

初中数学提前招生模拟试卷十八

一. 选择题 (共 12 小题)

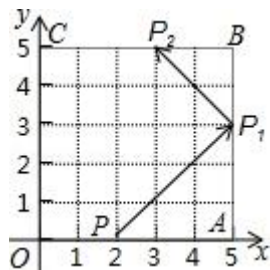
1. 已知 $4 < m < 5$, 则关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-m < 0 \\ 4-2x < 0 \end{cases}$ 的整数解共有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 若分式方程 $\frac{2x}{x+1} - \frac{m+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x}$ 有增根, 则 m 的值是 ()

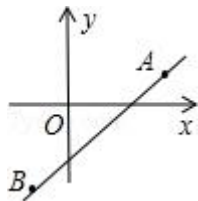
A. -1 或 1 B. -1 或 2 C. 1 或 2 D. 1 或 -2

3. 如图, 弹性小球从 $P(2, 0)$ 出发, 沿所示方向运动, 每当小球碰到正方形 $OABC$ 的边时反弹, 反弹时反射角等于入射角, 当小球第一次碰到正方形的边时的点为 P_1 , 第二次碰到正方形的边时的点为 P_2 ... 第 n 次碰到正方形的边时的点为 P_n , 则 P_{2015} 的坐标是 ()



A. (5, 3) B. (3, 5) C. (0, 2) D. (2, 0)

4. 如图, 直线 $y=kx+b$ 经过 $A(2, 1)$, $B(-1, -2)$ 两点, 则不等式 $\frac{1}{2}x > kx+b > -2$ 的解集为 ()



A. $x < 2$ B. $x > -1$ C. $x < 1$ 或 $x > 2$ D. $-1 < x < 2$

5. 已知三角形的三边长分别为 a 、 b 、 c ，求其面积问题，中外数学家曾经进行过深入研究，古希腊的几何学家海伦（Heron，约公元 50 年）给出求其面积的海伦公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ，其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ；我国南宋时期数学家秦九韶（约

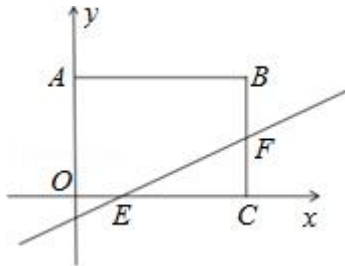
1202 - 1261）曾提出利用三角形的三边求其面积的秦九韶公式

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2}$$

是（ ）

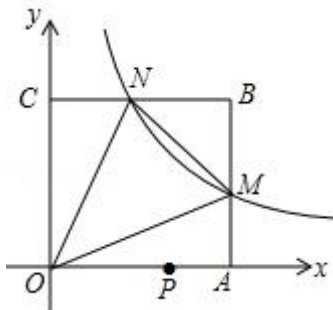
- A. $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ B. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

6. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ 与矩形 ABCO 的边 OC、BC 分别交于点 E、F，已知 OA=3，OC=4，则 $\triangle CEF$ 的面积是（ ）



- A. 6 B. 3 C. 12 D. $\frac{4}{3}$

7. 如图，在平面直角坐标系中，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象与边长是 6 的正方形 OABC 的两边 AB、BC 分别相交于 M、N 两点. $\triangle OMN$ 的面积为 10. 若动点 P 在 x 轴上，则 PM+PN 的最小值是（ ）



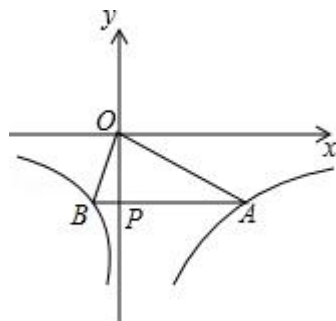
- A. $6\sqrt{2}$ B. 10 C. $2\sqrt{26}$ D. $2\sqrt{29}$

8. 已知函数 $y = \begin{cases} \frac{12}{x} (x > 0) \\ \frac{3}{x} (x < 0) \end{cases}$ 的图象如图所示，点 P 是 y 轴负半轴上一动点，过

点 P 作 y 轴的垂线交图象于 A, B 两点，连接 OA、OB。下列结论：

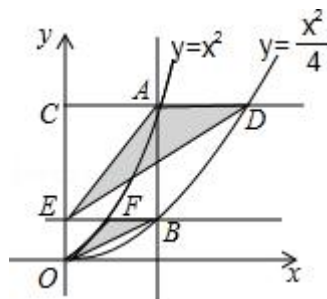
- ①若点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 在图象上，且 $x_1 < x_2 < 0$ ，则 $y_1 < y_2$ ；
- ②当点 P 坐标为 $(0, -3)$ 时， $\triangle AOB$ 是等腰三角形；
- ③无论点 P 在什么位置，始终有 $S_{\triangle AOB} = 7.5$ ， $AP = 4BP$ ；
- ④当点 P 移动到使 $\angle AOB = 90^\circ$ 时，点 A 的坐标为 $(2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$ 。

其中正确的结论个数为 ()



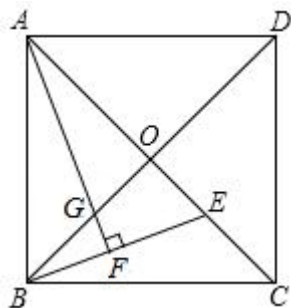
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 如图，垂直于 x 轴的直线 AB 分别与抛物线 $C_1: y = x^2 (x \geq 0)$ 和抛物线 $C_2: y = \frac{x^2}{4} (x \geq 0)$ 交于 A, B 两点，过点 A 作 $CD \parallel x$ 轴分别与 y 轴和抛物线 C_2 交于点 C, D, 过点 B 作 $EF \parallel x$ 轴分别与 y 轴和抛物线 C_1 交于点 E, F, 则 $\frac{S_{\triangle OFB}}{S_{\triangle EAD}}$ 的值为 ()



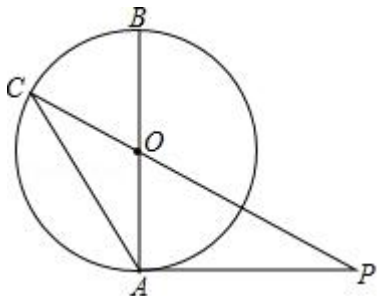
- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

10. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $AB=3\sqrt{2}$, E 为 OC 上一点, $OE=1$, 连接 BE , 过点 A 作 $AF \perp BE$ 于点 F , 与 BD 交于点 G , 则 BF 的长是()



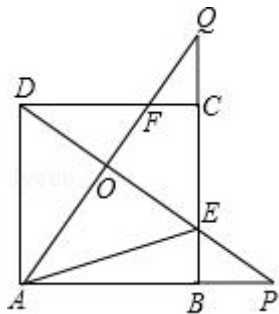
- A. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

11. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 切 $\odot O$ 于点 A , 连结 PO 并延长交 $\odot O$ 于点 C , 连结 AC , $AB=10$, $\angle P=30^\circ$, 则 AC 的长度是()



- A. $5\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{2}$ C. 5 D. $\frac{5}{2}$

12. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长是 3, $BP=CQ$, 连接 AQ , DP 交于点 O , 并分别与边 CD , BC 交于点 F , E , 连接 AE , 下列结论: ① $AQ \perp DP$; ② $OA^2 = OE \cdot OP$; ③ $S_{\triangle AOD} = S_{\text{四边形} OECF}$; ④ 当 $BP=1$ 时, $\tan \angle OAE = \frac{13}{16}$, 其中正确结论的个数是()

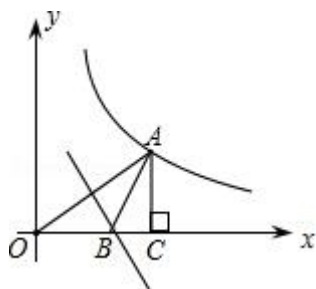


- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二. 填空题

13. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + a = 0$ 的两个实数根, 且 $x_1^2 - x_2^2 = 10$, 则 $a =$ _____.

14. 如图, 点 A 在双曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ ($x > 0$) 上, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴, 垂足为 C , OA 的垂直平分线交 OC 于点 B , 当 $AC = 1$ 时, $\triangle ABC$ 的周长为_____.



15. 在一空旷场地上设计一落地为矩形 $ABCD$ 的小屋, $AB + BC = 10\text{m}$, 拴住小狗的 10m 长的绳子一端固定在 B 点处, 小狗在不能进入小屋内的条件下活动, 其可以活动的区域面积为 S (m^2).

(1) 如图 1, 若 $BC = 4\text{m}$, 则 $S =$ _____ m^2 .

(2) 如图 2, 现考虑在 (1) 中的矩形 $ABCD$ 小屋的右侧以 CD 为边拓展一正 $\triangle CDE$ 区域, 使之变成落地为五边形 $ABCED$ 的小屋, 其他条件不变, 则在 BC 的变化过程中, 当 S 取得最小值时, 边 BC 的长为_____ m .

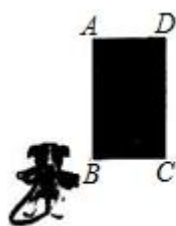


图1

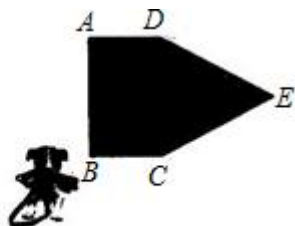
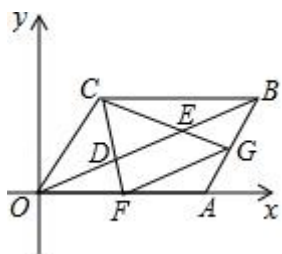


图2

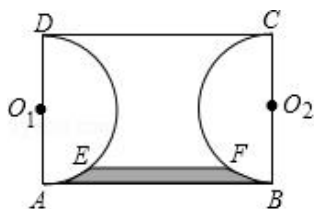
16. 如图，平面直角坐标系中 O 是原点， $\square OABC$ 的顶点 A, C 的坐标分别是 $(8, 0), (3, 4)$ ，点 D, E 把线段 OB 三等分，延长 CD, CE 分别交 OA, AB 于点 F, G ，连接 FG 。则下列结论：

① F 是 OA 的中点；② $\triangle OFD$ 与 $\triangle BEG$ 相似；③ 四边形 $DEGF$ 的面积是 $\frac{20}{3}$ ；④

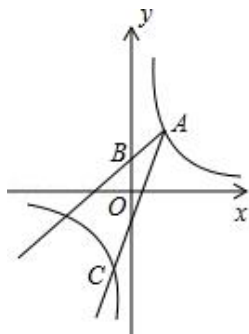
$OD = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ ；其中正确的结论是_____（填写所有正确结论的序号）。



17. 如图，已知矩形 $ABCD$ 中， $AB=3, AD=2$ ，分别以边 AD, BC 为直径在矩形 $ABCD$ 的内部作半圆 O_1 和半圆 O_2 ，一平行于 AB 的直线 EF 与这两个半圆分别交于点 E, F ，且 $EF=2$ （ EF 与 AB 在圆心 O_1 和 O_2 的同侧），则由 $\widehat{AE}, EF, \widehat{FB}, AB$ 所围成图形（图中阴影部分）的面积等于_____。



18. 如图，已知点 $A(2, 3)$ 和点 $B(0, 2)$ ，点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，作射线 AB ，再将射线 AB 绕点 A 按逆时针方向旋转 45° ，交反比例函数图象于点 C ，则点 C 的坐标为_____。

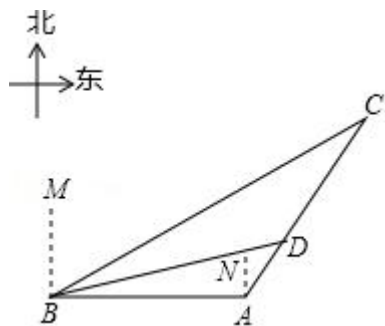


三. 解答题

19. 今年，我国海关总署严厉打击“洋垃圾”违法行为，坚决把“洋垃圾”拒于国门之外。如图，某天我国一艘海监船巡航到 A 港口正西方的 B 处时，发现在 B 的北偏东 60° 方向，相距 150 海里处的 C 点有一可疑船只正沿 CA 方向行驶，C 点在 A 港口的北偏东 30° 方向上，海监船向 A 港口发出指令，执法船立即从 A 港口沿 AC 方向驶出，在 D 处成功拦截可疑船只，此时 D 点与 B 点的距离为 $75\sqrt{2}$ 海里。

(1) 求 B 点到直线 CA 的距离；

(2) 执法船从 A 到 D 航行了多少海里？（结果保留根号）



20. 为落实“垃圾分类”，环卫部门要求垃圾要按 A，B，C 三类分别装袋、投放，其中 A 类指废电池，过期药品等有毒垃圾，B 类指剩余食品等厨余垃圾，C 类指塑料、废纸等可回收垃圾。甲投放了一袋垃圾，乙投放了两袋垃圾，这两袋垃圾不同类。

(1) 直接写出甲投放的垃圾恰好是 A 类的概率；

(2) 求乙投放的垃圾恰有一袋与甲投放的垃圾是同类的概率。

21. 如图 1 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 AC 上一点, 过点 O 的直线与 AB , BC 的延长线分别相交于点 M , N .

【问题引入】

(1) 若点 O 是 AC 的中点, $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{CN}{BN}$ 的值;

温馨提示: 过点 A 作 MN 的平行线交 BN 的延长线于点 G .

【探索研究】

(2) 若点 O 是 AC 上任意一点 (不与 A , C 重合), 求证: $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1$;

【拓展应用】

(3) 如图 2 所示, 点 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, 射线 AP , BP , CP 分别交 BC , AC , AB 于点 D , E , F , 若 $\frac{AF}{BF} = \frac{1}{3}$, $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{AE}{CE}$ 的值.

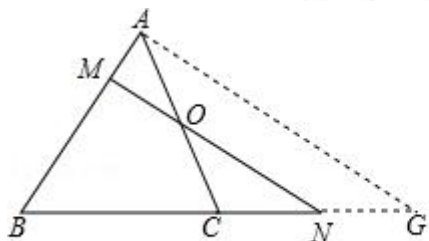


图1

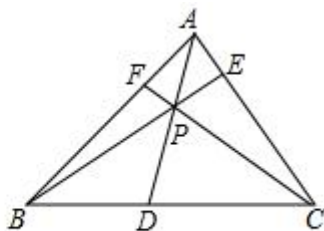
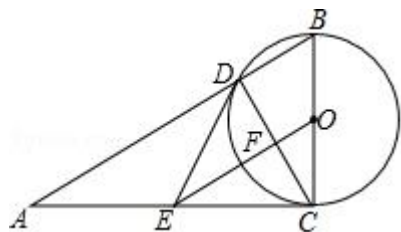


图2

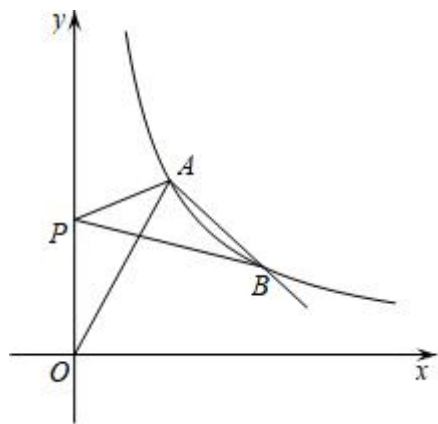
22. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，以 BC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D ， E 是 AC 的中点， OE 交 CD 于点 F 。

- (1) 若 $\angle BCD=36^\circ$ ， $BC=10$ ，求 $\widehat{BD}$ 的长；
- (2) 判断直线 DE 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；
- (3) 求证： $2CE^2=AB \cdot EF$ 。



23. 如图，函数 $y = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x \leq 3) \\ -x+9, & (x > 3) \end{cases}$ 的图象与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 相交于点 $A(3, m)$ 和点 B 。

- (1) 求双曲线的解析式及点 B 的坐标；
- (2) 若点 P 在 y 轴上，连接 PA, PB ，求当 $PA+PB$ 的值最小时点 P 的坐标。



24. 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，点 E 在边 AD 所在直线上，连接 CE ，以 CE 为边，作正方形 $CEFG$ （点 D ，点 F 在直线 CE 的同侧），连接 BF 。

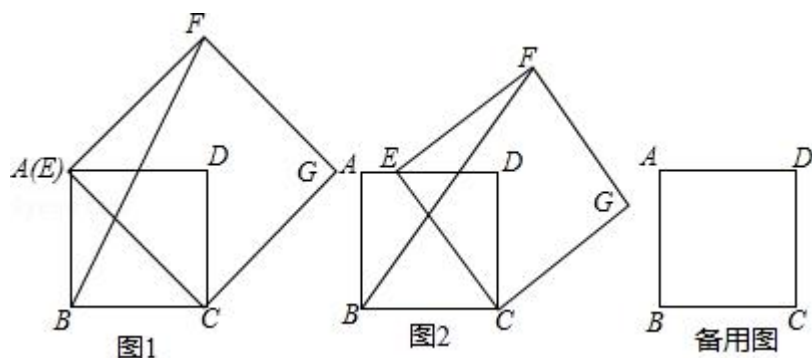
（1）如图 1，当点 E 与点 A 重合时，请直接写出 BF 的长；

（2）如图 2，当点 E 在线段 AD 上时， $AE=1$ ；

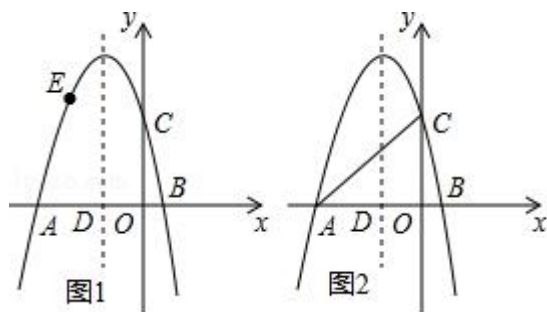
①求点 F 到 AD 的距离；

②求 BF 的长；

（3）若 $BF=3\sqrt{10}$ ，请直接写出此时 AE 的长。



25. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 $A(-5, 0)$, $B(1, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 C ，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D .



(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 如图 1，点 $E(x, y)$ 为抛物线上一点，且 $-5 < x < -2$ ，过点 E 作 $EF \parallel x$ 轴，交抛物线的对称轴于点 F ，作 $EH \perp x$ 轴于点 H ，得到矩形 $EHDF$ ，求矩形 $EHDF$ 周长的最大值；

(3) 如图 2，点 P 为抛物线对称轴上一点，是否存在点 P ，使以点 P, A, C 为顶点的三角形是直角三角形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

答案与解析

一. 选择题

1. 已知 $4 < m < 5$ ，则关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-m < 0 \\ 4-2x < 0 \end{cases}$ 的整数解共有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】先求解不等式组得到关于 m 的不等式解集，再根据 m 的取值范围即可判定整数解.

【解答】解：不等式组 $\begin{cases} x-m < 0 \textcircled{1} \\ 4-2x < 0 \textcircled{2} \end{cases}$

由①得 $x < m$;

由②得 $x > 2$;

$\because m$ 的取值范围是 $4 < m < 5$,

$\therefore$ 不等式组 $\begin{cases} x-m < 0 \\ 4-2x < 0 \end{cases}$ 的整数解有：3, 4 两个.

故选：B.

2. 若分式方程 $\frac{2x}{x+1} - \frac{m+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x}$ 有增根，则 m 的值是 ()

A. -1 或 1 B. -1 或 2 C. 1 或 2 D. 1 或 -2

【分析】增根是分式方程化为整式方程后产生的使分式方程的分母为 0 的根. 有增根，那么最简公分母 $x(x+1)=0$ ，所以增根是 0 或 -1，把增根代入化为整式方程的方程即可求出未知字母的值.

【解答】解：方程两边都乘 $x(x+1)$ ，得

$$2x^2 - (m+1) = (x+1)^2$$

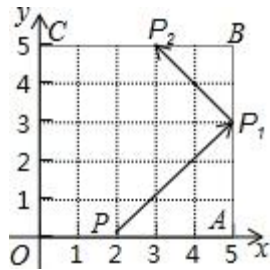
$\because$ 最简公分母 $x(x+1)=0$,

$\therefore x=0$ 或 $x=-1$.

当 $x=0$ 时， $m=-2$;

当 $x=-1$ 时， $m=1$. 故选 D.

3. 如图，弹性小球从 $P(2, 0)$ 出发，沿所示方向运动，每当小球碰到正方形 $OABC$ 的边时反弹，反弹时反射角等于入射角，当小球第一次碰到正方形的边时的点为 P_1 ，第二次碰到正方形的边时的点为 P_2 ...第 n 次碰到正方形的边时的点为 P_n ，则 P_{2015} 的坐标是 ()

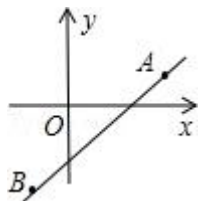


A. (5, 3) B. (3, 5) C. (0, 2) D. (2, 0)

【分析】根据所给出的图形，得出小球第一次碰到正方形的边时的点为 P_1 的坐标，小球第二次碰到正方形的边时的点为 P_2 的坐标，找出规律，得出第三次、第四的坐标，从而得出规律，每四次一个循环，即可得出答案.

【解答】解：∵ 小球第一次碰到正方形的边时的点为 P_1 的坐标是 (5, 3)，
 小球第二次碰到正方形的边时的点为 P_2 的坐标是 (3, 5)，
 小球第三次碰到正方形的边时的点为 P_3 的坐标是 (0, 2)，
 小球第四次碰到正方形的边时的点为 P_4 的坐标是 (2, 0)，
 ∴ 每四次一个循环，则 $2015 \div 4 = 503 \dots 3$ ，
 ∴ P_{2015} 的坐标是 (0, 2)；
 故选：C.

4. 如图，直线 $y=kx+b$ 经过 A (2, 1)，B (-1, -2) 两点，则不等式 $\frac{1}{2}x > kx+b > -2$ 的解集为 ()



A. $x < 2$ B. $x > -1$ C. $x < 1$ 或 $x > 2$ D. $-1 < x < 2$

【分析】由于直线 $y=kx+b$ 经过 A (2, 1)，B (-1, -2) 两点，那么把 A、B 两点的坐标代入 $y=kx+b$ ，用待定系数法求出 k、b 的值，然后解不等式组 $\frac{1}{2}x > kx+b > -2$ ，即可求出解集.

【解答】解：把 A (2, 1)，B (-1, -2) 两点的坐标代入 $y=kx+b$ ，
 得：
$$\begin{cases} 2k+b=1 \\ -k+b=-2 \end{cases}$$

 解得：
$$\begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

解不等式组： $\frac{1}{2}x > x - 1 > -2$ ，

得： $-1 < x < 2$.

故选：D.

5. 已知三角形的三边长分别为 a 、 b 、 c ，求其面积问题，中外数学家曾经进行过深入研究，古希腊的几何学家海伦（Heron，约公元 50 年）给出求其面积的海伦公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ，其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ；我国南宋时期数学家秦九韶（约 1202 - 1261）曾提出利用三角形的三边求其面积的秦九韶公式 $S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2}$ ，若一个三角形的三边长分别为 2，3，4，则其面积是（ ）

- A. $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ B. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

【分析】根据题目中的秦九韶公式，可以求得一个三角形的三边长分别为 2，3，4 的面积，从而可以解答本题。

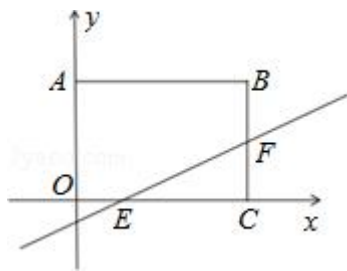
【解答】解：∵ $S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2}$ ，

∴ 若一个三角形的三边长分别为 2，3，4，则其面积是：

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \times 3^2 - (\frac{2^2+3^2-4^2}{2})^2} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

故选：B.

6. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ 与矩形 ABCO 的边 OC、BC 分别交于点 E、F，已知 OA=3，OC=4，则 $\triangle CEF$ 的面积是（ ）



- A. 6 B. 3 C. 12 D. $\frac{4}{3}$

【分析】根据直线解析式分别求出点 E、F 的坐标，然后利用三角形的面积公式求解即可。

【解答】解：当 $y=0$ 时， $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ ，

解得 $x=1$ ，

∴ 点 E 的坐标是 (1, 0)，即 $OE=1$ ，

$$\therefore OC=4,$$

$$\therefore EC=OC - OE=4 - 1=3,$$

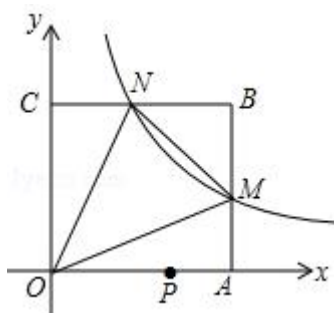
$\therefore$ 点 F 的横坐标是 4,

$$\therefore y=\frac{2}{3}\times 4 - \frac{2}{3}=2, \text{ 即 } CF=2,$$

$$\therefore \triangle CEF \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\times CE\times CF=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3.$$

故选: B.

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象与边长是 6 的正方形 OABC 的两边 AB, BC 分别相交于 M, N 两点. $\triangle OMN$ 的面积为 10. 若动点 P 在 x 轴上, 则 PM+PN 的最小值是 ()



A. $6\sqrt{2}$ B. 10 C. $2\sqrt{26}$ D. $2\sqrt{29}$

【分析】由正方形 OABC 的边长是 6, 得到点 M 的横坐标和点 N 的纵坐标为 6, 求得 $M(6, \frac{k}{6})$, $N(\frac{k}{6}, 6)$, 根据三角形的面积列方程得到 $M(6, 4)$, $N(4, 6)$, 作 M 关于 x 轴的对称点 M' , 连接 NM' 交 x 轴于 P, 则 NM' 的长=PM+PN 的最小值, 根据勾股定理即可得到结论.

【解答】解: $\because$ 正方形 OABC 的边长是 6,

$\therefore$ 点 M 的横坐标和点 N 的纵坐标为 6,

$$\therefore M(6, \frac{k}{6}), N(\frac{k}{6}, 6),$$

$$\therefore BN=6 - \frac{k}{6}, BM=6 - \frac{k}{6},$$

$\because \triangle OMN$ 的面积为 10,

$$\therefore 6\times 6 - \frac{1}{2}\times 6\times \frac{k}{6} - \frac{1}{2}\times 6\times \frac{k}{6} - \frac{1}{2}\times (6 - \frac{k}{6})^2=10,$$

$$\therefore k=24,$$

$$\therefore M(6, 4), N(4, 6),$$

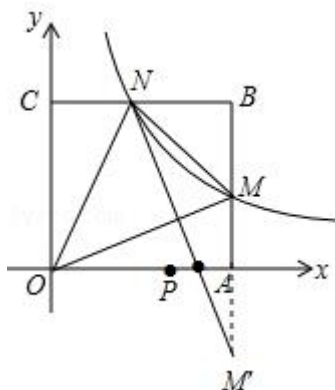
作 M 关于 x 轴的对称点 M' , 连接 NM' 交 x 轴于 P, 则 NM' 的长=PM+PN 的最小值,

$$\therefore AM=AM'=4,$$

$$\therefore BM'=10, BN=2,$$

$$\therefore NM' = \sqrt{BM'^2 + BN^2} = \sqrt{10^2 + 2^2} = 2\sqrt{26},$$

故选：C.

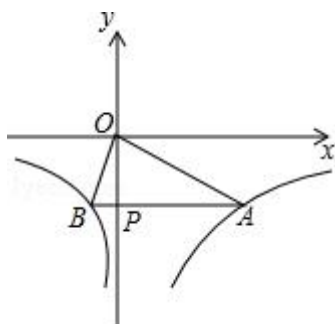


8. 已知函数 $y = \begin{cases} -\frac{12}{x} & (x > 0) \\ \frac{3}{x} & (x < 0) \end{cases}$ 的图象如图所示，点 P 是 y 轴负半轴上一动点，过

点 P 作 y 轴的垂线交图象于 A、B 两点，连接 OA、OB. 下列结论：

- ①若点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 在图象上，且 $x_1 < x_2 < 0$ ，则 $y_1 < y_2$ ；
- ②当点 P 坐标为 $(0, -3)$ 时， $\triangle AOB$ 是等腰三角形；
- ③无论点 P 在什么位置，始终有 $S_{\triangle AOB} = 7.5$ ， $AP = 4BP$ ；
- ④当点 P 移动到使 $\angle AOB = 90^\circ$ 时，点 A 的坐标为 $(2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

其中正确的结论个数为 ()



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】①错误. 因为 $x_1 < x_2 < 0$ ，函数 y 随 x 是增大而减小，所以 $y_1 > y_2$ ；

②正确. 求出 A、B 两点坐标即可解决问题；

③正确. 设 $P(0, m)$ ，则 $B(\frac{3}{m}, m)$ ， $A(-\frac{12}{m}, m)$ ，可得 $PB = -\frac{3}{m}$ ， $PA = -\frac{12}{m}$ ，

推出 $PA = 4PB$ ， $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle OPB} + S_{\triangle OPA} = \frac{3}{2} + \frac{12}{2} = 7.5$ ；

④正确. 设 $P(0, m)$ ，则 $B(\frac{3}{m}, m)$ ， $A(-\frac{12}{m}, m)$ ，推出 $PB = -\frac{3}{m}$ ， $PA = -\frac{12}{m}$ ，

$OP = -m$ ，由 $\triangle OPB \sim \triangle APO$ ，可得 $OP^2 = PB \cdot PA$ ，列出方程即可解决问题；

【解答】解：①错误. $\because x_1 < x_2 < 0$ ，函数 y 随 x 是增大而减小，

$\therefore y_1 > y_2$ ，故①错误.

②正确. $\because P(0, -3)$,

$\therefore B(-1, -3), A(4, -3)$,

$\therefore AB=5, OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore AB=AO$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰三角形，故②正确.

③正确. 设 $P(0, m)$ ，则 $B(\frac{3}{m}, m), A(-\frac{12}{m}, m)$,

$\therefore PB = -\frac{3}{m}, PA = -\frac{12}{m}$,

$\therefore PA=4PB$,

$\therefore S_{AOB} = S_{\triangle OPB} + S_{\triangle OPA} = \frac{3}{2} + \frac{12}{2} = 7.5$ ，故③正确.

④正确. 设 $P(0, m)$ ，则 $B(\frac{3}{m}, m), A(-\frac{12}{m}, m)$,

$\therefore PB = -\frac{3}{m}, PA = -\frac{12}{m}, OP = -m$,

$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \angle OPB = \angle OPA = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOP + \angle AOP = 90^\circ, \angle AOP + \angle OAP = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOP = \angle OAP$,

$\therefore \triangle OPB \sim \triangle APO$,

$\therefore \frac{OP}{AP} = \frac{PB}{OP}$,

$\therefore OP^2 = PB \cdot PA$,

$\therefore m^2 = -\frac{3}{m} \cdot (-\frac{12}{m})$,

$\therefore m^4 = 36$,

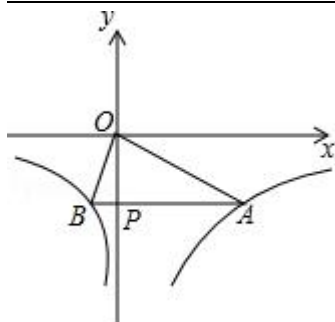
$\therefore m < 0$,

$\therefore m = -\sqrt{6}$,

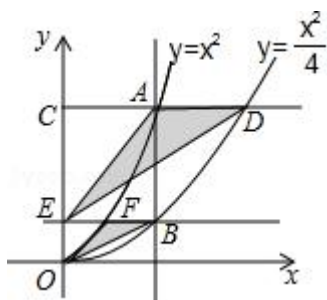
$\therefore A(2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$ ，故④正确.

$\therefore$ ②③④正确，

故选：C.



9. 如图，垂直于 x 轴的直线 AB 分别与抛物线 $C_1: y=x^2 (x \geq 0)$ 和抛物线 $C_2: y=\frac{x^2}{4} (x \geq 0)$ 交于 A, B 两点，过点 A 作 $CD \parallel x$ 轴分别与 y 轴和抛物线 C_2 交于点 C, D ，过点 B 作 $EF \parallel x$ 轴分别与 y 轴和抛物线 C_1 交于点 E, F ，则 $\frac{S_{\triangle OFB}}{S_{\triangle EAD}}$ 的值为()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

【分析】可以设 A, B 横坐标为 a ，易求得点 E, F, D 的坐标，即可求得 OE, CE, AD, BF 的长度，即可解题。

【解答】解：设点 A, B 横坐标为 a ，则点 A 纵坐标为 a^2 ，点 B 的纵坐标为 $\frac{a^2}{4}$ ，

$\because BE \parallel x$ 轴，

$\therefore$ 点 F 纵坐标为 $\frac{a^2}{4}$ ，

$\because$ 点 F 是抛物线 $y=x^2$ 上的点，

$\therefore$ 点 F 横坐标为 $x=\sqrt{y}=\frac{1}{2}a$ ，

$\because CD \parallel x$ 轴， $\therefore$ 点 D 纵坐标为 a^2 ，

$\because$ 点 D 是抛物线 $y=\frac{x^2}{4}$ 上的点，

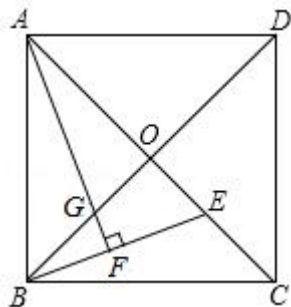
$\therefore$ 点 D 横坐标为 $x=\sqrt{4y}=2a$ ，

$\therefore AD=a, BF=\frac{1}{2}a, CE=\frac{3}{4}a^2, OE=\frac{1}{4}a^2$ ，

$$\therefore \text{则} \frac{S_{\triangle OFB}}{S_{\triangle EAD}} = \frac{\frac{1}{2}BF \cdot OE}{\frac{1}{2}AD \cdot CE} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{6},$$

故选：D.

10. 如图，正方形 ABCD 的对角线 AC, BD 相交于点 O, $AB=3\sqrt{2}$, E 为 OC 上一点, $OE=1$, 连接 BE, 过点 A 作 $AF \perp BE$ 于点 F, 与 BD 交于点 G, 则 BF 的长是()



- A. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【分析】根据正方形的性质、全等三角形的判定定理证明 $\triangle GAO \cong \triangle EBO$, 得到 $OG=OE=1$, 证明 $\triangle BFG \sim \triangle BOE$, 根据相似三角形的性质计算即可.

【解答】解: $\because$ 四边形 ABCD 是正方形, $AB=3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ, AO = BO = CO = 3,$$

$$\because AF \perp BE,$$

$$\therefore \angle EBO = \angle GAO,$$

在 $\triangle GAO$ 和 $\triangle EBO$ 中,

$$\begin{cases} \angle GAO = \angle EBO \\ AO = BO \\ \angle AOG = \angle BOE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle GAO \cong \triangle EBO,$$

$$\therefore OG = OE = 1,$$

$$\therefore BG = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOE \text{ 中, } BE = \sqrt{OB^2 + OE^2} = \sqrt{10},$$

$$\because \angle BFG = \angle BOE = 90^\circ, \angle GBF = \angle EBO,$$

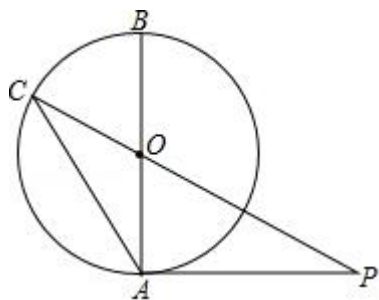
$$\therefore \triangle BFG \sim \triangle BOE,$$

$$\therefore \frac{BF}{OB} = \frac{BG}{BE}, \text{ 即 } \frac{BF}{3} = \frac{2}{\sqrt{10}},$$

$$\text{解得, } BF = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

故选：A.

11. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，PA 切 $\odot O$ 于点 A，连结 PO 并延长交 $\odot O$ 于点 C，连结 AC，AB=10， $\angle P=30^\circ$ ，则 AC 的长度是（ ）



- A. $5\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{2}$ C. 5 D. $\frac{5}{2}$

【分析】方法 1、过点 D 作 $OD \perp AC$ 于点 D，由已知条件和圆的性质易求 OD 的长，再根据勾股定理即可求出 AD 的长，进而可求出 AC 的长.

方法 2、先求出 $\angle AOP=60^\circ$ ，进而求出 $\angle ACP=\angle P$ ，即可得出 $AC=AP$ ，求出 AC 即可.

【解答】解：

方法 1、过点 D 作 $OD \perp AC$ 于点 D，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，PA 切 $\odot O$ 于点 A，

$\therefore AB \perp AP$ ，

$\therefore \angle BAP=90^\circ$ ，

$\because \angle P=30^\circ$ ，

$\therefore \angle AOP=60^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC=120^\circ$ ，

$\because OA=OC$ ，

$\therefore \angle OAD=30^\circ$ ，

$\because AB=10$ ，

$\therefore OA=5$ ，

$\therefore OD=\frac{1}{2}AO=2.5$ ，

$\therefore AD=\sqrt{AO^2-OD^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore AC=2AD=5\sqrt{3}$ ，

故选 A，

方法 2、如图，

连接 BC， $\because AP$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle BAP=90^\circ$ ，

$\because \angle P=30^\circ$ ，

$\therefore \angle AOP=60^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC=60^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACP = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ = \angle P,$$

$$\therefore AP = AC,$$

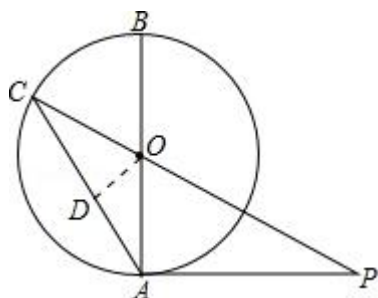
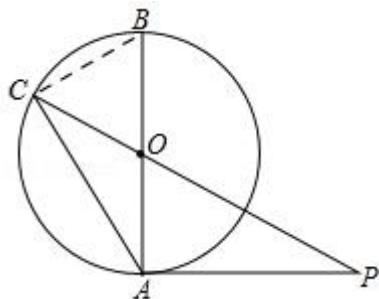
$\because AB$ 是 $\odot O$ 直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

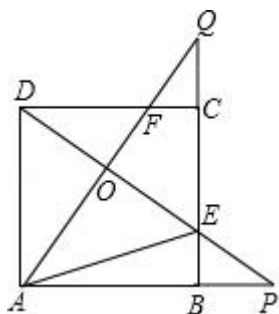
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 10$,

$$\therefore AC = 5\sqrt{3},$$

故选: A.



12. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长是 3, $BP = CQ$, 连接 AQ , DP 交于点 O , 并分别与边 CD , BC 交于点 F , E , 连接 AE , 下列结论: ① $AQ \perp DP$; ② $OA^2 = OE \cdot OP$; ③ $S_{\triangle AOD} = S_{\text{四边形} OECF}$; ④ 当 $BP = 1$ 时, $\tan \angle OAE = \frac{13}{16}$, 其中正确结论的个数是 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】由四边形 $ABCD$ 是正方形, 得到 $AD = BC$, $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle P = \angle Q$, 根据余角的性质得到 $AQ \perp DP$; 故①正确; 根据相似三角形的性质得到 $AO^2 = OD \cdot OP$, 由 $OD \neq OE$, 得到 $OA^2 \neq OE \cdot OP$; 故②错误;

根据全等三角形的性质得到 $CF=BE$, $DF=CE$, 于是得到 $S_{\triangle ADF} - S_{\triangle DFO} = S_{\triangle DCE} - S_{\triangle DOF}$,
即 $S_{\triangle AOD} = S_{\text{四边形 OECF}}$; 故③正确; 根据相似三角形的性质得到 $BE = \frac{3}{4}$, 求得 $QE = \frac{13}{4}$,

$QO = \frac{13}{5}$, $OE = \frac{39}{20}$, 由三角函数的定义即可得到结论.

【解答】解: $\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$\therefore AD=BC$, $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore BP=CQ$,

$\therefore AP=BQ$,

在 $\triangle DAP$ 与 $\triangle ABQ$ 中, $\begin{cases} AD=AB \\ \angle DAP = \angle ABQ, \\ AP=BQ \end{cases}$

$\therefore \triangle DAP \cong \triangle ABQ$,

$\therefore \angle P = \angle Q$,

$\therefore \angle Q + \angle QAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle P + \angle QAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOP = 90^\circ$,

$\therefore AQ \perp DP$;

故①正确;

$\therefore \angle DOA = \angle AOP = 90^\circ$, $\angle ADO + \angle P = \angle ADO + \angle DAO = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAO = \angle P$,

$\therefore \triangle DAO \sim \triangle APO$,

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{OP}{OA}$,

$\therefore AO^2 = OD \cdot OP$,

$\therefore AE > AB$,

$\therefore AE > AD$,

$\therefore OD \neq OE$,

$\therefore OA^2 \neq OE \cdot OP$; 故②错误;

在 $\triangle CQF$ 与 $\triangle BPE$ 中 $\begin{cases} \angle FCQ = \angle EBP \\ \angle Q = \angle P \\ CQ = BP \end{cases}$,

$\therefore \triangle CQF \cong \triangle BPE$,

$\therefore CF=BE$,

$\therefore DF=CE$,

在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle DCE$ 中, $\begin{cases} AD=CD \\ \angle ADC = \angle DCE, \\ DF=CE \end{cases}$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DCE$,

$\therefore S_{\triangle ADF} - S_{\triangle DFO} = S_{\triangle DCE} - S_{\triangle DOF}$,

即 $S_{\triangle AOD} = S_{\text{四边形 OECF}}$; 故③正确;

$$\begin{aligned}
&\because BP=1, AB=3, \\
&\therefore AP=4, \\
&\because \triangle PBE \sim \triangle PAD, \\
&\therefore \frac{PB}{EB} = \frac{PA}{DA} = \frac{4}{3}, \\
&\therefore BE = \frac{3}{4}, \therefore QE = \frac{13}{4}, \\
&\because \triangle QOE \sim \triangle PAD, \\
&\therefore \frac{QO}{PA} = \frac{OE}{AD} = \frac{QE}{PD} = \frac{\frac{13}{4}}{5}, \\
&\therefore QO = \frac{13}{5}, OE = \frac{39}{20}, \\
&\therefore AO = 5 - QO = \frac{12}{5}, \\
&\therefore \tan \angle OAE = \frac{OE}{OA} = \frac{13}{16}, \text{ 故④正确,}
\end{aligned}$$

故选：C.

二. 填空题（共 6 小题）

13. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + a = 0$ 的两个实数根, 且 $x_1^2 - x_2^2 = 10$, 则 $a = \underline{\frac{21}{4}}$.

【分析】由两根关系, 得根 $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = a$, 解方程得到 $x_1 + x_2 = 5$, 即 $x_1 - x_2 = 2$, 即可得到结论.

【解答】解: 由两根关系, 得根 $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = a$,

由 $x_1^2 - x_2^2 = 10$ 得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 10$,

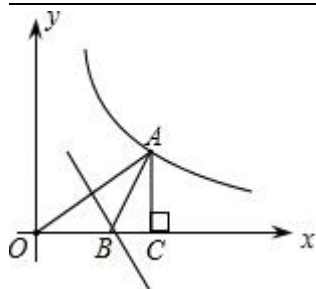
若 $x_1 + x_2 = 5$, 即 $x_1 - x_2 = 2$,

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 25 - 4a = 4,$$

$$\therefore a = \frac{21}{4},$$

故答案为: $\frac{21}{4}$.

14. 如图, 点 A 在双曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ ($x > 0$) 上, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴, 垂足为 C, OA 的垂直平分线交 OC 于点 B, 当 $AC=1$ 时, $\triangle ABC$ 的周长为 $\underline{\sqrt{3}+1}$.



【分析】由 OA 的垂直平分线交 OC 于点 B ，可得出 $OB=AB$ ，结合三角形的周长公式可得出 $\triangle ABC$ 的周长 $=OC+CA$ ，由 AC 的长度利用反比例函数图象上点的坐标特征，即可得出点 A 的坐标，进而即可得出 $\triangle ABC$ 的周长.

【解答】解: $\because$ OA 的垂直平分线交 OC 于点 B,

$$\therefore OB=AB,$$
$$\therefore C_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = OB + BC + CA = OC + CA.$$

∵ 点 A 在双曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ ($x > 0$) 上, $AC = 1$,

∴点 A 的坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$,

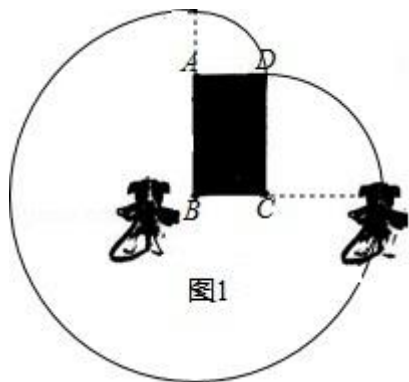
$$\therefore C_{\triangle ABC} = OC + CA = \sqrt{3} + 1.$$

故答案为: $\sqrt{3}+1$.

15. 【分析】(1) 小狗活动的区域面积为以 B 为圆心、10 为半径的 $\frac{3}{4}$ 圆，以 C 为圆心、6 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆和以 A 为圆心、4 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆的面积和，据此列式求解可得：

(2) 此时小狗活动的区域面积为以 B 为圆心、10 为半径的 $\frac{3}{4}$ 圆，以 A 为圆心、x 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆、以 C 为圆心、10 - x 为半径的 $\frac{30}{360}$ 圆的面积和，列出函数解析式，由二次函数的性质解答即可。

【解答】解：（1）如图 1，拴住小狗的 10m 长的绳子一端固定在 B 点处，小狗可以活动的区域如图所示：



由图可知，小狗活动的区域面积为以 B 为圆心、10 为半径的 $\frac{3}{4}$ 圆，以 C 为圆心、6 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆和以 A 为圆心、4 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆的面积和，

$$\therefore S = \frac{3}{4} \times \pi \cdot 10^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 88\pi,$$

故答案为：88π；

(2) 如图 2，

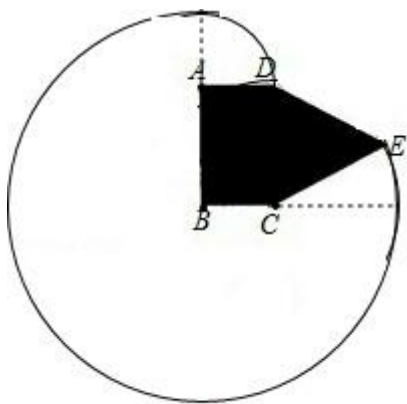


图 2

设 $BC=x$ ，则 $AB=10-x$ ，

$$\therefore S = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot x^2 + \frac{30}{360} \cdot \pi \cdot (10-x)^2$$

$$= \frac{\pi}{3} (x^2 - 5x + 250)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{325\pi}{4},$$

当 $x = \frac{5}{2}$ 时， S 取得最小值，

$$\therefore BC = \frac{5}{2},$$

故答案为： $\frac{5}{2}$.

16. 【分析】①证明 $\triangle CDB \sim \triangle FDO$ ，列比例式得： $\frac{BC}{OF} = \frac{BD}{OD}$ ，再由 D、E 为 OB 的

三等分点，则 $\frac{BD}{OD} = \frac{2}{1} = 2$ ，可得结论正确；

②如图 2，延长 BC 交 y 轴于 H 证明 $OA \neq AB$ ，则 $\angle AOB \neq \angle EBG$ ，所以 $\triangle OFD \sim \triangle BEG$ 不成立；

③如图 3，利用面积差求得： $S_{\triangle CFG} = S_{\square OABC} - S_{\triangle OFC} - S_{\triangle CBG} - S_{\triangle AFG} = 12$ ，根据相似三

角形面积的比等于相似比的平方进行计算并作出判断；

④根据勾股定理进行计算 OB 的长，根据三等分线段 OB 可得结论.

【解答】解：①∵四边形 OABC 是平行四边形，

$$\therefore BC \parallel OA, BC=OA,$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle FDO,$$

$$\therefore \frac{BC}{OF} = \frac{BD}{OD},$$

∵ D、E 为 OB 的三等分点，

$$\therefore \frac{BD}{OD} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\therefore \frac{BC}{OF} = 2,$$

$$\therefore BC = 2OF,$$

$$\therefore OA = 2OF,$$

∴ F 是 OA 的中点；

所以①结论正确；

②如图 2，延长 BC 交 y 轴于 H，

由 C (3, 4) 知：OH=4，CH=3，

$$\therefore OC = 5,$$

$$\therefore AB = OC = 5,$$

$$\therefore A(8, 0),$$

$$\therefore OA = 8,$$

$$\therefore OA \neq AB,$$

$$\therefore \angle AOB \neq \angle EBG,$$

$$\therefore \triangle OFD \sim \triangle BEG \text{ 不成立},$$

所以②结论不正确；

③由①知：F 为 OA 的中点，

同理得：G 是 AB 的中点，

∴ FG 是△OAB 的中位线，

$$\therefore FG = \frac{1}{2}OB, FG \parallel OB,$$

$$\therefore OB = 3DE,$$

$$\therefore FG = \frac{3}{2}DE,$$

$$\therefore \frac{FG}{DE} = \frac{3}{2},$$

过 C 作 CQ⊥AB 于 Q，

$$S_{\square OABC} = OA \cdot OH = AB \cdot CQ,$$

$$\therefore 4 \times 8 = 5CQ,$$

$$\therefore CQ = \frac{32}{5},$$

$$S_{\triangle OCF} = \frac{1}{2} OF \cdot OH = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8,$$

$$S_{\triangle CGB} = \frac{1}{2} BG \cdot CQ = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{32}{5} = 8,$$

$$S_{\triangle AFG} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle CFG} = S_{\square OABC} - S_{\triangle OCF} - S_{\triangle CBG} - S_{\triangle AFG} = 8 \times 4 - 8 - 8 - 4 = 12,$$

$$\therefore DE \parallel FG,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CFG,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CFG}} = \left(\frac{DE}{FG}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形DEGF}}}{S_{\triangle CFG}} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形DEGF}}}{12} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore S_{\text{四边形DEGF}} = \frac{20}{3};$$

所以③结论正确;

④在 $\text{Rt}\triangle OHB$ 中, 由勾股定理得: $OB^2 = BH^2 + OH^2$,

$$\therefore OB = \sqrt{4^2 + (3+8)^2} = \sqrt{137},$$

$$\therefore OD = \frac{\sqrt{137}}{3},$$

所以④结论不正确;

故本题结论正确的有: ①③;

故答案为: ①③.

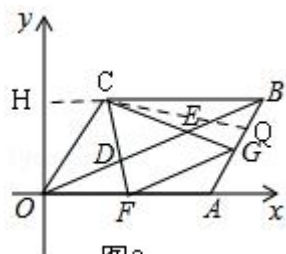


图3

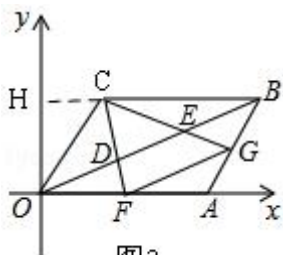


图2

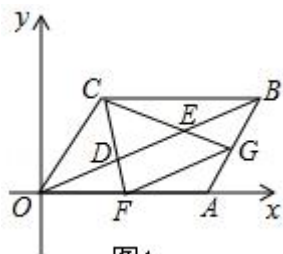


图1

17. 【分析】连接 O_1O_2 , O_1E , O_2F , 过 E 作 $EG \perp O_1O_2$, 过 F 作 $FG \perp O_1O_2$, 得到四边形 EGHF 是矩形, 根据矩形的性质得到 $GH=EF=2$, 求得 $O_1G=\frac{1}{2}$, 得到 $\angle O_1EG=30^\circ$,

根据三角形、梯形、扇形的面积公式即可得到结论.

【解答】解: 连接 O_1O_2 , O_1E , O_2F ,

则四边形 O_1O_2FE 是等腰梯形,

过 E 作 $EG \perp O_1O_2$, 过 F 作 $FG \perp O_1O_2$,

$\therefore$ 四边形 EGHF 是矩形,

$\therefore GH=EF=2$,

$\therefore O_1G=\frac{1}{2}$,

$\because O_1E=1$,

$\therefore GE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \frac{O_1G}{O_1E}=\frac{1}{2}$;

$\therefore \angle O_1EG=30^\circ$,

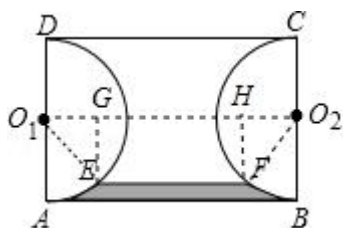
$\therefore \angle AO_1E=30^\circ$,

同理 $\angle BO_2F=30^\circ$,

$\therefore$ 阴影部分的面积 $= S_{\text{矩形}ABO_2O_1} - 2S_{\text{扇形}AO_1E} - S_{\text{梯形}EF O_2O_1} = 3 \times 1 - 2 \times$

$$\frac{30 \cdot \pi \times 1^2}{360} - \frac{1}{2} (2+3) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

故答案为: $3 - \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$.



18. 【分析】先过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E，以 AE 为边在 AE 的左侧作正方形 AEF G，交 AB 于 P，根据直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$ ，可得 $PF = \frac{3}{2}$ ，将 $\triangle AGP$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得 $\triangle AEH$ ，构造 $\triangle ADP \cong \triangle ADH$ ，再设 $DE = x$ ，则 $DH = DP = x + \frac{3}{2}$ ， $FD = 1 + 2 - x = 3 - x$ ，在 $Rt\triangle PDF$ 中，根据 $PF^2 + DF^2 = PD^2$ ，可得方程 $(\frac{3}{2})^2 + (3 - x)^2 = (x + \frac{3}{2})^2$ ，进而得到 D (1, 0)，即可得出直线 AD 的解析式为 $y = 3x - 3$ ，最后解方程组即可得到 D 点坐标。

解法二：过 A 作 $AD \perp y$ 轴于 D，将 AB 绕着点 B 顺时针旋转 90° ，得到 $A'B$ ，过 A' 作 $A'H \perp y$ 轴于 H，由 $AB = BA'$ ， $\angle ADB = \angle BHA' = 90^\circ$ ， $\angle BAD = \angle A'BH$ ，可得 $\triangle ABD \cong \triangle BA'H$ ，由 A (2, 3)， A' (1, 0)，可得直线 AC 的解析式为 $y = 3x - 3$ ，解方程组即可得到 D 点坐标。

【解答】解：如图所示，过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E，以 AE 为边在 AE 的左侧作正方形 AEF G，交 AB 于 P，

根据点 A (2, 3) 和点 B (0, 2)，可得直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$ ，

由 A (2, 3)，可得 $OF = 1$ ，

当 $x = -1$ 时， $y = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$ ，即 $P(-1, \frac{3}{2})$ ，

$$\therefore PF = \frac{3}{2},$$

将 $\triangle AGP$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得 $\triangle AEH$ ，则 $\triangle ADP \cong \triangle ADH$ ，

$$\therefore PD = HD, PG = EH = \frac{3}{2},$$

设 $DE = x$ ，则 $DH = DP = x + \frac{3}{2}$ ， $FD = 1 + 2 - x = 3 - x$ ，

$Rt\triangle PDF$ 中， $PF^2 + DF^2 = PD^2$ ，

$$\text{即 } (\frac{3}{2})^2 + (3 - x)^2 = (x + \frac{3}{2})^2,$$

解得 $x = 1$ ，

$\therefore OD = 2 - 1 = 1$ ，即 D (1, 0)，

根据点 A (2, 3) 和点 D (1, 0)，可得直线 AD 的解析式为 $y = 3x - 3$ ，

$$\text{解方程组} \begin{cases} y=3x-3 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases},$$

$$\text{可得} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-1 \\ y=-6 \end{cases},$$

$$\therefore C(-1, -6),$$

故答案为: $(-1, -6)$.

解法二: 如图, 过 A 作 $AD \perp y$ 轴于 D, 将 AB 绕着点 B 顺时针旋转 90° , 得到 $A'B$, 过 A' 作 $A'H \perp y$ 轴于 H,

由 $AB=BA'$, $\angle ADB=\angle BHA'=90^\circ$, $\angle BAD=\angle A'BH$, 可得 $\triangle ABD \cong \triangle BA'H$,

$$\therefore BH=AD=2,$$

$$\text{又} \because OB=2,$$

$\therefore$ 点 H 与点 O 重合, 点 A' 在 x 轴上,

$$\therefore A'(1, 0),$$

又 $\because$ 等腰 $\text{Rt}\triangle ABA'$ 中, $\angle BAA'=45^\circ$, 而 $\angle BAC=45^\circ$,

$\therefore$ 点 A' 在 AC 上,

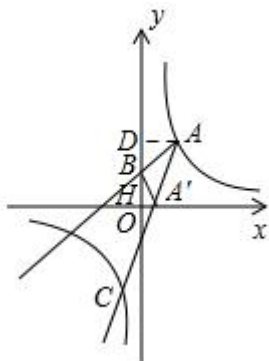
由 $A(2, 3)$, $A'(1, 0)$, 可得直线 AC 的解析式为 $y=3x-3$,

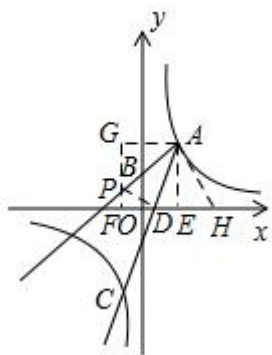
$$\text{解方程组} \begin{cases} y=3x-3 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases},$$

$$\text{可得} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-1 \\ y=-6 \end{cases},$$

$$\therefore C(-1, -6),$$

故答案为: $(-1, -6)$.





三. 解答题 (共 7 小题)

19. 【分析】(1) 过点 B 作 $BH \perp CA$ 交 CA 的延长线于点 H, 根据三角函数可求 BH 的长;

(2) 根据勾股定理可求 DH, 在 Rt△ABH 中, 根据三角函数可求 AH, 进一步得到 AD 的长.

【解答】解：（1）过点 B 作 $BH \perp CA$ 交 CA 的延长线于点 H，

$\therefore \angle MBC = 60^\circ,$

$$\therefore \angle CBA = 30^\circ,$$

$\therefore \angle NAD = 30^\circ,$

$$\therefore \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA = 180^\circ - \angle BAC - \angle CBA = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = BC \times \sin \angle BCA = 150 \times \frac{1}{2} = 75 \text{ (海里)}.$$

答: B 点到直线 CA 的距离是 75 海里.

(2) $\because BD=75\sqrt{2}$ 海里, $BH=75$ 海里,

$$\therefore DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = 75 \text{ (海里)},$$

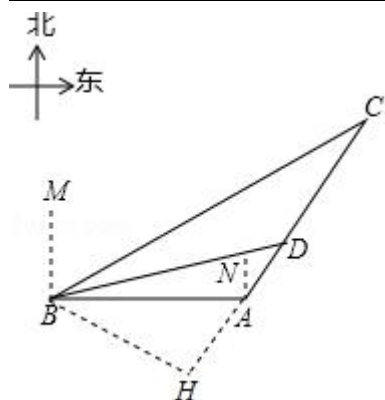
$$\therefore \angle BAH = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\tan \angle BAH = \frac{BH}{AH} = \sqrt{3}$,

$$\therefore AH = 25\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = DH - AH = (75 - 25\sqrt{3}) \text{ (海里)}.$$

答：执法船从 A 到 D 航行了 $(75 - 25\sqrt{3})$ 海里.

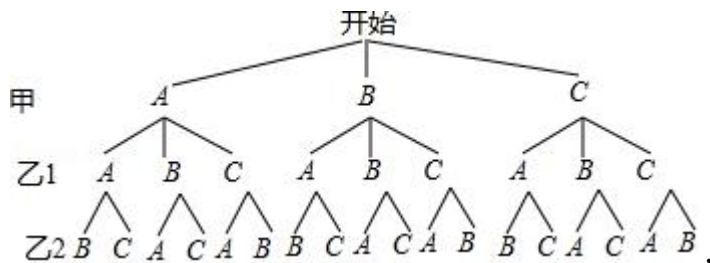


20. 【分析】(1) 直接利用概率公式求出甲投放的垃圾恰好是 A 类的概率；

(2) 首先利用树状图法列举出所有可能，进而利用概率公式求出答案.

【解答】解：(1) $\because$ 垃圾要按 A, B, C 三类分别装袋，甲投放了一袋垃圾，
 $\therefore$ 甲投放的垃圾恰好是 A 类的概率为： $\frac{1}{3}$ ；

(2) 如图所示：



由图可知，共有 18 种可能结果，其中乙投放的垃圾恰有一袋与甲投放的垃圾是同类的结果有 12 种，

所以， $P(\text{乙投放的垃圾恰有一袋与甲投放的垃圾是同类}) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ；

即，乙投放的垃圾恰有一袋与甲投放的垃圾是同一类的概率是： $\frac{2}{3}$.

21. 【分析】(1) 作 $AG \parallel MN$ 交 BN 延长线于点 G ，证 $\triangle ABG \sim \triangle MBN$ 得 $\frac{BG}{BN} = \frac{AB}{MB}$ ，

即 $\frac{NG}{BN} = \frac{AM}{MB}$ ，同理由 $\triangle ACG \sim \triangle OCN$ 得 $\frac{NG}{CN} = \frac{AO}{CO}$ ，结合 $AO=CO$ 得 $NG=CN$ ，从而由

$\frac{CN}{BN} = \frac{NG}{BN} = \frac{AM}{BM}$ 可得答案；

(2) 由 $\frac{NG}{BN} = \frac{AM}{MB}$ 、 $\frac{CO}{AO} = \frac{CN}{NG}$ 知 $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CO}{OA} \cdot \frac{NG}{BN} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CN}{NG} = 1$ ；

(3) 由(2)知, 在 $\triangle ABD$ 中有 $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1$ 、在 $\triangle ACD$ 中有 $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1$, 从而 $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA}$, 据此知 $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{BD}{CB} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{1}{6}$.

【解答】解: (1) 过点 A 作 $AG \parallel MN$ 交 BN 延长线于点 G,

$$\therefore \angle G = \angle BNM,$$

$$\text{又 } \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle MBN,$$

$$\therefore \frac{BG}{BN} = \frac{AB}{MB},$$

$$\therefore \frac{BG}{BN} - 1 = \frac{AB}{MB} - 1,$$

$$\therefore \frac{BG - BN}{BN} = \frac{AB - MB}{MB}, \text{ 即 } \frac{NG}{BN} = \frac{AM}{MB},$$

同理, 在 $\triangle ACG$ 和 $\triangle OCN$ 中, $\frac{NG}{CN} = \frac{AO}{CO}$,

$$\therefore \frac{CO}{AO} = \frac{CN}{NG},$$

$$\because O \text{ 为 } AC \text{ 中点},$$

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore NG = CN,$$

$$\therefore \frac{CN}{BN} = \frac{NG}{BN} = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3};$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } \frac{NG}{BN} = \frac{AM}{MB}, \frac{CO}{AO} = \frac{CN}{NG},$$

$$\therefore \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CO}{OA} = \frac{NG}{BN} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CN}{NG} = 1;$$

(3) 在 $\triangle ABD$ 中, 点 P 是 AD 上的一点, 过点 P 的直线与 AC、BD 的延长线相交于点 C,

$$\text{由 (2) 得 } \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1,$$

在 $\triangle ACD$ 中, 点 P 是 AD 上一点, 过点 P 是 AD 上一点, 过点 P 的直线与 AC、AD 的延长线分别相交于点 E、B,

$$\text{由 (2) 得 } \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1,$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA},$$

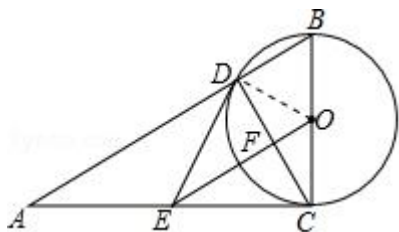
$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{BD}{CB} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

22. 【分析】(1) 连接 OD ，根据弧长公式，求出圆心角 $\angle DOB$ 即可解决问题；

(2) 欲证明 DE 是切线，只要证明 $OD \perp DE$ 即可；

(3) 首先证明 EF 是 $\triangle ADC$ 的中位线，再证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ 即可解决问题；

【解答】解：(1) 连接 OD 。

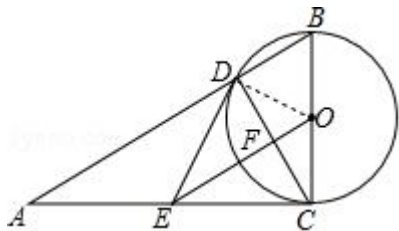


$$\because \angle BCD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DOB = 72^\circ$$

$$\therefore \widehat{BD} \text{ 的长} = \frac{72 \cdot \pi \cdot 5}{180} = 2\pi.$$

(2) 连接 OD 。



$$\because AE = EC, OB = OC,$$

$$\therefore OE \parallel AB,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore OE \perp CD,$$

$$\because OD = OC,$$

$$\therefore \angle DOE = \angle COE,$$

在 $\triangle EOD$ 和 $\triangle EOC$ 中，

$$\begin{cases} OD = OC \\ \angle DOE = \angle COE, \\ OE = OE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EOD \cong \triangle EOC,$$

$$\therefore \angle EDO = \angle ECO = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp DE,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线。

(3) $\because OE \perp CD,$

$$\therefore DF = CF, \because AE = EC,$$

$$\therefore AD = 2EF,$$

$$\because \angle CAD = \angle CAB, \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AB,$$

$$\because AC = 2CE,$$

$$\therefore 4CE^2 = 2EF \cdot AB,$$

$$\therefore 2CE^2 = EF \cdot AB.$$

23. 【分析】(1) 把 A (3, m) 代入 $y=2x$, 可得 m 的值, 把 A (3, 6) 代入 $y=\frac{k}{x}$,

可得双曲线的解析式为 $y=\frac{18}{x}$; 解方程组 $\begin{cases} y=-x+9 \\ y=\frac{18}{x} \end{cases}$, 可得点 B 的坐标;

(2) 作点 A 关于 y 轴的对称点 A' (-3, 6), 连接 A'P, 依据 $PA+PB=A'P+BP \geq A'B$, 可得当 A', P, B 三点共线时, PA+PB 的最小值等于 A'B 的长, 求得 A'B 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x+5$, 令 $x=0$, 则 $y=5$, 即可得出点 P 的坐标为 (0, 5).

【解答】解: (1) 把 A (3, m) 代入 $y=2x$, 可得

$$m=2 \times 3=6,$$

$$\therefore A(3, 6),$$

把 A (3, 6) 代入 $y=\frac{k}{x}$, 可得 $k=3 \times 6=18$,

$$\therefore \text{双曲线的解析式为 } y=\frac{18}{x};$$

当 $x > 3$ 时, 解方程组 $\begin{cases} y=-x+9 \\ y=\frac{18}{x} \end{cases}$, 可得

$$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \text{点 B 的坐标为 } (6, 3);$$

(2) 如图所示, 作点 A 关于 y 轴的对称点 A' (-3, 6), 连接 A'P, 则 $A'P=AP$,

$$\therefore PA+PB=A'P+BP \geq A'B,$$

$\therefore$ 当 A', P, B 三点共线时, PA+PB 的最小值等于 A'B 的长,

设 A'B 的解析式为 $y=ax+b$,

把 A' (-3, 6), B (6, 3) 代入, 可得

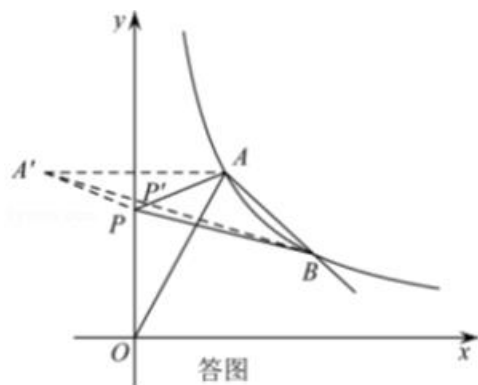
$$\begin{cases} 6=-3a+b \\ 3=6a+b \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=5 \end{cases},$$

$\therefore A'B$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 5$,

令 $x=0$, 则 $y=5$,

∴点 P 的坐标为 (0, 5).



24. 【分析】(1) 作 $FH \perp AB$ 于 H , 由 AAS 证明 $\triangle EFH \cong \triangle CED$, 得出 $FH=CD=4$, $AH=AD=4$, 求出 $BH=AB+AH=8$, 由勾股定理即可得出答案:

(2) 过 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H, 作 $FM \perp AB$ 于 M, 则 $FM = AH$, $AM = FH$,

①同(1)得: $\triangle EFH \cong \triangle CED$, 得出 $FH=DE=3$, $EH=CD=4$ 即可;

②求出 $BM=AB+AM=7$, $FM=AE+EH=5$, 由勾股定理即可得出答案;

(3) 分两种情况: ①当点 E 在边 AD 的左侧时, 过 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H, 交 BC 延长线于 K, 同(1)得: $\triangle EFH \cong \triangle CED$, 得出 $FH=DE=4+AE$, $EH=CD=4$, 得出 $FK=8+AE$, 在 $Rt\triangle BFK$ 中, $BK=AH=EH-AE=4-AE$, 由勾股定理得出方程, 解方程即可;

②当点 E 在边 AD 的右侧时, 过 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H, 交 BC 延长线于 K, 同理得: $AE = 2 + \sqrt{41}$.

【解答】解：（1）作 $FH \perp AB$ 于 H ，如图 1 所示：

则 $\angle FHE = 90^\circ$,

∵ 四边形 ABCD 和四边形 CEFG 是正方形,

$$\therefore AD=CD=4, EF=CE, \angle ADC=\angle DAH=\angle BAD=\angle CEF=90^\circ,$$
$$\therefore \angle FEH = \angle CED,$$

在 $\triangle EFH$ 和 $\triangle CED$ 中,

$$\begin{cases} \angle FHE = \angle EDC = 90^\circ \\ \angle FEH = \angle CED \\ EF = CE \end{cases},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle FEH = \angle CED \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EF=CE \end{array} \right.$$

$$\therefore \triangle EFH \cong \triangle CED \text{ (AAS),}$$
$$\therefore FH=CD=4, \quad AH=AD=4,$$
$$\therefore BH = AB + AH = 8,$$

$$\therefore BF = \sqrt{BH^2 + FH^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5};$$

(2) 过 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H, 作 $FM \perp AB$ 于 M, 如图 2 所示:

则 $FM=AH$, $AM=FH$,

$$\textcircled{1} \because AD=4, AE=1, \therefore DE=3,$$

同 (1) 得: $\triangle EFH \cong \triangle CED$ (AAS),

$$\therefore FH=DE=3, EH=CD=4,$$

即点 F 到 AD 的距离为 3;

$$\textcircled{2} \therefore BM=AB+AM=4+3=7, FM=AE+EH=5,$$

$$\therefore BF=\sqrt{BM^2+FM^2}=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74};$$

(3) 分两种情况:

①当点 E 在边 AD 的左侧时, 过 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 于点 H, 交 BC 延长线于 K. 如图 3 所示:

同 (1) 得: $\triangle EFH \cong \triangle CED$,

$$\therefore FH=DE=4+AE, EH=CD=4,$$

$$\therefore FK=8+AE, \text{在 Rt}\triangle BFK \text{ 中, } BK=AH=EH-AE=4-AE,$$

$$\text{由勾股定理得: } (4-AE)^2 + (8+AE)^2 = (3\sqrt{10})^2,$$

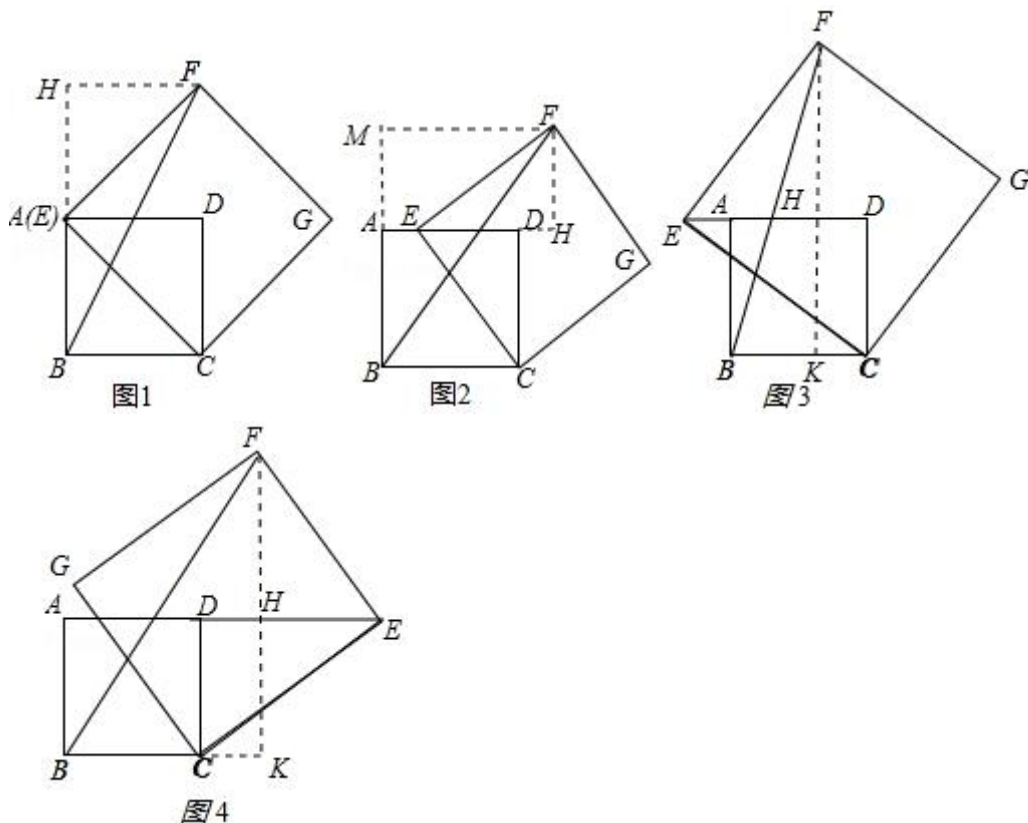
解得: $AE=1$ 或 $AE=-5$ (舍去),

$$\therefore AE=1;$$

②当点 E 在边 AD 的右侧时, 过 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H, 交 BC 延长线于 K, 如图 4 所示:

$$\text{同理得: } AE=2+\sqrt{41}.$$

综上所述: AE 的长为 1 或 $2+\sqrt{41}$.



25. 【分析】(1) 利用待定系数法即可解决问题；

(2) 构建二次函数利用二次函数的性质即可解决问题；

(3) 分三种情形分别求解①当 $\angle ACP=90^\circ$ ，由 $AC^2+PC^2=PA^2$ ，列出方程即可解决. ②当 $\angle CAP=90^\circ$ 时，由 $AC^2+PA^2=PC^2$ ，列出方程即可解决. ③当 $\angle APC=90^\circ$ 时，由 $PA^2+PC^2=AC^2$ ，列出方程即可.

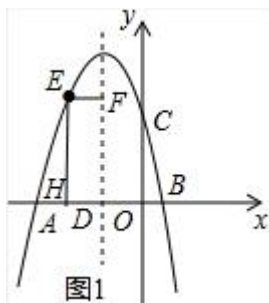
【解答】解：(1) 把 $A(-5, 0)$ ， $B(1, 0)$ 两点坐标代入 $y = -x^2 + bx + c$ ，

$$\text{得到} \begin{cases} -25 - 5b + c = 0 \\ -1 + b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -4 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y = -x^2 - 4x + 5$.

(2) 如图 1 中，



$\therefore$ 抛物线的对称轴 $x = -2$ ， $E(x, -x^2 - 4x + 5)$ ，

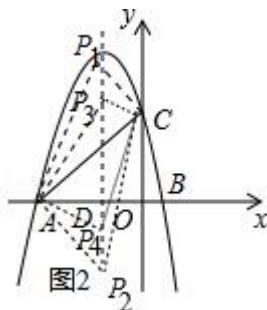
$\therefore EH = -x^2 - 4x + 5$ ， $EF = -2 - x$ ，

$\therefore$ 矩形 EFDH 的周长 $= 2(EH + EF) = 2(-x^2 - 5x + 3) = -2(x + \frac{5}{2})^2 + \frac{37}{2}$ ，

$\therefore -2 < 0$ ，

$\therefore x = -\frac{5}{2}$ 时，矩形 EHDF 的周长最大，最大值为 $\frac{37}{2}$.

(3) 如图 2 中，设 $P(-2, m)$



①当 $\angle ACP=90^\circ$ ， $\therefore AC^2 + PC^2 = PA^2$ ，

$$\therefore (5\sqrt{2})^2 + 2^2 + (m - 5)^2 = 3^2 + m^2,$$

解得 $m = 7$ ，

$\therefore P_1(-2, 7)$.

②当 $\angle CAP=90^\circ$ 时， $\because AC^2+PA^2=PC^2$ ，

$$\therefore (5\sqrt{2})^2+3^2+m^2=2^2+(m-5)^2,$$

解得 $m=-3$ ，

$$\therefore P_2(-2, -3).$$

③当 $\angle APC=90^\circ$ 时， $\because PA^2+PC^2=AC^2$ ，

$$\therefore 3^2+m^2+2^2+(m-5)^2=(5\sqrt{2})^2,$$

解得 $m=6$ 或 -1 ，

$$\therefore P_3(-2, 6), P_4(-2, -1),$$

综上所述，满足条件的点 P 坐标为 $(-2, 7)$ 或 $(-2, -3)$ 或 $(-2, 6)$ 或 $(-2, -1)$ 。