初中数学提前招生模拟试卷六

一、填空题（第1-5小题每题8分，第6-10小题每题10分，共90分）

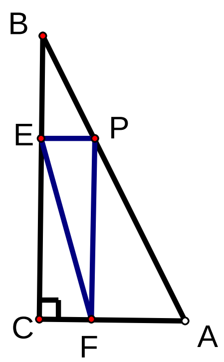
1、对于任意实数a,b，定义,$a*b=a(a+b)+b$，已知$a*2.5=28.5$，则实数a的值是_____。

2、在三角形ABC中，$AB=b^2-1, BC=a^2, CA=2a$，其中a,b是大于1的整数，则$b-a$=__。

3、一个平行四边形可以被分成92个边长为1的正三角形，它的周长可能是______。

4、已知关于x的方程$x^4+2x^3+(3+k)x^2+(2+k)x+2k=0$有实根，并且所有实根的乘积为$-2$，则所有实根的平方和为_______。

5、如图，直角三角形ABC中, $AC=1$，$BC=2$，P为斜边AB上一动点。$PE\perp BC$，$PF\perp CA$，则线段EF长的最小值为_______。



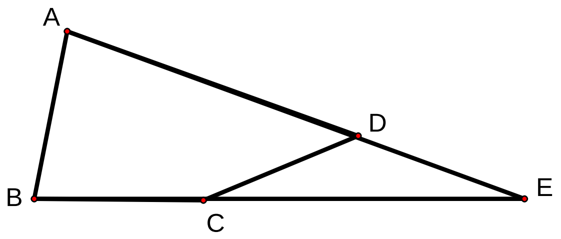
第五题图

6、设a，b是方程$x^2+68x+1=0$的两个根，c，d是方程$x^2-86x+1=0$的两个根，则$(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)$的值_________。

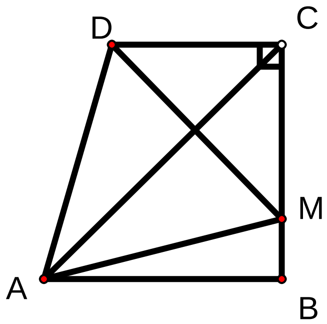
7在平面直角坐标系中有两点$P(-1,1)$, $Q(2,2)$，函数$y=kx-1$的图像与线段PQ延长线相交（交点不包括Q），则实数k的取值范围是 ____。

8方程$xyz=2009$的所有整数解有 ________组。

9如图，四边形$ABCD$中$AB=BC=CD$，$\angle ABC=78°$，$\angle BCD=162°$。设AD,BC延长线交于E ，则$\angle AEB=$_______。



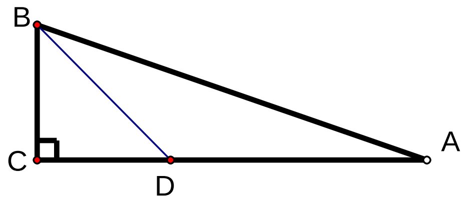
第九题图



第十题图

10、如图，在直角梯形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB=BC=10$，点$M$在$BC$上，使得$\Delta ADM$是正三角形，则$\Delta ABM$与$\Delta DCM$的面积和是 __________。

二、（本题15分）如图，ΔABC 中$\angle ACB=90°$，点D在CA上，使得$CD=1$，$AD=3$，并且$\angle BDC=3\angle BAC$，求BC的长。



第二大题图

三、（本题15分）求所有满足下列条件的四位数$\overline{abcd}$，$\overline{abcd}=(\overline{ab}+\overline{cd})^2$其中数字c可以是0。

四、（本题15分）正整数n满足以下条件：任意n个大于1且不超过2009的两两互素的正整数中，至少有一个素数，求最小的n。

五、（本题15分）若两个实数a,b,使得,a^2+b与$a+b^2$都是有理数，称数对(a,b)是和谐的。

①试找出一对无理数，使得(a，b)是和谐的；

②证明：若(a，b)是和谐的，且$a+b$是不等于1的有理数，则a,b都是有理数；

③证明：若(a，b)是和谐的，且$\frac{a}{b}$是有理数，则a,b都是有理数；

试题解析

一．**1.** 4，$-\frac{13}{2}$　　2. 0　　3. 50,94　　4.5　　5. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　6. 2772　　7. $\frac{1}{3}<k<\frac{3}{2}$

8. 72　　9. 21°　　10. $300-150\sqrt{3}$

二．解：设BC=x，则 $BD=\sqrt{x^2+1}$， $AB=\sqrt{x^2+16}$，如图，作∠ABD平分线BE，则 $VBDE : VADB$，因此 $BD^2=DE\bullet DA=3DE$。

由角平分线定理可知 $\frac{DE}{AE}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{DE}{AE+DE}=\frac{BD}{AB+BD}\Rightarrow DE=\frac{3BD}{AB+BD}$。

因此 $x^2+1=\frac{9\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2+1}}$， 解得 $BC=x=\frac{4\sqrt{11}}{11}$

三．解：设 $x=\overline{ab},y=\overline{cd}$,， 则$100x+y=(x+y)^2$， 故 $x^2+(2y-100)x+(y^2-y)=0$ 有整数解，由于10< x < 100，故y≠0。因此$\Delta_x=(2y-100)^2-4(y^2-y)=4(2500-99y)$是完全平方数，

可设$t^2=2500-99y$， 故$99y=(50-t)(50+t)$， 0≤ 50- t<50+ t 之和为100，而且其中有11的倍数，只能有50−t= 1或50−t=45，相应得到y=1,25，代入解得

$\begin{cases}x=98\\y=1\end{cases},\begin{cases}x=20\\y=25\end{cases},\begin{cases}x=30\\y=25\end{cases}$o因此$\overline{abcd}=9801,2025,3025$。

四．解：由于 $2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2,29^2,31^2,37^2,41^2,43^2$ 这14个合数都小于2009且两两互质，因此n≥15。

而n=15时，我们取15个不超过2009的互质合数$a_1,a_2,K\ ,a_{15}$的最小素因子 $p_1,p_2,K\ ,p_{15}$， 则必有一个素数≥47，不失一般性设 $p_{15}\geq 47$， 由于 p_{15}是合数a_{15}的最小素因子，因此$a_{15}\geq {p_{15}}^2\geq 47>2009$，矛盾。因此，任意15个大于1且不超过的互质正整数中至少有一个素数。综上所述，n最小是15。

五．解：①不难验证$(a,b)=(\sqrt{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2})$是和谐的。

②由已知$t=(a^2+b)-(a+b^2)=(a-b)(a+b-1)$是有理数，$a+b=s$是有理数，因此

$a-b=\frac{t}{a+b-1}$，解得$a=\frac{1}{2}\left(s+\frac{t}{s-1}\right)$是有理数，当然$b=s-a$也是有理数。

③若$a+b^2=0$，则$b=-\frac{a}{b}$是有理数，因此$a=(a+b^2)-b^2$也是有理数。若$a+b^2\neq 0$，

由已知$x=\frac{a^2+b}{a+b^2}=\frac{\left(a/b\right)^2+\left(1/b\right)}{\left(a/b\right)\left(1/b\right)+1}$是有理数，$y=\frac{a}{b}$也是有理数，因此$\frac{1}{b}=\frac{y^2-x}{xy-1}$，故

$b=\frac{xy-1}{y^2-x}$是有理数，因此$a=(a+b^2)-b^2$也是有理数。