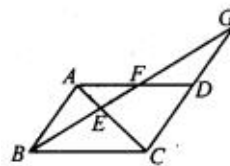


初中数学提前招生模拟试卷一

一、填空题(每小题 7 分，共 70 分.)

1. 如图，已知  $\square ABCD$  中，过点 B 的直线顺次与 AC、AD 及 CD 的延长线相交于点 E、F、G. 若  $BE=5$ ， $EF=2$ ，则 FG 的长是\_\_\_\_\_.



2. 有四个底面都是正方形的长方体容器 A、B、C、D，已知 A、B 的底面边长均为 3，C、D 的底面边长均为 a，A、C 的高均为 3，B、D 的高均为 a，在只知道  $a \neq 3$ ，且不考虑容器壁厚度的条件下，可判定\_\_\_\_\_两容器的容积之和大于另外两个容器的容积之和

3. 若 n 的十进制表示为  $99 \dots 9$  (20 个 9)，则  $n^3$  的十进制表示中含有数码 9 的个数是\_\_\_\_\_.

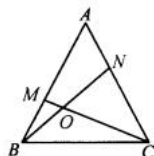
4. 在  $\triangle ABC$  中，若  $AB=5$ ， $BC=6$ ， $CA=7$ ，H 为垂心，则 AH 的长为\_\_\_\_\_.

5. 若直角三角形两直角边上中线的长度之比为 m，则 m 的取值范围是\_\_\_\_\_.

6. 若关于 x 的方程  $|1-x|=mx$  有解，则实数 m 的取值范围是\_\_\_\_\_.

7. 从 1 000 到 9 999 中，四个数码各不相同，且千位数与个位数之差的绝对值为 2 的四位数有\_\_\_\_\_ 个.

8. 方程  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$  的整数解  $(x, y) =$  \_\_\_\_\_



9. 如图，正  $\triangle ABC$  中，点 M、N 分别在 AB、AC 上，且  $AN=BM$ ，BN 与 CM 相交于点 O. 若  $S_{\triangle ABC}=7$ ， $S_{\triangle OBC}=2$  则

$$\frac{BM}{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$$

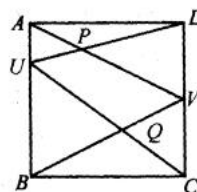
10. 设 x、y 都是正整数，且使  $\sqrt{x-116} + \sqrt{x+100} = y$ . 则 y 的最大值为\_\_\_\_\_

二、(16 分) 求所有满足下列条件的四位数：能被 111 整除，且除得的商等于该四位数的各位数之和.

三、(16 分) (1) 在  $4 \times 4$  的方格纸中，把部分小方格涂成红色，然后画去其中 2 行与 2 列. 若无论怎样画，都至少有一个红色的小方格没有被画去，则至少要涂多少个小方格? 证明你的结论.

(2) 如果把上题中的“ $4 \times 4$  方格纸”改成“ $n \times n$  的方格纸 ( $n \geq 5$ )”，其他条件不变，那么，至少要涂多少个小方格? 证明你的结论

四、(18 分) 如图，ABCD 是一个边长为 1 的正方形，U、V 分别是 AB、CD 上的点，AV 与 DU 相交于点 P，BV 与 CU 相交于点 Q. 求四边形 PUQV 面积的最大值.



## 试题解析

## 一、填空题

1. 【答案】10.5
2. 【答案】A、D
3. 【答案】39
4. 【答案】 $\frac{19\sqrt{6}}{12}$
5. 【答案】 $\frac{1}{2} < m < 2$
6. 【答案】 $m < -1$  或  $m \geq 0$
7. 【答案】840
8. 【答案】(3, 2)
9. 【答案】 $\frac{1}{3}$  或  $\frac{2}{3}$
10. 【答案】108

## 二、

【答案】2997

【解析】解法一：设这个四位数为  $abcd$ ，考虑  $a+b+c+d$  的个位数字，乘以 111 后，为原数，个位数字为  $d$ ，所以  $a+b+c$  乘以 111 后尾数为 0，所以  $a+b+c=10$  或 20。

若  $a+b+c=10$ ，则原数为  $1110+111d$ 。

当  $d < 9$  时，原数各位分别为：1,  $1+d$ ,  $1+d$ ,  $d$ ，前三位之和为  $3+2d=10$ ，无整数解。

当  $d=9$  时，原数为  $1110+999=2109$ ，前三位之和为 3 不等于 10。

若  $a+b+c=20$ ，则原数为  $2220+111d$ 。

当  $d < 8$  时，原数各位分别为：2,  $2+d$ ,  $2+d$ ,  $d$ ，前三位之和为  $6+2d=20$ ,  $d=7$ ，求得原数为  $2220+777$

$=2997$ ，满足要求。

当  $d=8$  时，原数为  $2220+888=3108$ ，前三位之和为 4 不等于 20。

当  $d=9$  时，原数为  $2220+999=3219$ ，前三位之和为 6 不等于 20。

综上，该四位数为 2997。

解法二：设这个四位数是  $1000a+100b+10c+d$ 。

由已知有  $1000a+100b+10c+d=111(a+b+c+d)$  有  $889a-11b-101c-110d=0$ 。

如果  $a=1$ ，容易有  $110(8-d)+9-11b-101c=0$ 。显然， $d < 8$ 。下面按照  $d$  分类：

(1)  $d=0$ , 那么  $889a-11b-101c=0$ . 此时,  $c$  只能是 8, 但  $81-11b=0$  没有整数  $b$  使之成立,

即无解;

(2)  $d=1$ ,  $779a-11b-101c=0$ , 得  $c=7$ , 但  $72-11b=0$  无解;

(3)  $d=2$ ,  $669-11b-101c=0$ ,  $c=6$ ,  $63-11b=0$ , 无解;

(4)  $d=3$ ,  $559-11b-101c=0$ ,  $c=5$ ,  $54-11b=0$ , 无解;

(5)  $d=4$ ,  $449-11b-101c=0$ ,  $c=4$ ,  $45-11b=0$ , 无解;

(6)  $d=5$ ,  $339-11b-101c=0$ ,  $c=3$ ,  $36-11b=0$ , 无解;

(7)  $d=6$ ,  $229-11b-101c=0$ ,  $c=2$ ,  $27-11b=0$ , 无解;

(8)  $d=7$ ,  $119-11b-101c=0$ ,  $c=1$ ,  $18-11b=0$ , 无解.

当  $a=2$  时,  $110(16-d)-11b-101c+18=0$ , 还是按  $d$  分类:

(1)  $d=9$ ,  $788-11b-101c=0$ ,  $c=7$ ,  $81-11b=0$ , 无解;

(2)  $d=8$ ,  $898-11b-101c=0$ ,  $c=8$ ,  $90-11b=0$ , 无解;

(3)  $d=7$ ,  $1008-11b-101c=0$ ,  $c=9$ ,  $99-11b=0$ ,  $b=9$ .

讨论到这里就得到了  $a=2$ ,  $b=9$ ,  $c=9$ ,  $d=7$  这个四位数是 2997.

三、

**【解答】** (1) 至少要涂 7 个小方格. 假设只涂了 6 格或更少, 则 4 行中至少有 1 行未涂或只涂了 1 格.

若某行未涂, 其他 3 行中至少有 1 行涂了不多于 2 格, 划去这 2 格所在的 2 列, 划去其他 2 行, 剩下的 4 格都未涂色.

若某行只涂了 1 格, 其他 3 行涂了 5 格或更少, 则其中至少有 1 行涂了不多于 1 格, 划去这 2 格所在的 2 列, 划去其他 2 行, 剩下的 4 格都未涂色.

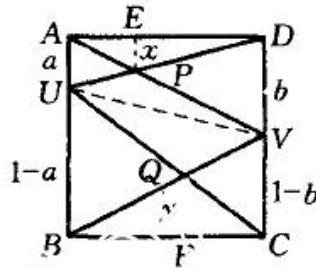
所以只涂了 6 格或更少, 不能满足要求. 另一方面, 如果第 1 行涂 1, 2 格, 第 2 行涂 2, 3 格, 第 3 行涂 1, 3 格, 第 4 行涂第 4 格, 能满足要求, 所以至少要涂 7 个小方格.

(2) 至少要涂 5 个小方格. 显然涂 4 格或更少是不满足要求的. 如果选 5 个不同行不同列的小方格 (如 对角线上的 5 个小方格) 涂成红色, 能满足要求, 因为这时任何 2 行 2 列, 至多只能包含其中 4 个小方格.

四、

**【答案】**  $\frac{1}{4}$

**【解析】** 如图,



连  $UV$ ，因为  $AU \parallel DV$ ，所以  $S_{\triangle UPV} = S_{\triangle UDV} - S_{\triangle PDV} = S_{\triangle ADV} - S_{\triangle PDV} = S_{\triangle ADP}$ 。同理， $S_{\triangle UQV} = S_{\triangle BQV}$ 。

故  $S_{\text{四边形}PUQV} = S_{\triangle ADP} + S_{\triangle BQV}$ 。作  $PE \perp AD$ ， $QF \perp BC$ ， $E$ 、 $F$  为垂足，并设  $PE = x$ ， $QF = y$ ，则

$S_{\text{四边形}PUQV} = \frac{1}{2}(x+y)$ 。设  $AU = a$ ， $DV = b$ ，则  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = DE + AE = 1$ 。故  $x = \frac{ab}{a+b}$ 。同理，

$y = \frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)+(1-b)} = \frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b}$ ，则

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}PUQV} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{ab}{a+b} + \frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b} \right] \\ &= \frac{(a+b) - (a^2 + b^2)}{2(a+b)(2-a-b)} \\ &= \frac{2(a+b) - a^2 - b^2 - (a^2 + b^2)}{4(a+b)(2-a-b)} \\ &\leq \frac{2(a+b) - a^2 - b^2 - 2ab}{4(a+b)(2-a-b)} \\ &= \frac{(a+b)(2-a-b)}{4(a+b)(2-a-b)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

等号当且仅当  $a = b$  时成立。故四边形  $PUQV$  面积的最大值是  $\frac{1}{4}$ 。