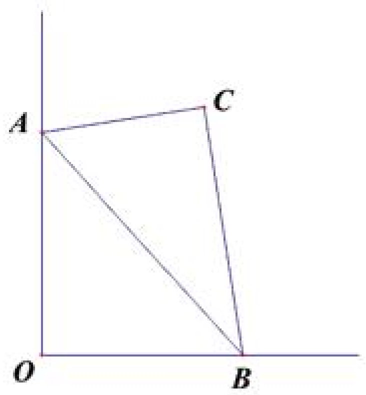
初中数学提前招生模拟试卷十五

一、 填空题（每题 10 分，共 80 分）

1. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点（0，0），（22.5，2020.5），（62.5，1812.5），则抛物线与 x 轴的另一交点的横坐标为_____________（精确到 0.001）。

2. 已知实数 x，则 $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ 的最小值为______________。

3. 如图，Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=4，BC=5，现点 A，B 分别在 y 轴，x 轴正半轴上运动，则 C 点的运动轨迹的长度为___________。



4. 已知 m 为整数，关于 x 的二次方程 $(m^2+4m)x^2+(m^2+2m+24)x+6(m-4)=0$ 有两个不同的正整数根，则 m 的值为__________。

5. 在 1，2，3，…，2017 这 2017 个数中，数码中有 2 或 4 的数有_________个。

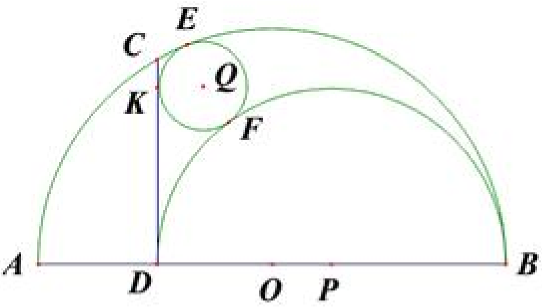
6. 已知在△ABC 中，AB=2，AC=3，点 D、E 在边 AC、AB 上，且∠ABD=4∠DBC，∠ACE=4∠ECB，$AC\times BD=AB\times CE$，则△ABC 的面积为______________。

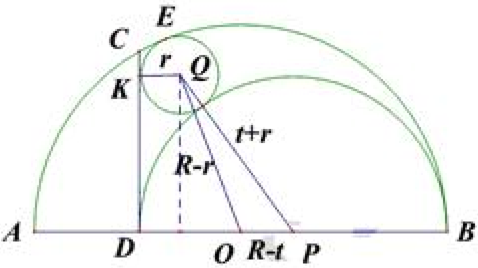
7. 已知正整数 n 满足 n^3 的个位、百位、万位上的数码都是 7，则 n 的最小值是__________。

8. 已知 a、b、c、d 四个不相等的实数，满足 c、d 是方程 $x^2-8ax-9b=0$ 的两实数根，a、b 是方程 $x^2-8cx-9d=0$ 的两实数根，则 $a+b+c+d=$__________。

二、解答题（第 9 题、第 10 题 15 分，第 11 题、第 12 题 20 分）

9. 如图，⊙Q与⊙O内切于点 E,与 CD 相切于点 K，与⊙P外切于点 F，⊙P与 CD 相切于点 D，内切于⊙O上的 B 点，AB 为⊙O直径，若⊙O半径为 R，⊙Q的半径为 r，则 CD 为多少？





10. 已知 x、y 为非负实数，满足$\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}+\sqrt{1-\dfrac{y^2}{16}}=\dfrac{3}{2}$，求$xy$的最大值。

11. 已知有 20 个红球，17 个白球，红球和白球总质量相等，但小于 340 克，每个球的质量为整数克数，证明：可以拿出一些红球和白球（可以是一个但不可以是全部），使拿出的红球与白球质量相等。

12. 已知 p 为素数，问：是否存在 p 使 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 的最小公倍数能整除 pc(a,b,c 为两两不同的正整数)，若存在，请求出素数 p 的最小值，若不存在，请说明理由并证明。

试题解析

一. 填空题

1. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(0,0)$，$(22.5,2020.5)$，$(62.5,1812.5)$，则抛物线与 x 轴的另一交点的横坐标为________（精确到0.001）

【答】81.579

【解析】用计算器，或者暴力死算，或者拉格朗日插值公式

$$0=\frac{(x-0)(x-22.5)}{(62.5-0)(62.5-22.5)}\times1812.5+\frac{(x-0)(x-62.5)}{(22.5-0)(22.5-62.5)}\times2020.5+\frac{(x-22.5)(x-62.5)}{(0-22.5)(0-62.5)}\times0$$

也即 $\frac{x-22.5}{62.5}\times1812.5=\frac{x-62.5}{22.5}\times2020.5\Rightarrow x=\frac{1550}{19}\approx81.579$

2. 已知实数 x，求 $\frac{x-1}{x^2-x+1}$ 的最小值________

【答】-1

【解析】当 $x\geqslant1$ 原式 $\geqslant0$，

当 $x<1$，原式 $=\frac{1}{x-1+\frac{1}{x-1}+1}=\frac{1}{-1-\left(1-x+\frac{1}{1-x}-2\right)}\geqslant\frac{1}{-1-0}=-1$

$x=0$ 时可取等.

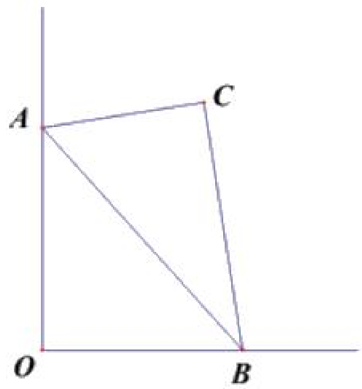
3. 如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=5$，现点 A，B 分别在 y 轴，x 轴正半轴上运动，则 C 点的运动轨迹的长度为________

【答】$\sqrt{41}-4$

【解析】由题意 $AOBC$ 共圆 $\Rightarrow\angle COB=\angle CAB$ 为定值，

而 $OC=\sin\angle CBO\times AB$，$\angle CBA\leqslant\angle CBO\leqslant180°-\angle CAB<180°-\angle CBA$

$\Rightarrow\frac{4}{\sqrt{41}}=\sin\angle CBA\leqslant\sin\angle CBO\leqslant1\Rightarrow4\leqslant OC\leqslant\sqrt{41}$，$\sqrt{41}-4$ 为所求



【例题3】 $\triangle ABC, C=90^\circ, A=60^\circ, AB=10$，把$\triangle ABC$放到直角坐标系中，使得$A,B,C$成顺时针，并且$A$可以在$x$轴正半轴（含原点）运动，$B$可以在$y$轴正半轴（含原点）运动，求$AB$中点$D$的轨迹方程，$C$的轨迹方程

【分析】 D的轨迹方程为$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$，$C$的轨迹方程$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, x\in\left[\frac{5\sqrt{3}}{2}, 5\sqrt{3}\right]$

4. 已知m为整数，关于x的二次方程$\left(m^2+4m\right)x^2+\left(m^2+2m+24\right)x+6(m-4)=0$有两个不同的正整数根，则$m$的值为________

【答】-3

【解析】因为两根和>0，$m^2+2m+24>0 \Rightarrow m^2+4m<0 \Rightarrow m=-1, -2, -3$，

若$m=-1$，$-3x^2+23x-30=0$舍，

若$m=-2$，$-4x^2+24x-36=0 \Rightarrow$ 两根相同舍，

若$m=-3$，$-3x^2+27x-42=0 \Rightarrow x=2$ 或 7，综上$m=-3$

5. 在1，2，3，…，2017这2017个数中，数码中有2或4的数有_______个

【答】994

【解析】2000以内无2，4有$2\times8\times8\times8-1=1023$个（去掉0），

于是共$2000-1023+2017-2000=994$个

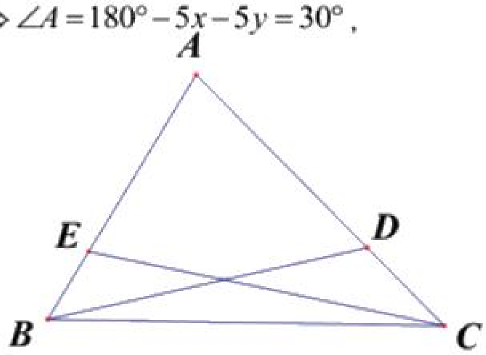
6. 已知在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，点D，E在边AC，AB上，且$\angle ABD=4\angle DBC$，$\angle ACE=4\angle ECB$，$AC\times BD=AB\times CE$，则$\triangle ABC$的面积为__________

【答】$\frac{3}{2}$

【解析】设$\angle DBC=x$，$\angle ECB=y \Rightarrow \frac{\sin(5y+x)}{\sin\angle A}=\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}=\frac{\sin(5x+y)}{\sin\angle A}$

显然$x\neq y$，$\Rightarrow 6x+6y=180^\circ \Rightarrow \angle A=180^\circ-5x-5y=30^\circ$，

$S=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin30^\circ=\frac{3}{2}$



7. 已知正整数n满足n^3的个位，百位，万位上的数码都是7，则n的最小值是________

【答】83

【解析】$n^3 \equiv \overline{7x7y7}\left(\bmod 10^5\right)$

由$n^3 \equiv \overline{7x7y7}\left(\bmod 5\right)$得$n=5k+3$，$n$为奇数可设$n=10t+3$，$n^3>70000 \Rightarrow t \geqslant 4$，

$\Rightarrow 100t^3+90t^2+27t+2 \equiv \overline{7x7y}\left(\bmod 10^4\right) \Rightarrow 10t^2+7t+2 \equiv \overline{1y}\left(\bmod 20\right)$

当t为偶数，$7t+2 \equiv \overline{1y}\left(\bmod 20\right)$，$t$代入4进原式不成立，故至少为8，

当t为奇数，$7t+12 \equiv \overline{1y}\left(\bmod 20\right)$，$t$至少为9，$83^3=571787$符合条件。

8. 已知a，b，c，d四个不相等的实数，满足c，d是方程$x^2-8ax-9b=0$的两实根，a，b是方程$x^2-8cx-9d=0$的两实根，则$a+b+c+d=$________

【答】648

【解析】

$$\begin{cases} c+d=8a \\ cd=-9b \\ a+b=8c \\ ab=-9d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\left(8a-c\right)+9\left(8c-a\right)=0 \\ a\left(8c-a\right)+9\left(8a-c\right)=0 \end{cases} \Rightarrow a^2-c^2+81\left(c-a\right)=0 \Rightarrow a+c=81$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=8\left(a+c\right)=648$$

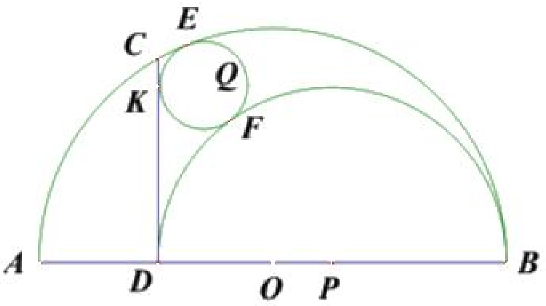
二、解答题（第9、10题，每题15分；第11、12题每题20分，共70分）

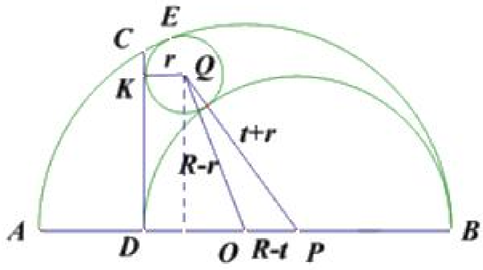
9.设a、b、c、d为四个不同的实数，若a、b为方程$x^2-10cx-11d=0$的解，c、d为方程$x^2-10ax-11b=0$的解.求$a+b+c+d$的值.

【分析】根据韦达定理$a+b=10c, ab=-11d, c+d=10a, cd=-11b$，消去$a,b$得$c(c+d)=1210$，$\frac{121}{c}-\frac{cd}{11}=10c$，消去$d$，得$(c+11)(c^2-121c+121)=0$，若$c=-11$此时因为$ac=121$得$a=c$矛盾，所以$a,c$为方程$x^2-121x+121=0$两根，$a+c=121$，$b+d=9(a+c)$，$a+b+c+d=1210$

二. 解答题

9. 如图，$\odot Q$ 与 $\odot O$ 内切于点 E，与 CD 相切于点 K，与 $\odot P$ 外切于点 F，$\odot P$ 与 CD 相切于点 D，内切于 $\odot O$ 上的 B 点，AB 为 $\odot O$ 直径，若 $\odot O$ 半径为 R，$\odot Q$ 半径为 r，则 CD 为多少？





【答】$2\sqrt{Rr}$

【解析】设圆 P 半径为 t，则

$$(t+r)^2-(t-r)^2=(R-r)^2-(2t-R-r)^2 \Rightarrow tr=(t-r)(t-R) \Rightarrow t^2-tR+Rr=0$$

$$CD^2=AD\times DB=R^2-OD^2=R^2-(2t-R)^2=4tR-4t^2=4Rr \Rightarrow CD=2\sqrt{Rr}$$

❖鞋匠皮刀形问题

鞋匠皮刀形问题　如图 3.222，设 C 为半圆直径 AB 上的一点，并设 $AB=2r$，$AC=2r_1$，$CB=2r_2$. 在形内分别以 AC，BC 为直径作两个半圆，再作 $CQ\perp AB$，交半圆 AB 于 P. 设 TW 为半圆 AC 和 CB 的公切线，且与 CP 交于 S，则①

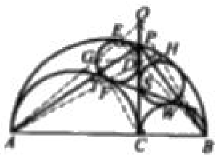


图 3.222

(1) 皮刀形 $ATCWBP$ 的面积(记为 S_1) 等于以 CP 为直径的圆面积(记为 S_2).

(2) CP 与 TW 相等，且互相平分于 S，即 C,T,P,W 四点共圆，它的圆心为 S.

(3) 三点 A,T,P 共线，B,W,P 也共线.

(4) 外切于半圆 AC(或半圆 CB) 和内切于半圆 AB 以及 CP 的两个圆必相等.

该图形出现于阿基米德所著的《引理集》(也可能是后人收集整理阿基米德研究过的一些初等几何问题而成)，它具有许多奇妙的性质，曾为许多人研究过，如马查，西蒙等.

(1) $S_1=\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2-\frac{1}{2}\pi r_2^2=$

$\frac{1}{2}\pi((r_1+r_2)^2-r_1^2-r_2^2)=\frac{1}{4}\pi(2r_1\cdot 2r_2)=$

$\frac{1}{4}\pi CP^2=\pi\cdot(\frac{CP}{2})^2=S_2$

(2) 因为 $CP^2=4r_1r_2$，$TW^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=4r_1r_2$，所以 $CP=TW$. 又 $SW=SC$，$SC=ST$，所以 $SC=SP$，故 C,T,P,W 四点共圆，它的圆心为 S.

10. 已知 x，y 为非负实数，满足 $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}=\frac{3}{2}$，求 xy 的最大值.

【答】$\frac{7}{2}$

【解析】$\frac{3}{2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}\leqslant\sqrt{(1+1)\times\left(1-\frac{x^2}{4}+1-\frac{y^2}{16}\right)}\leqslant\sqrt{2\times\left(2-2\sqrt{\frac{x^2y^2}{64}}\right)}$

$\Rightarrow xy\leqslant\frac{7}{2}$，当 $x=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$y=\sqrt{7}$ 时可取等

11. 已知有20个红球，17个白球，红球和白球总质量相等，但小于340克，每个球的质量为整数克数，证明：可以拿出一些红球和白球（可以是一个但不可以是全部），使拿出的红球与白球质量相等

【解析】加强命题证明 a 个红球，b 个白球，总质量小于 ab 时命题成立。

首先 $a=2$，$b=2$ 时显然成立，设 $a+b=n$，数归：假设命题对小于 n 成立，下证 n 成立。

不妨设红球和白球重量分别为 $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_a$，$y_1\leqslant y_2\leqslant\ldots\leqslant y_b$，

若 $x_a=y_b$ 得证，不妨设 $x_a>y_b$，则 x_1，$x_2\ldots$，x_a-y_b 和 y_1，y_2，…，y_{b-1} 共 $n-1$ 个球，且 $y_1+\ldots+y_{b-1}\leqslant\frac{b-1}{b}(y_1+\ldots+y_b)<\frac{(b-1)ab}{b}=a(b-1)$，通过归纳，必有两组质量相等，若这两组中没有 x_a-x_b，则直接选取，否则，红球给 x_a-y_b 补上 x_b，白球补上 y_b 即可。取 $(a,b)=(20,17)$ 命题得证。（本题思路由复旦大学武炳杰老师提供）

12. 已知 p 为素数，问：是否存在 p 使 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 的最小公倍数能整出 pc（a，b，c 为两两不同的正整数）若存在，请求出素数 p 的最小值，若不存在，请说明理由并证明

【解析】显然 $a+b\mid pc$，$a+c\mid pc$，$b+c\mid pc$，

若 $p=2\Rightarrow a=c$ 矛盾，由 $a+c>c\Rightarrow p\mid a+c$，$p\mid b+c$，

若 $p\mid a+b\Rightarrow p\mid 2(a+b+c)\Rightarrow p\mid a$，$p\mid b$，$p\mid c\Rightarrow a+b\mid c$，

a，b，c 同除以最大公约数，可设 $(a,b,c)=1$，

设 $(a,c)=r_a$，$(b,c)=r_b$，$a=r_ax$，$b=r_by$，$c=r_ar_bz$，

显然 $(r_a,r_b)=(x,r_bz)=(y,r_az)=1$，

由 $a+c\mid pc\Rightarrow r_ax+r_ar_bz\mid pr_ar_bz\Rightarrow x+r_bz\mid pr_bz\Rightarrow x+r_bz\mid p\Rightarrow p=x+r_bz$

同理有 $p=x+r_bz=y+r_az$，若 $x=y\Rightarrow r_a=r_b\Rightarrow a=b$ 矛盾，不妨设 $x>y\Rightarrow x>z$，

由 $a+b\mid c\Rightarrow r_ax+r_by\mid r_ar_bz\Rightarrow r_ax+r_by\mid z\Rightarrow z>r_ax>r_az$ 矛盾。证毕。