初中数学提前招生模拟试卷十二

【说明】解答本试卷可使用科学计算器.

一、填空题(每小题10分,共80分)

1. 化简:$\frac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a^2-2|ab|+b^2}=$______.

2. 若$\frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a,\frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b,\frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c$,则$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=$______.

3. 已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,$AB//CD,AB=6,CD=16$. $\triangle ACE$ 为直角三角形,$\angle AEC=90°,CE=BC=AD$. 则 AE 的长为______.

4. 方程

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=2\ 014$$

的非负整数解(x,y,z)有______组.

5. 在$\triangle ABC$ 中,已知$\angle ABC=44°$,D 为边 BC 上的一点,满足 $DC=2AB$,$\angle BAD=24°$. 则$\angle ACB$ 的大小为______.

6. 在直角坐标平面 xOy 上,由不等式组

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2,\\|y|\leqslant 2,\\||x|-|y||\leqslant 1\end{cases}$$

确定的区域面积为______.

7. 使得关于 x 的方程

$$a^2x^2+ax+1-13a^2=0$$

有两个整数根的所有正实数 a 为______.

8. 设$2\ 014^2$ 的所有正约数为 $d_1,d_2,\cdots,d_k$. 则

$$\frac{1}{d_1+2\ 014}+\frac{1}{d_2+2\ 014}+\cdots+\frac{1}{d_k+2\ 014}$$

$=$______.

二、解答题（70 分）

9. (15 分)解关于 x 的方程

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

10. (15 分)如图 1,在凸四边形 $ABCD$ 中,已知$\angle ABC+\angle CDA=300^{\circ}$,$AB\cdot CD=BC\cdot AD$.证明:$AB\cdot CD=AC\cdot BD$.

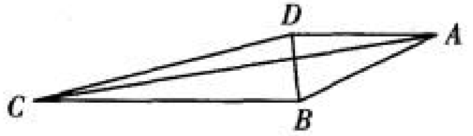

图 1

11. (20 分)已知边长为 a 的正方形$ABCD$的内部有 n 个圆,每个圆的面积均不大于 1,且与正方形 $ABCD$ 的边平行的直线均至多与一个圆相交. 证明:这 n 个圆的面积之和小于 a.

12. (20 分)证明:(1)可以将全体正整数分成三组 A_1、A_2、A_3,使得对每一个整数 $n\geqslant 15$,在 A_1、A_2、A_3 的每一组中均能取出两个不同的数,其和为 n.

(2)将全体正整数任意分成四组 A_1、A_2、A_3、A_4,则存在整数 $n\geqslant 15$,在 A_1、A_2、A_3、A_4 中一定有一组 A_i,在 A_i中不存在两个不同的数,其和为 n.

试题解析

一、1. $\begin{cases} b, & a=0,b\neq 0; \\ a+b, & ab>0; \\ \dfrac{(a-b)^2}{a+b}, & ab<0; \\ a, & a\neq 0,b=0. \end{cases}$

$$原式=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{|a|^2-2|a||b|+|b|^2}$$

$$=\frac{(a-b)^2(a+b)}{(|a|-|b|)^2}$$

$$=\begin{cases} b, & a=0,b\neq 0; \\ a+b, & ab>0; \\ \dfrac{(a-b)^2}{a+b}, & ab<0; \\ a, & a\neq 0,b=0. \end{cases}$$

2. 8.

注意到，

$$b+c-a=\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\right)-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

$$=\frac{2z}{y}.$$

类似地，$c+a-b=\dfrac{2x}{z}$，$a+b-c=\dfrac{2y}{x}$.

故$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$=\frac{2z}{y}\cdot\frac{2x}{z}\cdot\frac{2y}{x}=8.$$

3. $4\sqrt{6}$.

如图 2，过 A 作 $AF\perp CD$ 于点 F. 则 $DF=5, CF=11$.

设 $CE=BC=AD=x$.

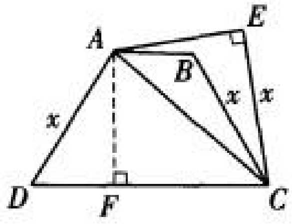

图 2

于是，$AC^2=x^2+AE^2$，

$AC^2=AF^2+11^2=x^2-5^2+11^2$.

故 $x^2+AE^2=x^2-5^2+11^2$

$\Rightarrow AE^2=96 \Rightarrow AE=4\sqrt{6}$.

4. 27.

原方程可变形为

$(x+1)(y+1)(z+1)=2\,015=5\times13\times31$.

若 x、y、z 均为正整数，则有 $1\times2\times3=6$ 组解；

若 x、y、z 中有一个为零，另两个为正整数，则有 $3\times6=18$ 组解；

若 x、y、z 中有两个为零，一个为正整数，则有 3 组解；

故原方程有 $6+18+3=27$ 组非负整数解.

5. 22°.

易知，$\angle ADC=44^\circ+24^\circ=68^\circ$.

如图3，作射线 AK，使 $\angle DAK=68^\circ$，且与 DC 交于点 K.

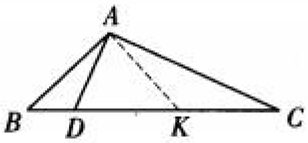

图 3

则 $AK=DK$.

由 $\angle AKD=180^\circ-2\times68^\circ=\angle B$，知 $AK=AB$.

故 $DK=AB$.

因为 $DC=2AB$，所以，

$KC=AB=AK$，$\angle C=\frac{1}{2}\angle AKD=22^\circ$.

6. 12.

显然，区域既关于 x 轴对称，又关于 y 轴对称. 因此，可先假定 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$.

由 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2,\\0\leqslant y\leqslant2,\\-1\leqslant x-y\leqslant1\end{cases}$ 画出区域在第一象限(包括坐标轴)的部分，再对称作出整个区域，如图4.

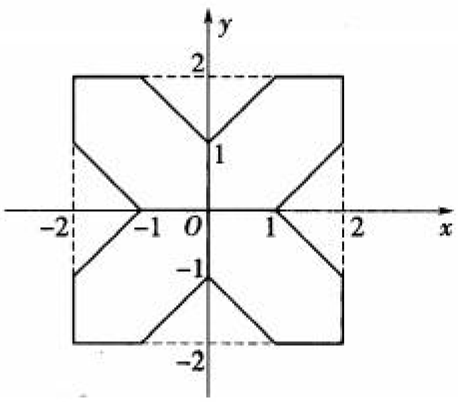

图 4

所求区域的面积是边长为4的正方形面积减去八个腰长为1的等腰直角三角形面积，即 $4^2-8\times\frac{1}{2}=12$.

7. 1、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$.

设两个整数根为 α、β. 则由 $\alpha+\beta=-\frac{1}{a}$ 为整数，知正数 $a=\frac{1}{n}$（n 为正整数）.

于是，原方程可写成

$x^2+nx+n^2-13=0$.

由 $\Delta=n^2-4(n^2-13)=52-3n^2\geqslant0$

$\Rightarrow n^2\leqslant\frac{52}{3}$.

因此，n 可取1、2、3、4.

当 $n=1$ 时，原方程为 $x^2+x-12=0$，有两个整数根；

当 $n=2$ 时，原方程为 $x^2+2x-9=0$，无整数根；

当 $n=3$ 时，原方程为 $x^2+3x-4=0$，有两个整数根；

当 $n=4$ 时，原方程为 $x^2+4x+3=0$，有两个整数根.

从而，a 可取 1、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$.

8. $\frac{27}{4\,028}$.

注意到，$2\,014^2=2^2\times19^2\times53^2$.

于是，$2\,014^2$ 的正约数有 $(2+1)^3=27$ 个，即 $k=27$.

不妨设 $1=d_1<d_2<\cdots<d_{27}=2\,014^2$.

从而，$d_id_{28-i}=2\,014^2(i=1,2,\cdots,27)$.

则 $\frac{1}{d_i+2\,014}+\frac{1}{d_{28-i}+2\,014}$

$=\frac{d_i+d_{28-i}+2\times2\,014}{d_id_{28-i}+2\,014(d_i+d_{28-i})+2\,014^2}$

$=\frac{1}{2\,014}$.

故 $\frac{1}{d_1+2\,014}+\frac{1}{d_2+2\,014}+\cdots+\frac{1}{d_{27}+2\,014}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{d_1+2\,014}+\frac{1}{d_{27}+2\,014}\right)+\right.$

$\left(\frac{1}{d_2+2\,014}+\frac{1}{d_{26}+2\,014}\right)+\cdots+$

$$\left(\frac{1}{d_{27}+2\,014}+\frac{1}{d_1+2\,014}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\times 27\times\frac{1}{2\,014}=\frac{27}{4\,028}.$$

二、9. 由已知得

$$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x-\sqrt{x}\geqslant 0,\ \Rightarrow x\geqslant 1.\\ x+\sqrt{x}\neq 0\end{cases}$$

原方程等价于

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=(a+1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}=a+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{x-1}=a \qquad ①$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\frac{1}{a}. \qquad ②$$

由 x 的取值范围知

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\geqslant\sqrt{1}+\sqrt{1-1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\geqslant 1$$

$$\Rightarrow 0<a\leqslant 1. \qquad ③$$

此时，①+②得

$$2\sqrt{x}=a+\frac{1}{a}\Rightarrow x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2.$$

将 $x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$ 代入式①，并结合式③得

$$左边=\frac{a^2+1}{2a}-\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-1}$$

$$=\frac{a^2+1}{2a}-\frac{1-a^2}{2a}=a=右边.$$

所以，$x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$ 为原方程的解.

综上，当且仅当 $0<a\leqslant 1$ 时，方程有解 $x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$.

10. 如图 5，作正 $\triangle BCE$，联结 DE.

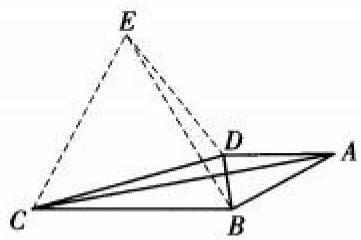

图 5

由 $\angle ABC+\angle CDA=300°$，得

$\angle BAD+\angle BCD=360°-300°=60°$.

于是，$\angle DCE=60°-\angle BCD=\angle BAD$.

又由题设知

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow\frac{AB}{CE}=\frac{AD}{CD}.$$

则 $\triangle ABD\backsim\triangle CED$

$$\Rightarrow\frac{AB}{CE}=\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{ED},\angle ADB=\angle CDE.$$

于是，$\angle BDE=\angle ADC$.

故 $\triangle BDE\backsim\triangle ADC$

$$\Rightarrow\frac{BD}{BE}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow AC\cdot BD=BC\cdot AD$$

$$\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BD.$$

11. 设第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个圆的直径为 d_i. 则该圆的面积 $S_i=\frac{\pi}{4}d_i^2$.

由题设知 $S_i\leqslant 1$.

若 $d_i>1$，则 $S_i\leqslant 1<d_i$;

若 $0<d_i\leqslant 1$，则 $S_i=\frac{\pi}{4}d_i^2\leqslant\frac{\pi}{4}d_i<d_i$.

故 $S_1+S_2+\cdots+S_n<d_1+d_2+\cdots+d_n$. ①

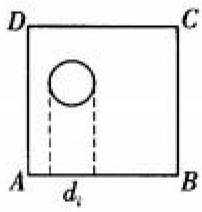

图 6

如图 6，将这 n 个圆垂直投影到边 AB 上，得到长为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的 n 条线段，由于与正方形 $ABCD$ 的边平行的直线至多与一个圆相交，于是，

这 n 条线段除端点外两两不相交. 从而,

$$d_1+d_2+\cdots+d_n\leqslant AB=a. \quad ②$$

结合式①、②得

$$S_1+S_2+\cdots+S_n<a.$$

12. (1)将全体正整数分成如下三组:

$A_1=\{1,2,3,3\times3+3,3\times4+3,\cdots\}$,

$A_2=\{4,5,6,3\times3+2,3\times4+2,\cdots\}$,

$A_3=\{7,8,9,3\times3+1,3\times4+1,\cdots\}$.

下面证明:对每一个整数 $n\geqslant15$,在 A_1、A_2、A_3 的每一组中均能取出两个不同的数,其和为 n.

对于整数 $n\geqslant15$,可写成 $3k+4$、$3k+5$、$3k+6(k\geqslant3)$ 中的一种,即可表示成 A_1 中两个不同数的和;也可写成 $3k+6$、$3k+7$、$3k+8(k\geqslant3)$ 中的一种,即可以表示成 A_2 中两个不同数的和;又可写成 $7+8$、$7+9$ 或 $3k+8$、$3k+9$、$3k+10(k\geqslant3)$ 中的一种,即可表示成 A_3 中两个不同数的和.

(2)**证法1** 用反证法.

若不然,则存在一种将全体正整数分成四个组 A_1、A_2、A_3、A_4 的一种分法,使得对每一个整数 $n\geqslant15$,A_i $(i=1,2,3,4)$中均存在两个不同的数,其和为 n.

将 A_1、A_2、A_3、A_4 中小于或等于 23 的数组成的数组分别记为 B_1、B_2、B_3、B_4,则 B_1、B_2、B_3、B_4 中数的个数和为 23,并且对每个 $i(i=1,2,3,4)$,15,16,…,24 这十个数均为 B_i 中两个不同数的和,故 B_i 中至少有五个数(因为四个数两两不同的和至多六种可能).

从而，**B₁**、**B₂**、**B₃**、**B₄** 中有一个恰有五个数（否则，**B₁**、**B₂**、**B₃**、**B₄** 中数的个数和大于或等于）$4\times6=24>23$).

不妨设 B_1 有五个数,记 $B_1=\{a,b,c,d,e\}$. 则 A_1 中的两个不同数的和表示 15,16,…,24 恰为 B_1 中五个数的两两和. 于是,

$$4(a+b+c+d+e)=15+16+\cdots+24,$$

即 $$4(a+b+c+d+e)=195,$$

矛盾.

证法2 用反证法.

若不然,则存在一种将全体正整数分成四个组 A_1、A_2、A_3、A_4 的一种分法,使得对每一个整数 $n\geqslant15$,$A_i(i=1,2,3,4)$中均存在两个不同的数,其和为 n.

若 15,16,…,20 能表示成 $a+b$(a、b 均为正整数,$a\neq b$)的形式,则 a、b 均不超过 19.

在 1,2,…,19 中,由抽屉原理,知存在某个 A_i(不妨设为 A_1),它至多含有这 19 个数中的四个数,记 A_1 中不超过 19 的四个数为 a、b、c、$d(a<b<c<d)$. 则 a、b、c、d 的两两和为 15、16、17、18、19、20.

故 $a+b=15,a+c=16$,

$b+d=19,c+d=20$,

$\{a+d,b+c\}=\{17,18\}$.

所以,$d-a=4$.

由 $d-a$ 为偶数,知 $a+d$ 为偶数.

因此,$a+d=18$.

从而,$b+c=17$.

于是,$a=7,b=8,c=9,d=11$.

由于 A_1 不含 1,故 21 不能表示成 A_1 中两个不同数的和,矛盾.