初中数学提前招生模拟试卷十四

一、填空题

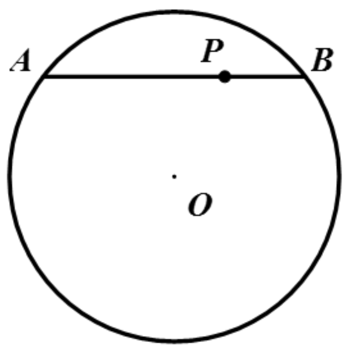
1．计算：$16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\times\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\times\frac{1}{5^{11}}\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{239^3}\right)=$ ____________（精确到 8 位小数）.

2．一个四位数除以 433，商是 a，余数是 r（a,r 都是自然数），则 $a+r$ 的最大值是______.

3．已知点 $A(-0.8,4.132),B(1.2,-1.948),C(2.8,-3.932)$ 在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像上，则当图像上的点 D 的横坐标 $x=1.8$ 时，它的纵坐标 y 的值是__________.

4．使等式 $(n^2-5n+5)^{n+1}=1$ 成立的整数 n 的值是_________.

5．如图，已知 P 为 $\odot O$ 的弦 AB 上的点，$AP=m,BP=n$，且 $m>n$，当 AB 沿 $\odot O$ 运动一周时，点 P 的轨迹是曲线 C．若 $\odot O$ 与曲线 C 之间所围成的图形的面积为 $\pi(m^2-n^2)$，这里 π 是圆周率，则 $\frac{m}{n}$ 的值为____________.



6．设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，

$S=\left[\frac{1}{1}\right]+\left[\frac{2}{1}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\ldots$，直至 2016 项，

其中分母为 k 的一段共有 $2k$ 项 $\left[\frac{1}{k}\right],\left[\frac{2}{k}\right],\ldots,\left[\frac{2k}{k}\right]$，只有最后一段可能不足 $2k$ 项，则 S 的值为

____________.

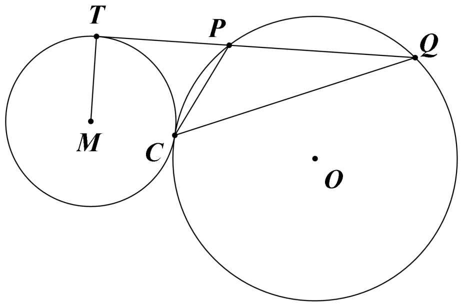
7．若实数 a,b,c 使得二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 当 $0\le x\le 1$ 时，恒有 $|f(x)|\le 1$，则 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值为_______________.

8．已知 a,b,c,d 为四个正的常数，则当实数 x,y 满足 $ax^2+by^2=1$ 时，$cx+dy^2$ 的最小值为

_______________.

二、解答题

9．如图，已知$\odot M$与$\odot O$外切于点C，$\odot M$和$\odot O$的半径依次为r和R．直线TPQ切$\odot M$于点T，与$\odot O$相交于点P,Q，求$\dfrac{CQ-CP}{PQ}$的值．



10．如图1，三个圆两两相交成7各部分，将数字1,2,2,4,4,8,8，分别填入这7个部分，使每个圆内部四个数字之积都相等（这个值记为P）．例如图2的填法满足条件，此时$P=64$．对于满足上述要求的所有填法，求P的最大值和最小值．

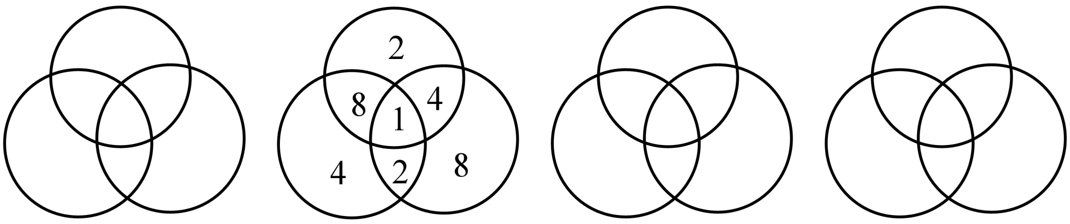


图1 图2 图3 图4

11．已知正整数n使$t=2+2\sqrt{1+12n^2}$也是正整数，求证：t为完全平方数．

12．求使$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2016}\right]$成立的最小正整数$n$，其中$\left[x\right]$表示不超过实数$x$的最大整数．

试题解析

一、填空题(每小题 10 分,共 80 分)

1. 计算:

$$16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\times\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\times\frac{1}{5^{11}}\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{239^3}\right)$$

$=$______(精确到 8 位小数).

2. 一个四位数除以 433,商为 a,余数为 r $(a、r\in\mathbf{N})$. 则 $a+r$ 的最大值为______.

3. 设点 $A(-0.8,4.132)$,$B(1.2,-1.948)$,$C(2.8,-3.932)$ 在二次函数

$$y=ax^2+bx+c$$

的图像上. 当图像上的点 D 的横坐标 $x=1.8$ 时,其纵坐标 y 的值为______.

4. 使等式 $(n^2-5n+5)^{n+1}=1$ 成立的整数 n 的值为______.

5. 如图 1,P 为⊙O 的弦 AB 上的点,$AP=m$,$PB=n$,且 $m>n$. 当 AB 沿⊙O 运动一周时,点 P 的轨迹为曲线 C. 若⊙O 与曲线 C 之间所围成的图形面积为 $(m^2-n^2)\pi$,则 $\frac{m}{n}$ 的值为______.

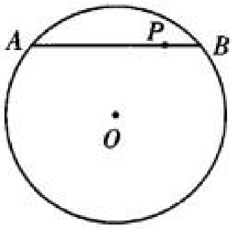


图 1

6. 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数,

$$S=\left[\frac{1}{1}\right]+\left[\frac{2}{1}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\cdots$$

直至 2 016 项,其中,分母为 k 的一段共有 $2k$ 项 $\left[\frac{1}{k}\right],\left[\frac{2}{k}\right],\cdots,\left[\frac{2k}{k}\right]$,只有最后一段可能不足 $2k$ 项. 则 S 的值为______.

7. 若实数 $a、b、c$ 使得二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant 1$. 则 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值为______.

8. 已知 $a、b、c、d$ 为四个正的常数,当实数 $x、y$ 满足 $ax^2+by^2=1$ 时,$cx+dy^2$ 的最小值为______.

二、解答题(共 70 分)

9. (15 分)如图 2,⊙M 与⊙O 外切于点 C,⊙M、⊙O 的半径分别为 r、R. 直线 TPQ 与⊙M 切于点 T,与⊙O 交于点 P、Q. 求 $\frac{CQ-CP}{PQ}$ 的值.

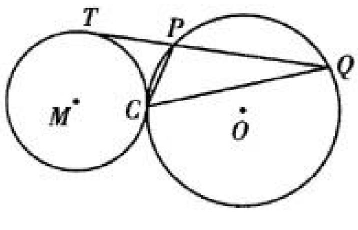


图 2

10. (15 分)如图 3,三个圆两两相交成七个部分,将数字 1、2、2、4、4、8、8 分别填入这七个部分,使得每个圆内部四个数字之积均相等(此值记为 P). 如图 4 的填法满足条件,此时,$P=64$. 对满足上述要求的所有填法,求 P 的最大值与最小值.

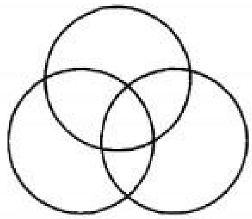


图 3

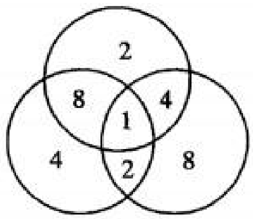


图 4

11. (20 分)已知正整数 n 使得

$$t=2+2\sqrt{1+12n^2}$$

也为正整数. 证明:t 为完全平方数.

12. (20 分)求使得

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2\,016}]$$

成立的最小正整数 n.

参 考 答 案

一、**1.** 3. 14 159 265

2. 454.

设四位数为 $433a+r(0\leqslant r\leqslant 432)$.

由于 $433\times 24=10\,392>9\,999$,则 $a\leqslant 23$.

当 $a=23$ 时,$433\times 23+40=9\,999$.

此时,$a+r=23+40=63$.

当 $a=22$ 时,$433\times 22+432=9\,958$.

此时,$a+r=22+432=454$.

综上,$a+r$ 的最大值为 454.

3. -2.992.

由题设得

$$\begin{cases}0.64a-0.8b+c=4.132,\\1.44a+1.2b+c=-1.948,\\7.84a+2.8b+c=-3.992.\end{cases}$$

解得 $a=0.5,b=-3.24,c=1.22$.

故 $y=0.5\times 3.24-3.24\times 1.8+1.22$
$=-2.992$.

4. 1、4、3、-1.

$(n^2-5n+5)^{n+1}=1$ 成立有三种可能.

(1) $n^2-5n+5=1\Leftrightarrow n=1$ 或 4.

(2) $n^2-5n+5=-1$,且 $n+1$ 为偶数
$\Leftrightarrow n=3$.

(3) $n+1=0$,且 $n^2-5n+5\neq 0$
$\Leftrightarrow n=-1$.

5. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

如图 5,设 AB 的中点为 M,联结 OM、OP、OB,并设$\odot O$ 的半径为 R.

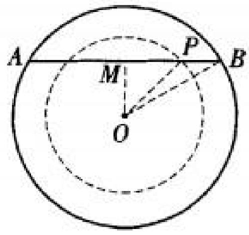


图 5

由 $OM\perp AB,MB=\frac{1}{2}(m+n)$,

$$MP=\frac{1}{2}(m+n)-n=\frac{1}{2}(m-n),$$

得 $$R^2=OB^2=OM^2+\frac{1}{4}(m+n)^2,\qquad ①$$

$$OP^2=OM^2+\frac{1}{4}(m-n)^2.\qquad ②$$

由式①知 OM^2 为定值. 则由式②知 OP 为定值. 故曲线 C 是以 O 为圆心、OP 为半径的圆.

由题设得

$$(R^2-OP^2)\pi=(m^2-n^2)\pi$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}((m+n)^2-(m-n)^2)=m^2-n^2$$

$$\Rightarrow m^2-n^2=mn$$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{(负根已舍弃)}.$$

6. 1 078.

$2+4+\cdots+2\times 44=1\,980$.

对任何满足 $1\leqslant k\leqslant 44$ 的整数 k,和式中包含分母为 k 的 $2k$ 项:$\left[\frac{1}{k}\right],\left[\frac{2}{k}\right],\cdots,\left[\frac{2k}{k}\right]$,

其和为 $k+2$.

又 $2\,016-1\,980=36$，故和式中分母为 45 的有 36 项：$\left[\frac{1}{45}\right],\left[\frac{2}{45}\right],\cdots,\left[\frac{36}{45}\right]$，其和为零.

综上，$S=\sum_{k=1}^{44}(k+2)=1\,078$.

7. 17.

分别取 $x=0,\frac{1}{2},1$.

由题设得

$|c|\leqslant 1,|a+2b+4c|\leqslant 4,$

$|a+b+c|\leqslant 1.$

记 $m=a+2b+4c,n=a+b+c$.

则 $a=-m+2n+2c,b=m-n-3c$

$\Rightarrow |a|\leqslant|m|+2|n|+2|c|\leqslant 8,$

$|b|\leqslant|m|+|n|+3|c|\leqslant 8$

$\Rightarrow |a|+|b|+|c|\leqslant 17.$

容易验证，

$$f(x)=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1=8x^2-8x+1,$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant 1$.

故所求的最大值为 17.

8. $-\frac{c}{\sqrt{a}}$.

令 $k=cx+dy^2$.

由 $ax^2+by^2=1$，得 $y^2=\frac{1-ax^2}{b}$.

则 $k=cx+\frac{d-adx^2}{b}$

$=-\frac{ad}{b}\left(x-\frac{bc}{2ad}\right)^2+\frac{d}{b}+\frac{bc^2}{4ad}$.

由 $ax^2+by^2=1\Rightarrow ax^2\leqslant 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{a}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}$.

注意到，k 为关于 x 的二次函数，其图像开口向下，对称轴为 $x=\frac{bc}{2ad}>0$.

故当 $x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$ 时，$y=0,k_{\min}=-\frac{c}{\sqrt{a}}$.

二、9. 如图 6，延长 PC、QC，与$\odot M$ 分别交于点 D、E.

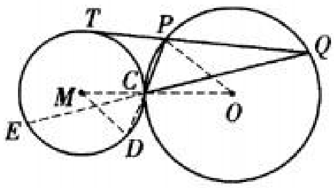


图 6

由 M、C、O 三点共线

$\Rightarrow$ 等腰$\triangle MCD\backsim$等腰$\triangle OCP$

$\Rightarrow\frac{CD}{CP}=\frac{r}{R}\Rightarrow\frac{PD}{CP}=\frac{R+r}{R}$

$\Rightarrow\frac{PD\cdot PC}{PC^2}=\frac{R+r}{R}$.

又 $PD\cdot PC=PT^2$，故

$\frac{PT^2}{PC^2}=\frac{R+r}{R}$

$\Rightarrow\frac{PT}{PC}=\sqrt{\frac{R+r}{R}}$. ①

类似地，$\frac{QT}{QC}=\sqrt{\frac{R+r}{R}}$. ②

由式①、②得

$\frac{QT-PT}{QC-PC}=\sqrt{\frac{R+r}{R}}\Rightarrow\frac{PQ}{QC-PC}=\sqrt{\frac{R+r}{R}}$

$\Rightarrow\frac{QC-PC}{PQ}=\sqrt{\frac{R}{R+r}}$.

10. 设 $a\sim g$ 表示 1、2、2、4、4、8、8 的一个排列，且使图 7 的填法满足条件.

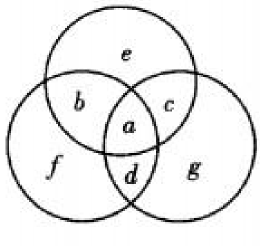


图 7

则 $P=abce$

$=abdf=acdg$.

注意到，

$abcdefg=1\times 2\times 2\times 4\times 4\times 8\times 8=2^{12}$.

故 $P^3=a^3b^2c^2d^2efg=2^{12}a^2bcd$.

又 P^3 为立方数，则 a^2bcd 也应为立方数. 而 a^2bcd 为 2 的正整数次幂，且

$2^4=1^2\times2\times2\times4\leqslant a^2bcd$

$\leqslant8^2\times8\times4\times4=2^{13}$，

于是，$2^6\leqslant a^2bcd\leqslant2^{12}$.

图 4 和图 8 分别为使 $a^2bcd=2^6$ 和 2^{12} 的填法.

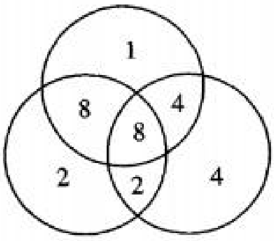


图 8

因此，$P_{\max}=\sqrt[3]{2^{12}\times2^{12}}=256$，

$P_{\min}=\sqrt[3]{2^{12}\times2^6}=64$.

11. 依题意 $t=2+2\sqrt{1+12n^2}$ 为整数.

则 $2\sqrt{1+12n^2}=a$ 为正整数

$\Rightarrow a^2=4(1+12n^2)$ 为偶数

$\Rightarrow a$ 为偶数.

记 $a=2b$（b 为正整数）.

则 $b^2=1+12n^2\Rightarrow b$ 为奇数.

令 $b=2c+1$（c 为正整数）.

故 $b^2=4c^2+4c+1=1+12n^2$

$\Rightarrow c(c+1)=3n^2$.

又 $(c,c+1)=1$，知 c 为完全平方数，$c+1$ 为完全平方数的 3 倍；或 c 为完全平方数的 3 倍，$c+1$ 为完全平方数.

于是，存在正整数 x、y，使得

$3x^2-y^2=1$ 或 $x^2-3y^2=1$.

但由于 $y^2\not\equiv-1\pmod 3$，从而，前者不可能. 因此，$c=3y^2$，$c+1=x^2$.

故 $t=2+2\sqrt{1+4c(c+1)}$

$=2+2(2c+1)=4(c+1)$

$=4x^2$（完全平方数）.

12. 设 $k=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2016}]$.

则 k 为正整数，且

$$\begin{cases}k\leqslant\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<k+1,\\ k\leqslant\sqrt{4n+2016}<k+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k^2\leqslant2n+1+2\sqrt{n^2+n}<(k+1)^2, & ①\\ k^2\leqslant4n+2016<(k+1)^2. & ②\end{cases}$$

又 $n<\sqrt{n^2+n}<n+1$，结合式①得

$$k^2<2n+1+2(n+1)=4n+3. \qquad ③$$

由式②、③知

$k^2<4n+3<4n+2016<(k+1)^2$.

由 k^2 为完全平方数，得 k^2 除以 4 的余数为 0 或 1.

故 $k^2\leqslant4n+1<4n+3$

$<4n+2016<(k+1)^2$

$\Rightarrow(4n+2016)-(4n+1)<(k+1)^2-k^2$

$\Rightarrow2015<2k+1\Rightarrow k\geqslant1008$

$\Rightarrow4n+1\geqslant k^2\geqslant1016064$

$\Rightarrow n\geqslant254016$.

当 $n=254016$ 时，

$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=1008=[\sqrt{4n+2016}]$.

故 n 的最小值为 254 016.

（顾鸿达　李大元　刘鸿坤　命题）