

综上， $\angle BND = 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$  或  $135^\circ \pm \frac{1}{2}\alpha$  。