# 初中数学提前招生模拟试卷八

一、填空题（第 1~5 小题，每题 8 分，第 6~10 小题，每题 10 分，共 90 分）

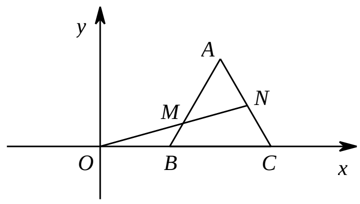
1. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，则 $x^{10}+x^{5}+\dfrac{1}{x^{5}}+\dfrac{1}{x^{10}}=$__________。

2. 满足方程 $(x+3)^2+y^2+(x-y)^2=3$ 的所有实数对 $(x，y)$ 为__________。

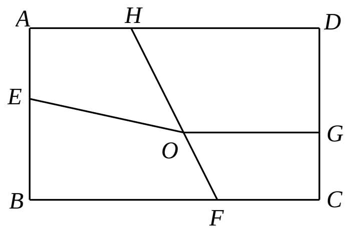
3. 已知直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，$BC=6$，$CA=3$，CD 为 $\angle C$ 的角平分线，则__________。

4. 若前 2011 个正整数的乘积 $1\times2\times\Lambda\times2011$ 能被 $2010^{k}$ 整除，则正整数 $k$ 的最大值为__________。

5. 如图，平面直角坐标系内，正三角形 ABC 的顶点 B，C 的坐标分别为（1，0），（3，0），过坐标原点 O 的一条直线分别与边 AB，AC 交于点 M，N，若 OM=MN，则点 M 的坐标为__________。

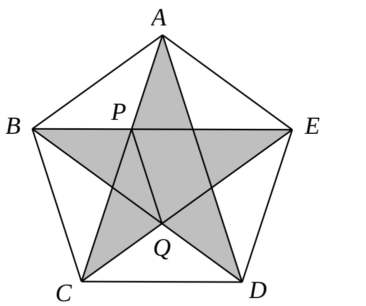



6. 如图，矩形 ABCD 中，AB=5，BC=8，点 E，F，G，H 分别在边 AB，BC，CD，DA 上，使得 AE=2，BF=5，DG=3，AH=3，点 O 在线段 HF 上，使得四边形 AEOH 的面积为 9，则四边形 OFCG 的面积是__________。




7. 整数 $p，q$ 满足 $p+q=2010$，且关于 $x$ 的一元二次方程 $67x^2+px+q=0$ 的两个根均为正整数，则 $p=$__________。

8. 已知实数 $a，b，c$ 满足 $a\ge b\ge c$，$a+b+c=0$ 且 $a\ne0$。设 $x_1，x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，则平面直线坐标系内两点 $A(x_1，x_2)$，$B(x_2，x_1)$ 之间的距离的最大值为________。

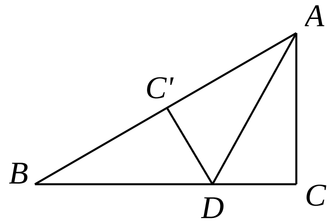



9. 如图，设 ABCDE 是正五边形，五角星 ACEBD（阴影部分）的面积为 1，设 AC 与 BE 的交点为 P，BD 与 CE 的交点为 Q，则四边形 APQD 的面积等于________。

10. 设 $a，b，c$ 是整数，$1\le a<b<c\le9$，且 $\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}+1$ 能被 9 整除，则 $a+b+c$ 的最小值是__________，最大值是__________。

二、 解答题（每题 15 分，共 60 分）

11. 已知面积为 4 的 $\Delta ABC$ 的边长分别为 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$c>b$，AD 是 $\angle A$ 的角平分线，点 $C'$ 是点 C 关于直线 AD 的对称点，若 $\Delta C'BD$ 与 $\Delta ABC$ 相似，求 $\Delta ABC$ 的周长的最小值。




12. 将 1，2，…，9 这 9 个数字分别填入图 1 中的 9 个小方格中，使得 7 个三位数 $\overline{abc}$，$\overline{def}$，$\overline{ghi}$，$\overline{beh}$，$\overline{cfi}$ 和 $\overline{aei}$ 都能被 11 整除，求三位数 $\overline{ceg}$ 的最大值

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

13. 设实数 $x$，$y$，$z$ 满足 $x+y+z=0$，且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\le 2$，求 $x$ 的最大值和最小值

14. 称具有 $a^2+161b^2$ 形式的数为“好数”，其中 $a$，$b$ 都是整数

（1）证明：100，2010 都是“好数”。

（2）证明：存在正整数 $x$，$y$，使得 $x^{161}+y^{161}$ 是“好数”，而 $x+y$ 不是“好数”。

# 试题解析

| 题　号 | 一 (1~10) | 二 | | | | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 11 | 12 | 13 | 14 | |
| 得　分 | | | | | | |
| 评　卷 | | | | | | |
| 复　核 | | | | | | |

**解答本试卷可以使用计算器**

**一、填空题（第 1~5 小题，每题 8 分，第 6~10 小题，每题 10 分，共 90 分）**

1. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，则 $x^{10}+x^{5}+\frac{1}{x^{5}}+\frac{1}{x^{10}}=\underline{15250}$。

解 $\because x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2}=x^{2}+\frac{1}{x^{2}}+2$　　　即 $x^{2}+\frac{1}{x^{2}}=3^{2}-2=7$

$x^{3}+\frac{1}{x^{3}}=\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=7\times3-3=18$

$x^{4}+\frac{1}{x^{4}}=\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)^{2}-2=7^{2}-2=47$

$x^{5}+\frac{1}{x^{5}}=\left(x^{4}+\frac{1}{x^{4}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{3}+\frac{1}{x^{3}}\right)=47\times3-18=123$

$x^{10}+\frac{1}{x^{10}}=\left(x^{5}+\frac{1}{x^{5}}\right)^{2}-2=123^{2}-2=15127$

原式 $=15127+123=15250$

2. 满足方程 $(x+3)^{2}+y^{2}+(x-y)^{2}=3$ 的所有实数对 $(x，y)$ 为 $\underline{(-2,-1)}$。

解 由题知 $2x^{2}+(6-2y)x+2y^{2}+6=0$

$\Delta=(6-2y)^{2}-8(2y^{2}+6)=-12(y+1)^{2}\geq0$

$\therefore y^{2}+2y+1\leq0$　　$\therefore y=-1$，　可得 $x=-2$

3. 已知直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=6$，$CA=3$，CD 为$\angle C$ 的角平分线，则 $\underline{CD=2\sqrt{2}}$。


解 令$CD=x$，由面积正弦定理可知：

$S_{\Delta ABC}=9=\frac{1}{2}\times3\times x\times\sin45^\circ+\frac{1}{2}\times6\times x\times\sin45^\circ$

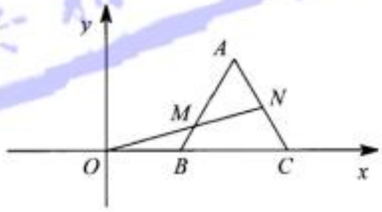
$\therefore x=2\sqrt{2}$。

4. 若前 2011 个正整数的乘积$1\times2\times\cdots\times2011$能被$2010^k$整除，则正整数$k$的最大值为$\underline{30}$。

解 $2010=2\times3\times5\times67$ $\left[\frac{2011}{67}\right]=30$

$\therefore k_{\max}=30$

5. 如图，平面直角坐标系内，正三角形 ABC 的顶点 B，C 的坐标分别为（1，0），（3，0），过坐标原点 O 的一条直线分别与边 AB，AC 交于点 M，N，若 OM=MN，则点 M 的坐标为（$\underline{\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}}$）。




解 $\frac{OB}{BC}\times\frac{CA}{AN}\times\frac{NM}{MN}=1$

$\therefore\frac{1}{2}\times\frac{2}{AN}\times1=1$ $AN=1$

∵C（1，0） A（$2,\sqrt{3}$）

∴N（$\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$） 则 M（$\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}$）

6. 如图 1，矩形 ABCD 中，AB=5，BC=8，点 E，F，G，H 分别在边 AB，BC，CD，DA 上，使得 AE=2，BF=5，DG=3，AH=3，点 O 在线段 HF 上，使得四边形 AEOH 的面积为 9，则四边形 OFCG 的面积是 6.5。

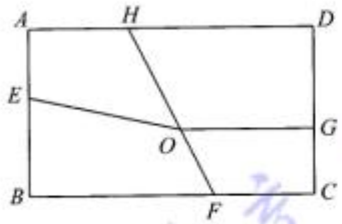



图 1

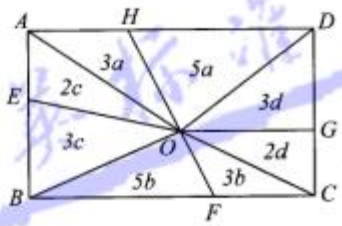



图 2

解 连接 AO，OD，BO，OC。面积比如图 2 所示。

且已知 $\begin{cases} a+b=2.5 \\ c+d=4 \\ 2c+3a=9 \end{cases}$

$\therefore 2d+3b=2.5\times3+4\times2-9=6.5$

7. 整数 $p$，$q$ 满足 $p+q=2010$，且关于 $x$ 的一元二次方程 $67x^2+px+q=0$ 的两个根均为正整数，则 $p=\underline{-2278}$。

解 令 $p=67a$，$q=67b$ 可知 $a+b=30$

由根与系数的关系可知 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{p}{67}=-a \\ x_1x_2=\dfrac{q}{67}=b \end{cases}$

$$x_1x_2-x_1-x_2=a+b=30$$
$$(x_1-1)(x_2-1)=31$$

不妨设 $\begin{cases} x_1-1=1 \\ x_2-1=31 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=32 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=-34 \\ b=64 \end{cases}$

$p=67a=67\times-34=-2278$

8. 已知实数 $a$，$b$，$c$ 满足 $a \ge b \ge c$，$a+b+c=0$ 且 $a \ne 0$。设 $x_1$，$x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，则平面直线坐标系内两点 $A(x_1,\ x_2)$、$B(x_2,\ x_1)$ 之间的距离的最大值为 $\underline{3\sqrt{2}}$

解 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_1)^2}$

$$=\sqrt{2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(a-c)}{a} \quad (a>0)$$

$$=\sqrt{2}\left(1-\frac{c}{a}\right)$$

$\because$ $a \ge b \ge c$

$\therefore$ $a \ge -a-c \ge c$

$$-\frac{c}{2} \le a \le -2c$$

$$-2 \le \frac{c}{a} \le -\frac{1}{2}$$

$$|AB|_{\max}=\sqrt{2}\times(1+2)=3\sqrt{2}$$

9. 如图，设 ABCDE 是正五边形，五角星 ACEBD（阴影部分）的面积为 1，设 AC 与 BE 的交点为 P，BD 与 CE 的交点为 Q，则四边形 APQD 的面积等于 $\underline{\frac{1}{2}}$

解 连结 RQ，四边形 APQR 是平行四边形。

易知 $1=6S_1+2S_2$，$\therefore S_{APQD}=3S_1+S_2=\frac{1}{2}$

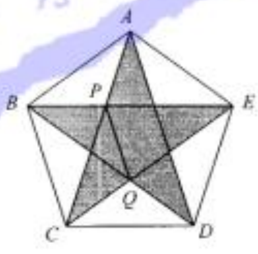



图 1

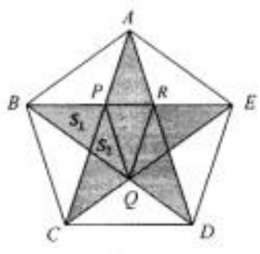



图 2

10. 设 $a$，$b$，$c$ 是整数，$1\le a<b<c\le 9$，且 $\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}+1$ 能被 9 整除，则 $a+b+c$ 的最小值是 $\underline{8}$，最大值是 $\underline{23}$。

解　易知 $a+b+c$ 被 9 除余 2 或 5 或 8。

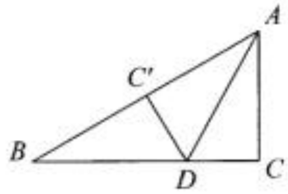
$\therefore (a+b+c)_{\min}=1+2+5=8$

$(a+b+c)_{\max}=9+8+6=23$

## 二、解答题（每题 15 分，共 60 分）

11. 已知面积为 4 的 $\Delta ABC$ 的边长分别为 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$c>b$，AD 是 $\angle A$ 的角平分线，点 $C'$ 是点 C 关于直线 AD 的对称点，若 $\Delta C'BD$ 与 $\Delta ABC$ 相似，求 $\Delta ABC$ 的周长的最小值。

解　$\because \Delta BDC'$ 相似于 $\Delta BCA$。




情况（1）　若 $DC' // AC$，

令 $\angle DAC=\alpha$，则 $\angle BAC=\angle BC'D=2\alpha$。

易知 $AC'=C'D=CD=AC=b$，

显然 $DC'=AC$ 矛盾。（$DC'$ 应小于 $AC$）

情况（2）　$\angle BC'D=\angle C$

又 $\because \angle DC'A=\angle C$

$\therefore \angle BC'D=\angle C=90^\circ$。

在面积为 4 的直角三角形中，显然，等腰直角三角形周长最小。

证法如下：$a+b+c=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$

$$=a+b+\sqrt{(a+b)^2-2ab}=a+b+\sqrt{(a+b)^2-16}$$

又 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$　　即 $a+b\ge 4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 成立。

$\therefore a+b+c\le 4\sqrt{2}+4$

12. 将 1，2，…，9 这 9 个数字分别填入图 1 中的 9 个小方格中，使得 7 个三位数 $\overline{abc}$，$\overline{def}$，$\overline{ghi}$，$\overline{beh}$，$\overline{cfi}$ 和 $\overline{aei}$ 都能被 11 整除，求三位数 $\overline{ceg}$ 的最大值。

解　这是一道技巧题

显然 $11|(a+c-b+d+f-e+g+i-h)$

$\therefore 11|[a+b+c+d+e+f+g+h+i-2(b+e+h)]$

$\therefore 11|[45-2(b+e+h)]$

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

图 1

$\therefore (b+e+h) \equiv 6 \pmod{11}$

又$\because b+h=e \pmod{11}$

$\therefore e \equiv 3 \pmod{11}$

即 $e=3$

$\therefore b+h$，$d+f$，$a+i$ 只能取 14 或 3。

因为$14=5+9=8+6$

$\therefore a$，$e$，$i$，$b$，$h$，$d$，$f$，必须使用数字1,2,9,5,8,6,3。

$c$，$g$ 只能取 7，4。

$\therefore \overline{ceg}$ 最大值为 734。

不考虑旋转，图 2 是唯一合理填法。

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 7 |
| 6 | 3 | 8 |
| 4 | 5 | 1 |

图 2

13. 设实数 $x$，$y$，$z$ 满足 $x+y+z=0$，且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \le 2$，求 $x$ 的最大值和最小值

解 这是一道基础函数思想问题

把 $z=-x-y$ 代入

$$(x-y)^2+(2y+x)^2+(-2x-y)^2 \le 2$$

$$\therefore 3y^2+3xy+3x^2-1 \le 0$$

开口向上抛物线，若有解

$$\Delta = 9x^2-12(3x^2-1) \ge 0$$

$$\therefore \quad -\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$$

$x_{\max}=\frac{2}{3}$， 当 $y=z=-\frac{1}{3}$ 满足。

$x_{\min}=-\frac{2}{3}$， 当 $y=z=\frac{1}{3}$ 满足。

14. 称具有 $a^2+161b^2$ 形式的数为"好数"，其中 $a$，$b$ 都是整数

（1）证明：100，200 都是"好数"。

（2）证明：存在正整数 $x$，$y$，使得 $x^{161}+y^{161}$ 是"好数"，而 $x+y$ 不是"好数"。

解 （1）显然 $100=10^2+161\times0^2$

$$2010=43^2+161\times1^2$$

$\therefore$100、2010 是好数。

（2）$161=7\times23$

$a^2+161b^2$ 除以 7 的余数可以是 0，1，2，4

所以我们构造 $x$、$y$ 时，最好让 $x+y$ 除以 7 余 3。

又 $\left[p\left(p^{161}+1\right)\right]^{161}+\left(p^{161}+1\right)^{161}$

$=\left(p^{161}+1\right)^{161}\left(p^{161}+1\right)=\left(p^{161}+1\right)^{162}$ 是平方数。

可以令 $x=3\times\left(3^{161}+1\right)$ $y=3^{161}+1$

则易知 $x^{161}+y^{161}=\left(3^{161}+1\right)^{162}=\left[\left(3^{161}+1\right)^{81}\right]^2+161\times0^2$ 是好数。

又 $3^{161}\equiv5\pmod{7}$

$$\begin{aligned}x+y=3\times\left(3^{161}+1\right)+3^{161}+1&\equiv3\times(5+1)+6\\&\equiv3\pmod{7}\end{aligned}$$

$\therefore x+y$ 不是好数，得证。