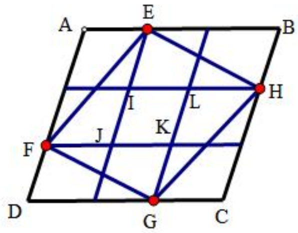
初中数学提前招生模拟试卷十一

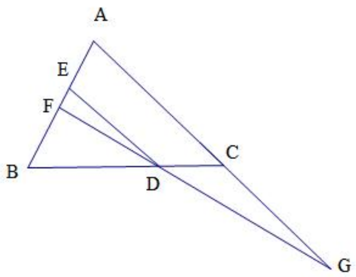
一、填空题(每题 10 分)

1.已知 $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{7}},b=\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$，则 $a^3-a+b^3-b=$________.

2.已知 $l_1//l_2//l_3//l_4,m_1//m_2//m_3//m_4$，$S_{ABCD}=100,S_{ILKJ}=20,$则$S_{EFGH}=$_______.



3.已知 $\angle A=90°$，$AB=6,AC=8,E$、F 在 AB 上且 $AE=2,BF=3$ 过点 E 作 AC 的平行线交 BC 于 D，FD 的延长线交 AC 的延长线于 G，则 $GF=$__________.



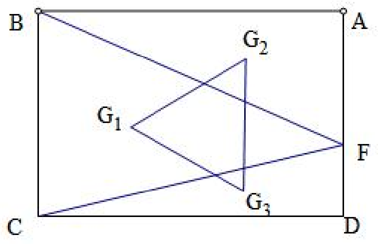
4.已知凸五边形的边长为 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,f(x)$ 为二次三项式；当 $x=a_1$ 或者 $x=a_2+a_3+a_4+a_5$ 时，$f(x)=5$，

当 $x=a_1+a_2$ 时，$f(x)=p,$当 $x=a_3+a_4+a_5$ 时，$f(x)=q$，则 $p-q=$________.

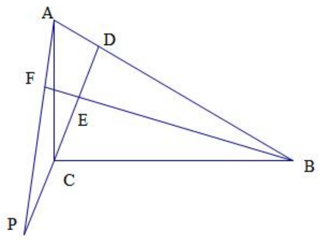
5.已知一个三位数是 35 的倍数且各个数位上数字之和为 15，则这个三位数为__________.

6.已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+(m+1)(m+2)=0$ 对于任意的实数 a 都有实数根，则 m 的取值范围是________________.

7.已知四边形 $ABCD$ 的面积为 2013， E 为 AD 上一点， $\Delta BCE,\Delta ABE,\Delta CDE$ 的重心分别为 G_1,G_2,G_3，那么 $\Delta G_1G_2G_3$ 的面积为________________.

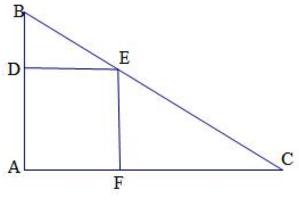


8.直角三角形斜边 AB 上的高 $CD=3$，延长 DC 到 P 使得 $CP=2$，过 B 作 $BF\perp AP$ 交 CD 于 E，交 AP 于 F，则 $DE=$__________ .



二、解答题（第 9 题、第 10 题 15 分，第 11 题、第 12 题 20 分）

9.已知 $\angle BAC=90^\circ$，四边形 $ADEF$ 是正方形且边长为 1，求 $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{CA}$ 的最大值.



10.已知 a 是不为 0 的实数，求解方程组：$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a} \end{cases}$

11.已知：$n>1, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 为整数且 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=2013$，求 n 的最小值.

12.已知正整数 a、b、c、d 满足 $a^2=c(d+13), b^2=c(d-13)$, 求所有满足条件的 d 的值.

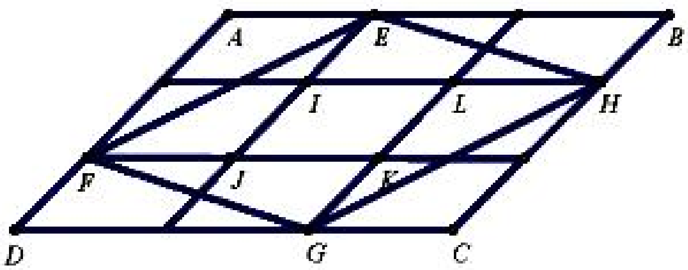
一、填空题：（每题 10 分）

1. 已知 $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{7}},b=\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$，则 $a^3-a+b^3-b=$__________。

分析：$a+b=-\dfrac{4}{3},ab=-\dfrac{1}{3}$； $a^3-a+b^3-b=(a+b)^3-3ab(a+b)-(a+b)=(a+b)^3=-\dfrac{64}{27}$。

2. 已知 $l_1//l_2//l_3//l_4,m_1//m_2//m_3//m_4$， $S_{ABCD}=100,S_{ILKJ}=20$，则 $S_{EFGH}=$__________。

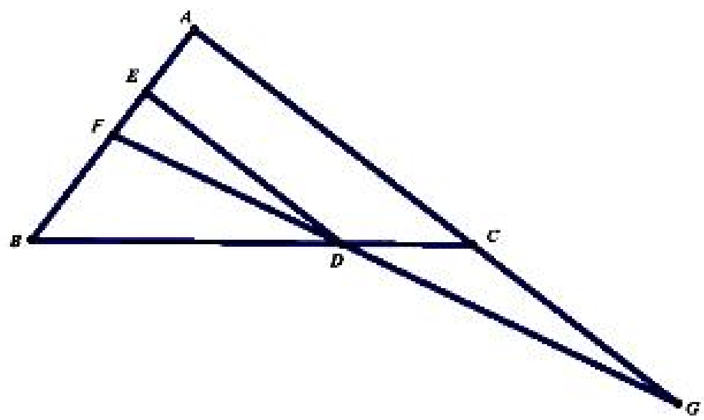
分析： $S_{\Delta AFE}=S_{\Delta IFE},S_{\Delta BEH}=S_{\Delta IEH},S_{\Delta CHG}=S_{\Delta LHG},S_{\Delta DFG}=S_{\Delta KFG}\Rightarrow 2S_{EFGH}=S_{ABCD}+S_{ILKJ}=120\Rightarrow S_{EFGH}=60$



3. 已知 $\angle A=90^\circ,AB=6,AC=8$，$E,F$ 在 AB 上且 $AE=2,BF=3$，过 E 作 AC 的平行线交 BC 于 D，FD 的延长线交 AC 的延长线于 G，则 $GF=$__________。

分析： $DE//AC\Rightarrow\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3};DE//AG\Rightarrow\dfrac{DE}{AG}=\dfrac{FE}{FA}=\dfrac{1}{3}$。所以 $AG=2AC=16$

故 $FG=\sqrt{AF^2+AG^2}=\sqrt{9+256}=\sqrt{265}$



4. **已知凸五边形的边长为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，$f(x)$ 为二次三项式；当 $x=a_1$ 或者 $x=a_2+a_3+a_4+a_5$ 时，$f(x)=5$；当 $x=a_1+a_2$ 时，$f(x)=p$，当 $x=a_3+a_4+a_5$ 时，$f(x)=q$，则 $p-q=$__________。**

分析： $a_1<a_2+a_3+a_4+a_5$ 且 $f(a_1)=f(a_2+a_3+a_4+a_5)$；由此可知 $f(x)$ 关于 $x=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2}$ 对称；

所以 $f(a_1+a_2)=f(a_3+a_4+a_5)\Rightarrow p=q\Rightarrow p-q=0$

5. **已知一个三位数是 35 的倍数且各个数位上的数字之和为 15，则这个三位数是__________。**

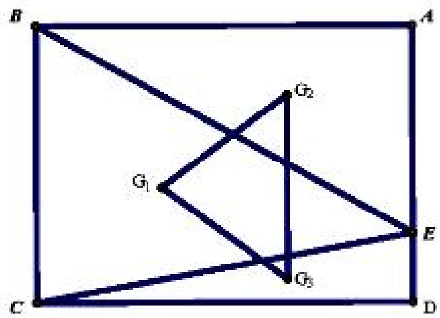
分析： 数字之和为 15 说明这个三位数也是 3 的倍数，所以这个三位数为 105 的倍数，检验得 735 是唯一解。

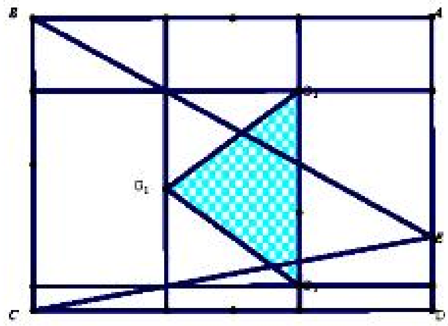
6. **已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+(m+1)(m+2)=0$ 对于任意实数 a 都有实数根，则 m 的取值范围是__________。**

分析： 由题 $\Delta_1=a^2-4(m+1)(m+2)\ge 0\Rightarrow (m+1)(m+2)\le\frac{a^2}{4}$ 对一切的实数 a 都成立，可知 $(m+1)(m+2)$ 小于等于 $\frac{a^2}{4}$ 的最小值，故 $(m+1)(m+2)\le 0\Rightarrow -2\le m\le -1$。

7. **已知四边形 $ABCD$ 的面积为 2013，E 为 AD 上一点，$\Delta BCE,\Delta ABE,\Delta CDE$ 的重心分别为 G_1,G_2,G_3，那么 $\Delta G_1G_2G_3$ 的面积为__________。**

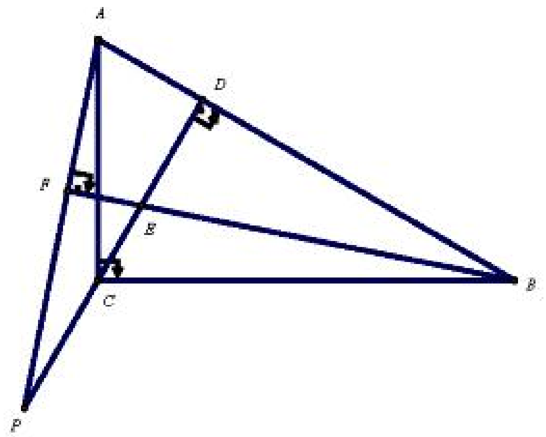
分析： 如图，取 AB,CD 的三等分点，由比例线段可知 $\Delta G_1G_2G_3$ 的底为 $\frac{2}{3}AD$，高为 $\frac{1}{3}AB$；故面积为四边形 $ABCD$ 的面积的 $\frac{1}{9}$；故答案为 $\frac{671}{3}$。（本题取矩形四边中点亦可，稍繁）





8. **直角三角形斜边** AB **上的高** $CD=3$**,延长** DC **到** P **使得** $CP=2$**,过** B **作** $BF\perp AP$ **交** CD **于** E**，交** AP **于** F**，则** $DE=$________**。**

分析： 由 $\angle P=\angle DBE\Rightarrow \Delta ADP\backsim\Delta EDB\Rightarrow\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{AD}{PD}\Rightarrow DE=\dfrac{AD\cdot BD}{PD}=\dfrac{CD^2}{PD}=\dfrac{9}{5}$



二、解答题:（第 9 题、第 10 题 15 分，第 11 题、第 12 题 20 分）

9. **已知** $\angle BAC=90^\circ$**,四边形** $ADEF$ **是正方形且边长为** 1**，求** $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BC}$ **的最大值;**

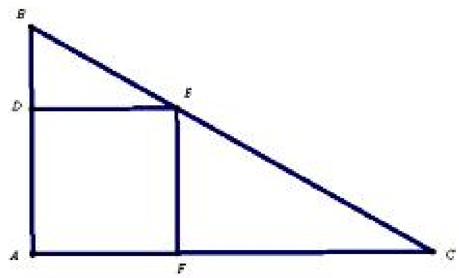
分析： $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{EF}{AB}+\dfrac{DE}{AC}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{CE}{BC}+\dfrac{BE}{AC}+\dfrac{1}{BC}=1+\dfrac{1}{BC}$

故只需要求 BC 的最小值即可：由 $\Delta BDE\backsim\Delta EFC\Rightarrow\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{EF}{FC}\Rightarrow BD\cdot CF=1$

所以 $BC^2=AB^2+AC^2=(1+BD)^2+(1+CF)^2=2+BD^2+CF^2+2(BD+CF)$

$\geq 2+2BD\cdot CF+4\sqrt{BD\cdot CF}=8$;故 $BC\geq 2\sqrt{2}$.

当且仅当 $BD=CF$ 时等号成立此时 $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BC}\leq 1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$



10. 已知a是不为0的实数，求解方程组：

$$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a} \end{cases}$$

分析： $(xy-a)(xy-\frac{1}{a})=1 \Rightarrow x^2y^2-(a+\frac{1}{a})xy+1=1(xy\neq 0) \Rightarrow xy=a+\frac{1}{a}$

代回得到$\frac{x}{y}=\frac{1}{a}$；所以$x^2=\frac{a^2+1}{a^2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$或者$-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$

当$x=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$时，$y=\sqrt{a^2+1}$；当$x=-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$时，$y=-\sqrt{a^2+1}$

经检验，以上两组均为原方程的解

11. 已知$n>1$，$a_1,a_2,\dots a_n$为整数且$a_1+a_2+\dots+a_n=a_1a_2\dots a_n=2013$，求$n$的最小值。

分析： 当$n=5$时，取$a_1=a_2=-1, a_3=a_4=1, a_5=2013$可知满足要求。

下证当$n\le 4$时不行：不妨设$a_1\le a_2\le\dots\le a_n$

（1）$a_1,a_2,\dots a_n$均为正整数，则$a_1,a_2,\dots a_n$均为2013的正约数且都小于2013，那么由于$2013=3\times 11\times 61$

可知若要满足$a_1+a_2+\dots+a_n=2013$且$n\le 4$，故$a_n\ge 671$，故$a_{n-1}\le 3$；无论$n=2,3,4$均不可能

（2）$a_1,a_2,\dots a_n$中有负整数，则由于$a_1a_2\dots a_n=2013$且$n\le 4$，故有且只有两个为负数，即$a_1\le a_2<0$；

若$n=4$，且$a_4=2013$，则不存在a_3满足要求；若$n=4$，且$a_4<2013$，则$a_4\le 671$无法保证$a_1+a_2+a_3+a_4=2013$

若$n=3$，那么$a_1\le a_2<0$，则$a_3\ge 2013$，也不可能；

综上可知：n的最小值为5

12. 已知正整数a,b,c,d满足$a^2=c(d+13), b^2=c(d-13)$，求所有满足条件的d的值。

分析： 设$(a,b)=w$，$a=w\cdot m, b=w\cdot n \Rightarrow (m,n)=1$；由题：$\frac{a^2}{b^2}=\frac{d+13}{d-13} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2}=\frac{d+13}{d-13}$。

再设$d+13=k\cdot m^2, d-13=k\cdot n^2 \Rightarrow 26=k(m^2-n^2)=k(m+n)(m-n)$

由于 $m+n, m-n$同奇偶，故$m+n, m-n$均为奇数且$k=2$

所以得到$(m+n)(m-n)=13 \Rightarrow m=7, n=6$；代入得到$d=98-13=85$；故$d=85$为唯一解。