初中数学提前招生模拟试卷十

解答本试卷可以使用科学计算器

一、 填空题（每题 10 分，共 80 分）

1. 已知 ΔABC 的边 BC 上的高为 3，与边 BC 平行的两条直线 l_1、l_2 将 ΔABC 的面积三等分，则直线 l_1 与 l_2 之间的距离为____________。

2. 同时投掷两颗骰子，$P(a)$ 表示两颗骰子朝上一面的点数之和为 a 的概率，则 $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)$ 的值为_____________。

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A（1，0），点 B 在直线 $y=3x$ 上，使得 ΔAOB 是等腰三角形，则点 B 的坐标是___________________。

4. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$BC=9$。点 E、F、G、H 分别在 AB、BC、CD、DA 上，使得 $AE=CG=3$，$BF=DH=4$。P 是矩形内部的一点，若四边形 $AEPH$ 的面积为 15，则四边形 $PFCG$ 的面积等于______________。

5. 使得 n^4-3n^2+9 是素数的整数 n 共有__________个。

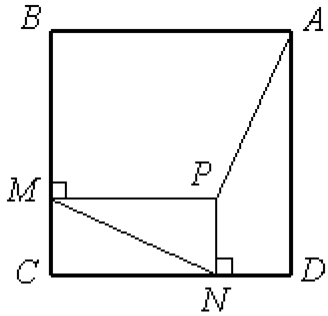
6. 平面上一动点 P 到长为 10 的线段 AB 所在直线的距离为 3，当 $PA\cdot PB$ 取到最小值时，$PA+PB=$____________。

7. 已知一个梯形的上底、高、下底恰好是三个连续的正整数，且这三个数使得多项式 x^3-30x^2+ax（a 是常数）的值也恰好是按同样顺序的三个连续正整数，则这个梯形的面积为_______________。

8. 将所有除以 4 余 2 和除以 4 余 3 的正整数从小到大排成一列，设 S_n 表示这数列的前 n 项的和，则 $[\sqrt{S_1}]+[\sqrt{S_2}]+\cdots+[\sqrt{S_{2012}}]=$__________。（这里 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。）

二、 解答题（第 9,10 题，每题 15 分，第 11,12 题，每题 20 分，共 70 分）

9. 如图，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，过点 P 分别作 BC，CD 的垂线，垂足分别为 M，N。已知 $AP \perp MN$，求证：或者 $AP = MN$，或者 $AP \perp BD$。



10. 解方程组 $\begin{cases} ab+c+d=3 \\ bc+d+a=5 \\ cd+a+b=2 \\ da+b+c=6 \end{cases}$。

11. 给定正实数 a，对任意一个正整数 n，记 $f(n)=\left[\dfrac{n+\left[\frac{a}{n}\right]}{2}\right]$，这里，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。

（1） 若 $f(5)=5$，求 a 的取值范围；

（2） 求证：$f(n)>\sqrt{a}-1$。

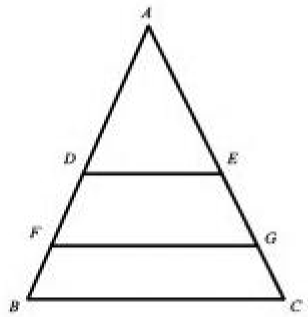
12. 证明：在任意 2013 个互不相同的实数中，一定存在两个数 x，y，满足

$2012|x-y|\cdot|1-xy|\le(1+x^2)(1+y^2)$

试题解析

一：填空题：（每题10分）

1　ΔABC 底边 BC 的高为3，直线 l_1,l_2 平行于 BC 将三角形的面积等分为三部分；那么 l_1,l_2 之间的距离为______________；



【分析】　如图：$\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ 且面积为 $1:3$；

得到 ΔADE 的高为 $\sqrt{3}$；

同理：$\Delta ADE \backsim \Delta AFG$ 且面积为 $1:2$

得到 ΔAFG 的高为 $\sqrt{6}$；

所以：l_1,l_2 之间的距离为 $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

2　设 $P_{(n)}$ 为两个骰子顶面上的数字之和为 n 的概率，求 $P_{(1)}+P_{(2)}+P_{(3)}+P_{(4)}+P_{(5)}=$______________；

【分析】　$P_{(1)}=0$；$P_{(2)}=\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$；$P_{(3)}=\frac{1\times2}{6\times6}=\frac{2}{36}$；$P_{(4)}=\frac{1\times2+1}{6\times6}=\frac{3}{36}$；$P_{(5)}=\frac{1\times2+1\times2}{6\times6}=\frac{4}{36}$

所以：$P_{(1)}+P_{(2)}+P_{(3)}+P_{(4)}+P_{(5)}=\frac{1+2+3+4}{36}=\frac{5}{18}$；

3　在平面直角坐标系中点 A 的坐标为 $(1,0)$，B 在直线 $y=3x$ 上；求所有的 B 的坐标，使得 OAB 为等腰三角形；

【分析】　设 B 点坐标为 $(t,3t)$；

（1）当 $BO=BA$ 时，$t=\frac{1}{2}$；B_1 点坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

（2）当 $OA=OB$ 时，$t^2+9t^2=1 \Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

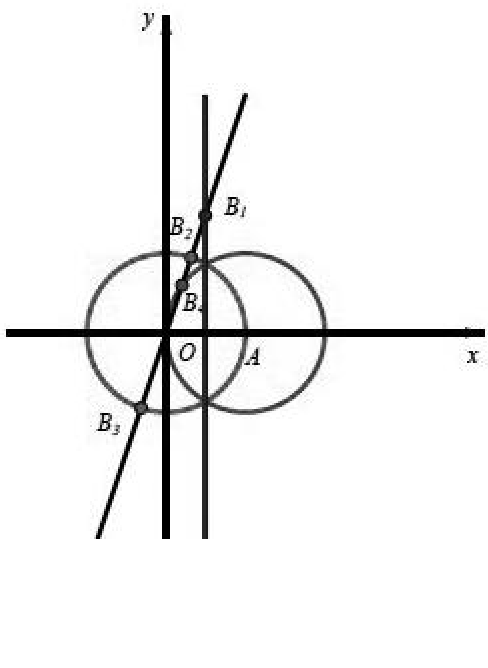
$B_{2,3}$ 点坐标为 $(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}),(-\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{3\sqrt{10}}{10})$

（3）当 $BO=BA$ 时，$(t-1)^2+(3t)^2=1 \Rightarrow t=\frac{1}{5}$

或者 $t=0$（舍）；B_4 点坐标为 $(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$

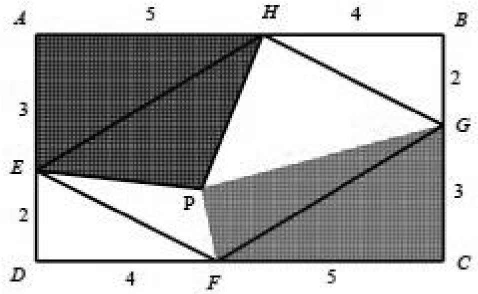
综上：B 点坐标为

$(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}),(-\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{3\sqrt{10}}{10})$ $(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$ $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$



4　矩形 $ABCD$ 中，$AD=5, AB=9$，$AE=CG=3, DF=BH=4$；P 为矩形 $ABCD$ 内一点且 $S_{AEPH}=15$

那么 $S_{PFCG}=$________；



【分析】　$\Delta AEH \cong \Delta CGF \Rightarrow EH=FG$; 同理 $EF=HG$；所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形；

$S_{EFGH}=5\times 9-3\times 5-2\times 4=22$；

所以 $S_{\Delta PEH}+S_{\Delta PFG}=\frac{1}{2}S_{EFGH}=11$；

所以 $S_{AEPH}+S_{PFCG}=11+3\times 5$；所以 $S_{PFCG}=11$

5　m^4-3m^2+9 为素数，那么满足要求的 m 有________个；

【分析】　$m^4-3m^2+9=m^4+6m^2+9-9m^2=(m^2+3)^2-(3m)^2=(m^2+3m+3)(m^2-3m+3)$；

这是两个大于零的数；故只有可能为 $m^2+3m+3=1$ 或者 $m^2-3m+3=1$；

解出 $m=\pm 1,\pm 2$；经检验，$m^4-3m^2+9=7$ 或者 13 均为质数；

所以共有 4 个；

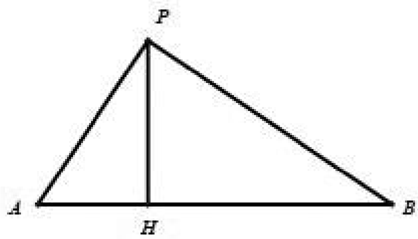
6　线段 $AB=10$，P 到 AB 的距离为 3；已知 $PA\cdot PB$ 最小，求 $PA+PB=$________；

【分析】　$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PH=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot PB\cdot \sin\angle APB \Rightarrow AP\cdot PB\cdot \sin\angle APB=30$；

所以 $AP\cdot PB\geq 30$；当且仅当 $AP\perp BP$ 时取等号；

此时 $AH\cdot BH=PH^2=9$；$AH+BH=10$；

得到 $AH=1, BH=9$；故 $AP+BP=4\sqrt{10}$



7　梯形 $ABCD$ 的上底，高，下底为从小到大的三个连续正整数且这三个正整数使 x^3-30x^2+ax（a 为常数）的值为同样顺序的三个连续正整数；那么梯形 $ABCD$ 的面积为________；

【分析】　设梯形的高为 t，那么上底为 $t-1$，下底为 $t+1$；那么的面积为 t^2；

由题意：$(t-1)^3-30(t-1)+a(t-1)+1=t^3-30t^2+at=(t+1)^3-30(t+1)^2+a(t+1)-1$

整理得：$\begin{cases}3t^2-3t-60t+30+a-1=0\\3t^2+3t-60t-30+a-1=0\end{cases}\Rightarrow t=10$；所以梯形的面积为 $t^2=100$

8　把所有除以 4 余 2 或者 3 的正整数从小到大排成一行，$S_{(n)}$ 为前 n 个之和，求

$[\sqrt{S_1}]+[\sqrt{S_2}]+...+[\sqrt{S_{2012}}]=$______________;

【分析】　$S_{(n)}=a_1+a_2+...+a_n>1+3+5+...+(2n-1)=n^2$;

$S_{(n)}=a_1+a_2+...+a_n<2+4+6+...+2n=n(n+1)<(n+1)^2$

故 $n<\sqrt{S_{(n)}}<n+1\Rightarrow[\sqrt{S_{(n)}}]=n$；所以 $[\sqrt{S_1}]+[\sqrt{S_2}]+...+[\sqrt{S_{2012}}]=1+2+...+2012=2025078$；

二：解答题:

9　（本题15分）正方形 $ABCD$ 内一点 P，过 P 过 $PM\perp BC, PN\perp CD$ 且垂足为 M,N；连接 AP，若 $AP\perp MN$，试证明：$AP=MN$ 或者 $AP\perp BD$

【分析】　延长 MP 交 AB 于点 E，那么 $\angle APE=\angle MPH=\angle PCM$；

所以 $\Delta APE\backsim\Delta PCM$；所以 $\frac{AE}{PE}=\frac{PM}{CM}\Rightarrow AE\cdot CM=PE\cdot PM$

又因为 $AE+CM=PE+PM$；由 Viete 定理：一定有

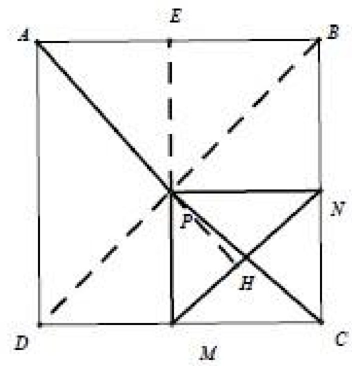
$AE=PE, CM=PM$ 或者 $AE=PM, CM=PE$；

若 $AE=PE, CM=PM$，$\angle EAP=\angle MCP=45^\circ$，

得到 A,P,C 三点共线；得到 $AP\perp BD$

若 $AE=PM, CM=PE$，则由勾股定理得到 $AP=MN$

综上：得证！



10　（本题15分）解方程组：$\begin{cases}ab+c+d=3\cdots\cdots(1)\\bc+a+d=5\cdots\cdots(2)\\cd+a+b=2\cdots\cdots(3)\\da+b+c=6\cdots\cdots(4)\end{cases}$

【分析】　（1）+（3）$\Rightarrow ab+cd+a+b+c+d=5$

（2）+（4）$\Rightarrow ad+bc+a+b+c+d=11$

相减得到：$ad+bc-ab-cd=6\Rightarrow(a-c)(d-b)=6$；故 $a\neq c, b\neq d$

（4）-（2）=（1）-（3）$\Rightarrow ad+b+c-bc-a-d=ab+c+d-cd-a-b$

$\Rightarrow(a+c-2)(b-d)=0$；所以 $a+c=2$；

（3）+（4）$\Rightarrow(a+c)d+(a+c)+2b=8\Rightarrow b+d=3$；

同理（4）-（3）=2×（2）-2×（1）$\Rightarrow(a-c)(d+2b-3)=0\Rightarrow d+2b=3$；

所以 $b=0,d=3$；代入 $(a-c)(d-b)=6$ 得到 $a-c=2$；所以 $a=2,c=0$；

综上：$(a,b,c,d)=(2,0,0,3)$ 为全部解；

11 （本题20分）设 $P(n)=\left[\frac{n+\left[\frac{a}{n}\right]}{2}\right]$；其中 n 为正整数，a 为正实数

（1）若 $P_{(5)}=5$，求 a 的取值范围；

（2）求证：$P(n)>\sqrt{a}-1$；

【分析】 （1）由题意：$5\le\frac{5+\left[\frac{a}{5}\right]}{2}<6$；所以 $10\le5+\left[\frac{a}{5}\right]<12\Rightarrow5\le\left[\frac{a}{5}\right]<7\Rightarrow25\le a<35$；

（2）令 $a=kn+b$，$k\in N$，$0\le b<n$

$$P(n)-\sqrt{a}+1=\left[\frac{n+k}{2}\right]-\sqrt{kn+b}+1$$

$$\ge\frac{n+k-1}{2}-\sqrt{kn+b}+1>\frac{n+k+1}{2}-\sqrt{kn+n}$$
$$=\frac{1}{2}(n+k+1-2\sqrt{(k+1)n})$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{n}\right)^2+(\sqrt{k+1})^2-2\sqrt{(k+1)n}\right]\ge0$$

$\therefore P(n)-\sqrt{a}+1>0$ 得证！

12 （本题20分）证明：在任意2013个互不相同的实数中，总存在两个数 x,y 满足 $2012|x-y||1-xy|\le(1+x^2)(1+y^2)$

【分析】 设任意2013个互不相同的实数为 $a_1,a_2,\dots,a_{2013}$；由于

$$\frac{|x-y||1-xy|}{(1+x^2)(1+y^2)}=\left|\frac{x^2y-xy^2+x-y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|=\left|\frac{x}{1+x^2}-\frac{y}{1+y^2}\right|$$；故令 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}$；

将区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 等分为2012个小区间，那么对于 $f(a_1),f(a_2),\dots,f(a_{2013})$ 这2013个数，必有两个数落在了同一个小区间；不妨设这两个数为 $f(x),f(y)$

于是有 $|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{2012}$；所以得证！