初中数学提前招生模拟试卷四

一、填空题：（本大题 10 小题，前 5 题每题 8 分，后 5 题每题 10 分，共 90 分）

1．在小于 100 的正整数 n 中，能使分数 $\dfrac{1}{(3n+32)(4n+1)}$ 化为十进制有限小数的 n 的所有可能值是________。

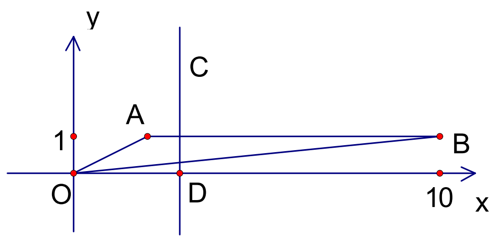
2．将数码 1，2，3，4，5，6，7，8，9 按某种次序写成一个九位数：$\overline{abcdefghi}$, 令 $A=\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{cde}+\overline{def}+\overline{efg}+\overline{fgh}+\overline{ghi}$，则 A 的最大可能值是

_____________。

3．如果一个两位数 $\overline{X5}$ 与三位数 $\overline{3YZ}$ 的积是 29400，那么 X+Y+Z=_________。

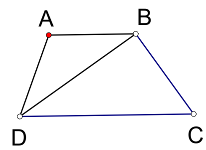
#．已知 a，b，x，y 都为实数，且 $y+\left|\sqrt{x}-2\right|=1-a^2, |x-4|=3y-3-b^2$，则 $a+b+x+y$ 的值为______________。

5．如图：△OAB 的顶点 O（0，0），A（2，1），B（10，1），直线 CD⊥X 轴，并且把△OAB 面积二等分，若点 D 的坐标为（x，0），则 x 的值是_______。

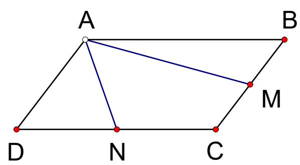


6．如果两个一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 与 $mx^2+x+1=0$ 分别有两个不相同的实根，但其中有一个公共的实根 α，那么实根 α 的大小范围是_______。

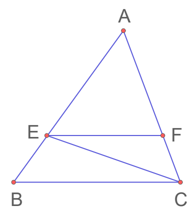
7．如图：在梯形 ABCD 中，AB∥DC，DC=2AB=2AD，若 BD=6，BC=4，则 S_{ABCD}=____________。（S_{ABCD} 表示四边形 ABCD 的面积，下同）



8．如图，▱$ABCD$ 中，点 M、N 分别是边 BC、DC 的中点，AN=1，AM=2，且∠MAN=60°，则 AB 的长是_____。



9 如图：△ABC 中，点 E、F 分别在这 AB、AC 上，EF∥BC，若 $S_{\triangle ABC}=1$，$S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle EBC}$，则 $S_{\triangle CEF}$=____。



10．设 P 为质数，且使关于 x 的方程 $x^2-px-580p=0$ 有两个整数根，则 p 的值为__________。

二、（本题 20 分）

已知矩形 ABCD 的相邻两边长为 a、b，是否存在另一个矩形 A'B'C'D'，使它的周长和面积分别是矩形 ABCD 的周长和面积的 $\frac{1}{3}$？证明你的结认论。

三、（本题 20 分）

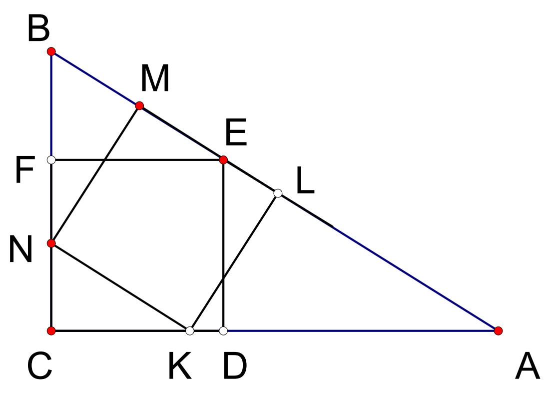
已知 a、b、c 都是大于 3 的质数，且 $2a+5b=c$。

（1）求证：存在正整数 n>1，使所有满足题设的三个质数 a、b、c 的和 a+b+c 都能被 n 整除；

（2）求上一小题中 n 的最大值。

四、（本题 20 分）

如图：在 Rt△ABC 中，CA>CB，∠C=90°，CDEF、KLMN 是△ABC 的两个内接正方形，已知 $S_{CDEF}=441$，$S_{KLMN}=440$，求△ABC 的三边长。



参考解答

一、填空题

1、6，31；　2、4648；　3、18；　4、5；　5、$10-2\sqrt{10}$；

6、$\alpha=1$　7、18；　8、$\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$　9、$3\sqrt{3}-5$　10、29

二、设矩形 A’B’C’D’的相邻两边长为 m、n，则按题意有 m+n=$\frac{1}{3}(a+b), mn=\frac{1}{3}ab$，因此 m、n 是二次方程 $x^2-\frac{1}{3}(a+b)x+\frac{1}{3}ab=0$ 的两正根。

$\because \frac{1}{3}(a+b)>0, \frac{1}{3}ab>0$　　$\therefore$上述二次方程有两正根的条件是

$\Delta=\frac{1}{9}(a+b)^2-\frac{4}{3}ab=\frac{1}{9}(a^2-100b+b^2)=\frac{1}{9}[a-(5+2\sqrt{b})b]\bullet[a-(5-2\sqrt{b})b]\geq 0$

即 $a=(5\pm 2\sqrt{b})b$或$\begin{cases}a-(5+2\sqrt{b})b>0\\ a-(5-2\sqrt{b})b>0\end{cases}$或$\begin{cases}a-(5+2\sqrt{b})b<0\\ a-(5-2\sqrt{b})b<0\end{cases}$

$\therefore$ 当 $a\geq(5+2\sqrt{b})b$或$0<a\leq(5-2\sqrt{b})b$ 时，满足条件的矩形 A’B’C’D’存在；当 $(5-2\sqrt{b})b<a<(5+2\sqrt{b})b$时，满足条件的矩形 A’B’C’D’不存在。

三、（1）∵c=2a+5b，　∴a+b+c=3a+6b=3(a+2b)

又 a、b、c 都是大于 3 的质数，故引(a+b+c)，

即存在正整数 n>1(例如 n=3)，使$n|(a+b+c)$

（2）∵a、b、c 都是大于 3 的质数　　∴a、b、c 都不是 3 的倍数

若 $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,3), b\equiv 2(\mathrm{mod})3$，例

$c=2a+5b\equiv 2+10\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$，这与 C 不是 3 的倍数矛盾

同理，$a\equiv 2(\mathrm{mod}\,3), b\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$，也将导致矛盾

因此，只能$a\equiv b\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$或$a\equiv b\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$，

于是$a+2b\equiv 3a\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$,从而$9|(a+b+c)$

当$a=7,b=13$时,$c=2\times 7+5\times 13=79$为质数，a+b+c=99=9×11；

当$a=7,b=19$时,$c=2\times 7+5\times 19=109$为质数，a+b+c=135=9×15；

∴在所有$n|(a+b+c)$的n中，最大为 9

四、论正方形 CDEF 的边长为 x，正方形 KLMN 的边长为 y，

则按题设 x=21，y=$2\sqrt{110}$，设 BC=a，CA=b，AB=c，则 $a^2+b^2=c^2$

注意到$ax+by=2(S_{\Delta CEB}+S_{\Delta CEA})=2S_{\Delta ABC}=ab$

$$\therefore x=\frac{ab}{a+b}\cdots\cdots①$$

又由△AKL∽△ABC 得 AL=$y\bullet\frac{b}{a}$ 同理，MB=$y\bullet\frac{a}{b}$

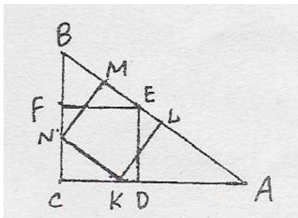
故$c=AL+LM+MB=x(\frac{b}{a}+1+\frac{a}{b})=y\bullet\frac{c^2+ab}{ab}$

$$y=\frac{abc}{c^2+ab}\cdots\cdots②$$

于是$\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}=(\frac{1}{c}+\frac{c}{ab})^2-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2=(\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{c^2}{a^2b^2})-(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2})=\frac{1}{c^2}$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{440}-\frac{1}{441}}}=21\sqrt{440}=42\sqrt{110}$$

将它代入②式，可得$ab=\frac{yc^2}{c-y}=21^2\bullet22$ 进而



$$a+b=\frac{ab}{x}=21\bullet22$$

于是 a、b 是二次方程$t^2-21\bullet22+21^2-22=0$的两根

∵b>a

∴ $a=231-63\sqrt{11}$，$b=231+63\sqrt{11}$