分式提优

题型一 分式值为零的条件

【典例分析】（24-25 八年级下·重庆·月考）已知分式$\frac{x^2-4}{3x+6}$的值为 0，那么x的值为（　　）

A．$x=-2$且$x=2$　　B．$x=-2$或$x=2$　　C．$x=-2$　　D．$x=2$

【答案】D

【分析】本题考查了分式的值为 0 的条件，根据分式的值为 0，分子的值为 0 且分母的值不等于 0 解答即可求解，掌握分式的值为 0的条件是解题的关键.

【详解】解：∵分式$\frac{x^2-4}{3x+6}$的值为 0，

∴$x^2-4=0$且$3x+6\neq 0$，

∴$x=2$，

故选：D.

【变式训练】（24-25 八年级下·湖南长沙·期末）若分式$\frac{x-2025}{x+2024}$的值为 0，则x的取值为_____.

【答案】2025

【分析】本题考查的是分式的值为零的条件，根据分式值为零的条件即可得到答案， 掌握分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零是解题的关键.

【详解】解：∵分式$\frac{x-2025}{x+2024}$的值为 0，

∴$\begin{cases}x-2025=0\\x-2024\neq 0\end{cases}$，

解得：$x=2025$，

故答案为：2025.

题型二 分式的求值

【典例分析】（24-25 八年级下·山东泰安·期末）若$\frac{y}{2x-3y}=\frac{1}{5}$，那么$\frac{x}{y}$的值是（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．4

【答案】D

【分析】本题考查了分式方程，由已知分式方程出发，通过交叉相乘转化为整式方程，解出 x 与 y 的关系式，进而求出结果.

【详解】解：$\frac{y}{2x-3y}=\frac{1}{5}$，

交叉相乘得：$5y=2x-3y$，

将$-3y$移到左边，合并同类项：$8y=2x$，

两边同时除以 2，得：$4y=x$，

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{4y}{y}=4$，

故选：D.

【变式训练】（24-25 八年级下·四川成都·期末）已知：$\frac{xy}{x+y}=-1,\frac{yz}{y+z}=\frac{4}{3},\frac{zx}{z+x}=-\frac{4}{3}$，则$\frac{xyz}{xy+yz+zx}$的值为_____.

【答案】-2

【分析】本题考查了分式的混合运算，灵活运用同分母分式的加法运算的逆运算和倒数的定义是解决问题的关键．先利用倒数的定义得到$\frac{x+y}{xy}=-1$，$\frac{y+z}{yz}=\frac{3}{4}$，$\frac{z+x}{zx}=-\frac{3}{4}$，再利用同分母分式的加法运算的逆运算得到$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{3}{4}$，接着把三个式子相加得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}$，然后把等式左边通分后利用倒数的定义求解．

【详解】解：$\because \frac{xy}{x+y}=-1$，$\frac{yz}{y+z}=\frac{4}{3}$，$\frac{zx}{z+x}=-\frac{4}{3}$，

$\therefore \frac{x+y}{xy}=-1$，$\frac{y+z}{yz}=\frac{3}{4}$，$\frac{z+x}{zx}=-\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-1+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=-1$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{xy+yz+zx}{xyz}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{xyz}{xy+yz+zx}=-2$.

故答案为：-2.

题型三 求分式值为正（负）数时未知数的取值范围

【典例分析】（24-25 八年级下·江苏常州·期中）如果分式$\frac{3x^2}{4-2x}$的值为正数，则x的取值范围是__.

【答案】$x<2$ 且$x\neq 0$

【分析】根据平方的非负性、分式的值为正数可得$x\neq 0$，$4-2x>0$，由此即可得.

【详解】解：$\because$分式$\frac{3x^2}{4-2x}$的值为正数，且 $3x^2\geq 0$，

$\therefore 4-2x>0$ 且$x\neq 0$，

解得$x<2$ 且$x\neq 0$，

故答案为：$x<2$ 且$x\neq 0$.

【变式训练】（24-25 八年级下·北京海淀·期末）已知关于x的不等式$ax+b>0$ 的解集是$x<1$，则关于x的不等式$\frac{bx-a}{x-5}>0$ 的解集是（　　）

A．$-1<x<5$　　B．$x<-1$ 或$x>5$　　C．$x<1$ 或$x>5$　　D．$x>5$

【答案】B

【分析】由题意知，$a<0$，$b>0$，且$-\frac{b}{a}=1$，故不等式$\frac{bx-a}{x-5}>0$ 可变形为$\begin{cases}x+1<0\\x-5<0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1>0\\x-5>0\end{cases}$，解之即可.

【详解】解：∵不等式$ax+b>0$ 的解集是$x<1$，

∴$a<0$，且$-\frac{b}{a}=1$，

∴$b=-a>0$，

∴不等式$\frac{bx-a}{x-5}>0$ 可变为$\frac{x-\frac{a}{b}}{x-5}>0$，

∴$\frac{x+1}{x-5}>0$

∴$\begin{cases}x+1<0\\x-5<0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1>0\\x-5>0\end{cases}$，

∴$x<-1$ 或$x>5$.

故选：B.

题型四 求使分式值为整数时未知数的整数值

【典例分析】（24-25 八年级下·重庆丰都·期末）若一个四位数满足百位数字和十位数字相同，千位数字与个位数字之和为 7，这样的数称为“两同和七数”．已知M为一个“两同和七数”，且M可以被 9 整除．则满足条件M的最大值是_____．将M的各个数位数字之和记为$P(M)$，M的个位数字与千位数字的差记为$Q(M)$，并令$G(M)=\frac{P(M)}{Q(M)}$，当$G(M)$是整数时，则满足条件M的最小值是_____.

【答案】　7110　　2115

【分析】本题考查不等式的性质，整式的加减，分式的值等知识，灵活运用不等式的性质推导是解题的关键．设 M的千位是 a，百位是 b，则十位数字是 b，个位数字是 $7-a$，$1\le a\le 7$，$M=999a+110b+7$，$P(M)=2b+7$．根据 M可以被 9 整除和 a 的取值范围可知 $2b+7=9$，从而可得M的最大值，求解$P(M)=9$，又求出$Q(M)=7-2a$，再根据$G(M)=\frac{P(M)}{Q(M)}$，$G(M)$是整数求出 a 的值，从而得出复合条件的 M的值，继而求出满足条件 M 的最小值.

【详解】解：设 M的千位是 a，百位是 b，则十位数字是 b，个位数字是 $7-a$，$1\le a\le 7$，

$\therefore M=1000a+100b+10b+7-a=999a+110b+7$，$P(M)=a+b+b+7-a=2b+7$.

$\because M$可以被 9 整除，$M=999a+110b+7=9(111a+12b)+2b+7$，

$\therefore 2b+7$ 是 9 的倍数，

又$\because 0\le b\le 9$，且 b 为自然数，

$\therefore 7\le 2b+7\le 25$，且 $2b+7$ 是奇数，

$\therefore 2b+7=9$，即$P(M)=9$.

解得：$b=1$，

$\because M$为一个“两同和七数”，

$\therefore$当$a=7$ 时，则 $7-a=0$，

$\therefore M$的最大值为 7110；

又$\because M$的个位数字与千位数字的差记为$Q(M)$，即$Q(M)=7-a-a=7-2a$.

$\therefore G(M)=\frac{P(M)}{Q(M)}=\frac{9}{7-2a}$，

又$\because 1\le a\le 7$，且 a 为正整数，

$\therefore -7\le 7-2a\le 5$，且 $7-2a$是奇数，

又$\because G(M)$是整数，

$\therefore 7-2a=-3$ 或-1 或 1 或 3，

解得：$a=5$ 或 4 或 3 或 2，

$\therefore M=5112$ 或 4113 或 3114 或 2115.

$\therefore$满足条件 M 的最小值是：2115.

故答案为：7110；2115.

【变式训练】（24-25 八年级下·湖南长沙·期末）若$\frac{x^2-5x+4}{x-3}$的值为整数，则符合要求的整数 x 的个数为（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】D

【分析】本题主要考查了分式的化简，解题的关键需要分离常数，转化思考.

先将分式$\frac{x^2-5x+4}{x-3}$分离常数得到$x-2-\frac{2}{x-3}$，再将问题转化为$\frac{2}{x-3}$为整数的问题求解.

【详解】解：$\frac{x^2-5x+4}{x-3}=\frac{(x-3)^2+(x-3)-2}{x-3}=x-3+1-\frac{2}{x-3}=x-2-\frac{2}{x-3}$，

$\because\frac{x^2-5x+4}{x-3}$的值为整数，$x$为整数，

∴$\frac{2}{x-3}$为整数，

∴$x-3=\pm1$或$x-3=\pm2$，

∴$x=4$或2或5或1，

故选：D.

题型五 利用分式的基本性质判断分式值的变化

【典例分析】（24-25八年级下·江苏盐城·月考）将分式$\frac{4m-3n}{5mn}$中的m、n同时扩大为原来的3倍，分式的值将（　　）

A．扩大3倍　　B．不变　　C．缩小为原来的$\frac{1}{3}$　　D．缩小为原来的$\frac{1}{9}$

【答案】C

【分析】根据分式的基本性质求解即可.

【详解】设$A=\frac{4m-3n}{5mn}$，

若m 、n同时扩大为原来的3倍，

则有：$\frac{4(m\times3)-3(n\times3)}{5(m\times3)(n\times3)}=\frac{3(4m-3n)}{9\times5mn}=\frac{1}{3}\times\frac{4m-3n}{5mn}=\frac{1}{3}A$，

∴缩小为原来的$\frac{1}{3}$，

故选：C.

【变式训练】（24-25八年级下·江苏无锡·期中）将分式$\frac{xy}{2x+y}$中的x，y的值都变为原来的2倍，则该分式的值（　　）

A．变为原来的2倍　　B．变为原来的4倍　　C．不变　　D．变为原来的一半

【答案】A

【分析】把原分式中的x、y分别替换成$2x$，$2y$，然后利用分式的基本性质化简即可得到答案.

【详解】解：∵分式$\frac{xy}{x+y}$中x、y的值都变为原来的2倍，

∴分式$\frac{xy}{x+y}$变为：$\frac{2x\cdot2y}{2x+2y}=\frac{2xy}{x+y}$

则该分式的值变为原来的2倍.

故选：A.

题型六 约分

【典例分析】（23-24八年级下·河北承德·期中）若$\frac{4-☆}{x-2}$表示的是一个最简分式，则☆可以是（）

A．$2x$　　B．x　　C．$4x-x^2$　　D．x^2

【答案】B

【分析】本题考查了最简分式，根据最简分式的定义，即可求解．最简分式定义，分子与分母没有公因式的分式，叫最简分式．

【详解】解：A、当☆为$2x$时，$\frac{4-2x}{x-2}=-2$，不是最简分式，故该选项不符合题意；

B、当☆为x时，$\frac{4-x}{x-2}$，是最简分式，故该选项符合题意；

C、当☆为$4x-x^2$时，$\frac{4-4x+x^2}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$，不是最简分式，故该选项不符合题意；

D、当☆为x^2时，$\frac{4-x^2}{x-2}=\frac{-(x+2)(x-2)}{x-2}=-x-2$，不是最简分式，故该选项不符合题意；

故选：B．

【变式训练】（24-25七年级下·全国·课后作业）（运算能力）定义：若一个分式约分后是一个整式，则称这个分式为“巧分式”，约分后的整式称为这个分式的“巧整式”．例如：$\frac{4x^2-8x}{x-2}=\frac{4x(x-2)}{x-2}=4x$，则称分式$\frac{4x^2-8x}{x-2}$是“巧分式”，$4x$为它的“巧整式”．根据上述定义，解决下列问题：

(1)下列分式中是“巧分式”的有_____（填序号）；

①$\frac{(x-1)(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$；②$\frac{2x+5}{x+3}$；③$\frac{x^2-y^2}{x+y}$．

(2)若分式$\frac{-2x^3+2x}{A}$的“巧整式”为$1-x$，请判断$\frac{2x^3+4x^2+2x}{A}$是否是“巧分式”，并说明理由．

【答案】(1)①③

(2)是，见解析

【分析】本题考查了分式的化简、因式分解．

（1）根据“巧分式”的定义，逐个判断得结论；

（2）根据给出的“巧分式”的定义可得A；将A代入，约分后看是否是一个整式，即可得出结论．

【详解】（1）解：∵$\frac{(x-1)(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=2x-3$，$2x-3$是整式，

∴①是“巧分式”；

∵$\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2x+6-1}{x+3}=\frac{2(x+3)-1}{x+3}=2-\frac{1}{x+3}$，$2-\frac{1}{x+3}$不是整式，

∴②不是“巧分式”；

∵$\frac{x^2-y^2}{x+y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}=x-y$，$x-y$是整式，

∴③是“巧分式”；

（2）解：∵分式$\frac{-2x^3+2x}{A}$的“巧整式”为$1-x$.

$\therefore A=\frac{-2x^3+2x}{1-x}$,

$\therefore A=\frac{2x(1-x^2)}{1-x}=\frac{2x(1-x)(1+x)}{1-x}=2x(1+x)=2x^2+2x$;

$\because \frac{2x^3+4x^2+2x}{2x^2+2x}=\frac{2x(x^2+2x+1)}{2x(x+1)}=\frac{(x+1)^2}{(x+1)}=x+1$,

又$x+1$是整式,

$\therefore \frac{2x^3+4x^2+2x}{A}$是“巧分式”.

题型七 最简分式

【典例分析】（23-24 八年级下·河北廊坊·月考）若$\frac{1-☆}{x-1}$表示的是一个最简分式，则☆可以是（　　）

A．$2x$　　B．x　　C．x^2　　D．1

【答案】A

【分析】本题考查了最简分式，熟练掌握最简分式的定义是解题的关键，利用最简分式的定义对每个选项进行判断即可得出结论.

【详解】解：A、☆为$2x$时，$\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-2x}{x-1}$，原式为最简分式，故选项符合题意；

B、☆为x时，$\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-x}{x-1}=-1$，原式不是最简分式，故选项不符合题意；

C、☆为x^2时，$\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-x^2}{x-1}=-(1+x)$，原式不是最简分式，故选项不符合题意；

D、☆为 1 时，$\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-1}{x-1}=0$，原式不是最简分式，故选项不符合题意；

故选：A.

【变式训练】（24-25 八年级下·山东淄博·月考）下列各式中，最简分式有 _____个.

①$\frac{1}{1-x}$；②$\frac{4y+2}{2x}$；③$\frac{x}{3\pi}$；④$\frac{10+4a}{5+2a}$；⑤ $\frac{4y^2+10y}{2y+5}$

【答案】2

【分析】此题考查了最简分式的定义，根据最简分式的定义，只要判断出分子分母是否有公因式即可，掌握最简分式的概念是解题的关键.

【详解】解：①$\frac{1}{1-x}$，③$\frac{x}{3\pi}$的分子、分母中不含有公因式，是最简分式，故符合题意；

②$\frac{4y+2}{2x}$的分子、分母中含有公因式 2，不是最简分式，故不符合题意；

④$\frac{10+4a}{5+2a}$的分子、分母中含有公因式$(5+2a)$，不是最简分式，故不符合题意；

⑤ $\frac{4y^2+10y}{2y+5}$的分子、分母中含有公因式$(2y+5)$，不是最简分式，故不符合题意；

综上，最简分式有 2 个，

故答案为：2.

题型八 最简公分母

【典例分析】（23-24 八年级下·山东青岛·单元测试）分式$\frac{y}{2x^7}$与$\frac{1}{5x^4}$的最简公分母是（　　）

A．$10x^7$　　B．$7x^7$　　C．$10x^{11}$　　D．$7x^{11}$

【答案】A

【分析】本题考查了最简公分母，根据最简公分母的定义即可解答，掌握最简公分母的定义是解题的关键.

【详解】解：分式$\frac{y}{2x^7}$与$\frac{1}{5x^4}$的最简公分母是为$2\times5\times x^7=10x^7$，

故选：A.

【变式训练】（2024·辽宁盘锦·三模）在解分式方程：$\frac{x-1}{x^2-4}+2=\frac{1}{x^2+2x}$的过程中，去分母时，需方程两边都乘以最简公分母_____.

【答案】$x(x+2)(x-2)$

【分析】本题考查最简公分母的知识，先把分母x^2-4和x^2+2x因式分解，即可求得分式的最简公分母，熟练解分式方程是解题的关键.

【详解】解：∵ $x^2-4=x(x+2)(x-2)$，$x^2+2x=x(x+2)$，

∴分式$\frac{x-1}{x^2-4}$和$\frac{1}{x^2+2x}$的最简公分母为$x(x+2)(x-2)$，

∴去分母时，需方程两边都乘以最简公分母$x(x+2)(x-2)$.

故答案为：$x(x+2)(x-2)$.

题型九 通分

【典例分析】（24-25 八年级下·全国·课后作业）小强昨天做了一道分式题：“对下列分式通分：$\frac{x-3}{x^3-x}$，$\frac{3}{x-x^2}$”．他的解答过程如下．请你指出他的错误，并改正.

$\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{x-3}{x(x^2-1)}=\frac{x-3}{x(x+1)(x-1)}=x-3$，…①

$\frac{3}{x-x^2}=\frac{3}{x(1-x)}=\frac{3(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=3(x+1)$．…②

【答案】见解析

【分析】此题考查了通分，解答此题的关键是熟知找公分母的方法：（1）系数取各系数的最小公倍数；（2）凡出现的因式都要取；（3）相同因式的次数取最高次幂.

将两式系数取各系数的最小公倍数，相同因式的次数取最高次幂，找出最简公分母，再通分即可.

【详解】解：错误：①的最后结果不能进行去分母，②的通分过程中符号出现问题，并且不能进行去分母.

改正：$\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{x-3}{x(x^2-1)}=\frac{x-3}{x(x+1)(x-1)}$，

$\frac{3}{x-x^2}=\frac{3}{x(1-x)}=-\frac{3(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$

【变式训练】（23-24 八年级下·河南周口·月考）分式$\frac{b}{3a}$与$-\frac{ab}{2c}$的最简公分母是_____，通分后的结果是_____、_____.

【答案】 $6ac$ $\frac{2bc}{6ac}$ $-\frac{3a^2b}{6ac}$

【分析】此题考查了分式的通分，分式的最简公分母是通常取各分母系数的最小公倍数与字母因式的最高次幂的积作公分母，这样的公分母叫做最简公分母，据此解答.

【详解】分式$\frac{b}{3a}$与$-\frac{ab}{2c}$的最简公分母是$6ac$，

$\frac{b}{3a}=\frac{b\cdot 2c}{3a\cdot 2c}=\frac{2bc}{6ac}$，$-\frac{ab}{2c}=-\frac{ab\cdot 3a}{2c\cdot 3a}=-\frac{3a^2b}{6ac}$，

故答案为：$6ac$；$\frac{2bc}{6ac}$；$-\frac{3a^2b}{6ac}$.

题型十 分式加减混合运算

【典例分析】（23-24 八年级下·安徽宿州·月考）（1）观察下列各式：$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，

$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{30}=\frac{1}{5\times 6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$，……，由此可推断$\frac{1}{72}=$_____=_____.

（2）请猜想能表示（1）的特点的一般规律，用含 m 的等式表示出来为_____=_____（m 表示正整数）；

（3）请参考（2）中的规律计算：$\frac{1}{(x-3)(x-2)}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}$.

【答案】（1）$\frac{1}{8\times 9}$，$\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$；（2）$\frac{1}{m(m+1)}$，$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$；（3）0

【分析】此题考查了分式加减混合运算、数字类规律探究，掌握规律是解题的关键.

（1）按照题目中的例子进行解答即可；

（2）根据例子写出规律即可；

（3）先求出$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}=-\frac{2}{(x-3)(x-1)}$，再把所求式子按照规律进行计算即可.

【详解】解：（1） 根据对式子的观察，可以将分母 72 分解为 8×9，再按规律写出：$\frac{1}{72}=\frac{1}{8\times9}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$;

（2）用 m 表示由原分母分解出来的较小的因数，用 $m+1$ 表示较大的因数，得：$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$;

故答案为：$\frac{1}{m(m+1)}$，$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$;

（3）$\because\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}=\frac{(x-3)-(x-1)}{(x-1)(x-3)}=-\frac{2}{(x-3)(x-1)}$,

$\therefore-\frac{2}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}$,

$\therefore\frac{1}{(x-3)(x-2)}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}$,

$=\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)$

$=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$=0.$

【变式训练】（2024·山东滨州·二模）人们把$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$这个数叫做黄金分割数，著名数学家华罗庚的优选法中的 0.618 就应用了黄金分割数．设$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，记$s_1=\frac{1}{1+a^1}+\frac{1}{1+b^1}$，$s_2=\frac{2}{1+a^2}+\frac{2}{1+b^2}$，……，$s_{10}=\frac{10}{1+a^{10}}+\frac{10}{1+b^{10}}$，则$s_1+s_2+\ldots\ldots+s_{10}$的值为_____.

【答案】55

【分析】本题考查了数式的变化规律，从题目中找出式子间的变化规律是解题的关键.

根据题意可得：$ab=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5-1}{4}=1$，利用分式的加减法求出各$S$的值后，相加即可.

【详解】解：$\because ab=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5-1}{4}=1$

$\therefore s_1=\frac{1}{1+a^1}+\frac{1}{1+b^1}=\frac{2+a^1+b^1}{1+a^1+b^1+ab}=\frac{2+a^1+b^1}{2+a^1+b^1}=1$，$s_2=\frac{2}{1+a^2}+\frac{2}{1+b^2}=\frac{2\times(2+a^2+b^2)}{1+a^2+b^2+a^2b^2}=\frac{2\times(2+a^2+b^2)}{2+a^2+b^2}=2$，

……

$s_{10}=\frac{10}{1+a^{10}}+\frac{10}{1+b^{10}}=\frac{10\times(2+a^{10}+b^{10})}{1+a^{10}+b^{10}+a^{10}b^{10}}=\frac{10\times(2+a^{10}+b^{10})}{2+a^{10}+b^{10}}=10$，

$\therefore s_1+s_2+\ldots\ldots+s_{10}=1+2+\ldots\ldots+10=55$;

故答案为：55.

题型十一 分式加减的实际应用

【典例分析】（2024·河北保定·三模）图 1 中阴影部分的面积为S_1（边长为 a 的大正方形中有一个边长为 b 的小正方形）．图 2 中阴影部分的面积为S_2（边长为 a 的大正方形中有一个长为 a、宽为 b 的小长方

形），$a>b>0$，设$k=\frac{S_1}{S_2}$，则 k 的取值范围为_____.

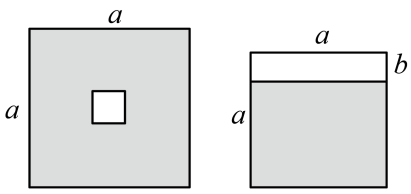


图1　　图2

【答案】$1<k<2$

【分析】本题主要考查了列代数式、因式分解的应用等知识点，根据题意得到$k=1+\frac{b}{a}$是解答本题的关键．根据题意可得$S_1=a^2-b^2$，$S_2=a^2-ab$，从而得到$k=1+\frac{b}{a}$，再根据$a>b>0$，可得 $0<\frac{b}{a}<1$，从而得到 $1+\frac{b}{a}$的取值范围即k取值范围．

【详解】解：由题意得，$S_1=a^2-b^2$，$S_2=a^2-ab$，

$\because a>b>0$，

$\therefore a-b\neq 0$，

$\therefore k=\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=\frac{a+b}{a}=1+\frac{b}{a}$，

$\because a>b>0$，

$\therefore 0<\frac{b}{a}<1$，

$\therefore 1<1+\frac{b}{a}<2$，

即 $1<k<2$，

故答案为：$1<k<2$.

【变式训练】（23-24 八年级下·浙江杭州·期末）甲、乙两人前后两次同时在同一家超市购买大米，前后两次购买大米的价格每千克分别为 m 元和 n 元（m，n 为不相等的正数）．若甲每次购买 p 千克大米，乙每次花 p 元钱购买大米（p 为正数）．则甲、乙两种购买方式平均价格低的是（　　）

A．甲　　B．乙　　C．甲、乙一样　　D．不确定

【答案】B

【分析】本题考查分式加减的应用，解题关键是理解题意．根据题意分别算出甲乙两次购买大米的平均价格，再作差，利用完全平方公式进行比较即可求解．

【详解】解：依题得：甲两次购买大米的平均价格为$\frac{mp+np}{p+p}=\frac{m+n}{2}$，

乙两次购买大米的平均价格为$\frac{p+p}{\frac{p}{m}+\frac{p}{n}}=2p\times\frac{mn}{mp+np}=\frac{2mn}{m+n}$，

$\because \frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m+n)^2-4mn}{2(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$,

又$\because m\neq n$,

$\therefore \frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>0$,

即$\frac{m+n}{2}>\frac{2mn}{m+n}$，乙两次购买大米的平均价格更低，更合理.

故选：B.

题型十二 含乘方的分式乘除混合运算

【典例分析】（24-25 八年级下·全国·期末）当$a=2$，$b=-3$时，$(ab)^3\times\left(-\frac{b}{a^2}\right)^3\div\left(-\frac{b}{a}\right)^4=$____.

【答案】-18

【分析】本题考查了分式的乘除运算，首先根据分式的乘除运算法则进行计算，把分式化简可得原式$=-ab^2$，然后再把$a=2$，$b=-3$代入化简后的代数式计算即可.

【详解】解：$(ab)^3\times\left(-\frac{b}{a^2}\right)^3\div\left(-\frac{b}{a}\right)^4$

$=a^3b^3\times\left(-\frac{b^3}{a^6}\right)\div\frac{b^4}{a^4}$

$=-a^3b^3\times\frac{b^3}{a^6}\times\frac{a^4}{b^4}$

$=-ab^2$,

当$a=2$，$b=-3$时，

原式$=-ab^2=-2\times(-3)^2=-2\times9=-18$.

故答案为：-18 .

【变式训练】（24-25 八年级下·山东东营·月考）（1）计算：$\left(-\frac{2a}{b^2}\right)^2\cdot\left(\frac{2b}{a}\right)^2\div\left(-\frac{2b^2}{a}\right)$;

（2）已知$x+2y=4$，$x-2y=-1$，先化简再求值：$\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\div\left(\frac{x+2y}{x+y}\right)^2$;

（3）已知$x-y=\frac{1}{2}$，$xy=-\frac{3}{4}$，先分解因式，再求值：$x^3y-2x^2y^2+xy^3$.

【答案】（1）$-\frac{8a}{b^4}$;（2）$\frac{x-2y}{x+2y}$，$-\frac{1}{4}$;（3）$xy(x-y)^2$，$-\frac{3}{16}$

【分析】（1）先计算分式的乘方运算，然后按照分式的乘除混合运算法则计算即可；

（2）将第一项的分子用平方差公式分解因式，将其分母用完全平方公式分解因式，同时计算分式的乘方运算，然后按照分式的乘除混合运算法则计算即可，得到结果后再将各式代入求值；

（3）先用提公因式法和完全平方公式分解因式，得到结果后再将各式代入求值即可.

【详解】解：（1）$\left(-\frac{2a}{b^2}\right)^2\cdot\left(\frac{2b}{a}\right)^2\div\left(-\frac{2b^2}{a}\right)$

$=-\frac{4a^2}{b^4}\cdot\frac{4b^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2b^2}$

$=-\frac{8a}{b^4}$;

（2）$\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\div\left(\frac{x+2y}{x+y}\right)^2$

$=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+y)^2}\div\frac{(x+2y)^2}{(x+y)^2}$

$=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+y)^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{(x+2y)^2}$

$=\frac{x-2y}{x+2y}$,

把$x+2y=4$，$x-2y=-1$代入上式，得：$\frac{x-2y}{x+2y}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$;

（3）$x^3y-2x^2y^2+xy^3$

$=xy(x^2-2xy+y^2)$

$=xy(x-y)^2$,

把$x-y=\frac{1}{2}$，$xy=-\frac{3}{4}$代入上式，得：

$xy(x-y)^2=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{16}$.

题型十三 分式加减乘除混合运算

【典例分析】（25-26 八年级下·陕西西安·月考）化简：$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)\div\frac{x-1}{x-2}$

【答案】$\frac{1}{x+2}$

【分析】先通分括号内，再把除法化为乘法，最后运算乘法，即可作答.

【详解】解：$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)\div\frac{x-1}{x-2}$

$=\left[\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{3}{(x-2)(x+2)}\right]\div\frac{x-1}{x-2}$

$=\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x-2}{x-1}$

$=\frac{1}{x+2}$.

【变式训练】（25-26 八年级下·广东湛江·开学考试）先化简，再求值：$\left(\frac{3x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{x}{x^2-4}$，其中$x=1$

【答案】化简为$2x+8$，值为 10

【分析】先对括号内的两个分式进行通分，计算出括号内的结果；再将除法运算转化为乘法运算；接着利用平方差公式分解因式后进行约分化简，得到最简整式；最后将$x=1$代入最简式计算出最终结果.

【详解】解：原式$=\left[\frac{3x(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right]\div\frac{x}{x^2-4}$

$=\frac{3x(x+2)-x(x-2)}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x^2-4}{x}$

$=\frac{3x^2+6x-x^2+2x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{x}$

$=\frac{2x^2+8x}{x}$

$=\frac{x(2x+8)}{x}$

$=2x+8.$

当$x=1$时，原式$=2x+8=2\times1+8=10.$

题型十四 分式化简求值

【典例分析】（24-25八年级下·四川遂宁·期中）化简$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}\div\frac{a-3}{a^2+3a}-\frac{a-a^2}{a^2-1}$，然后在0，1，2，3中选一个你认为合适的$a$值，代入求值.

【答案】$\frac{8}{3}$

【分析】根据分式有意义的条件和除数不为0，可知a的值只能选2，根据分式的运算法则把分式化简，再把$a=2$代入化简后的分式中计算求值.

【详解】解：∵$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}\div\frac{a-3}{a^2+3a}-\frac{a-a^2}{a^2-1}$有意义，

$\therefore\begin{cases}a^2+6a+9\neq0\\a-3\neq0\\a^2+3a\neq0\\a^2-1\neq0\end{cases}$，

整理得：$\begin{cases}(a+3)^2\neq0\\a-3\neq0\\a(a+3)\neq0\\(a+1)(a-1)\neq0\end{cases}$，

$\therefore a\neq\pm3$、$a\neq\pm1$、$a\neq0$，

$\therefore a=2$，

$\therefore\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}\div\frac{a-3}{a^2+3a}-\frac{a-a^2}{a^2-1}$

$=\frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)^2}\div\frac{a-3}{a(a+3)}-\frac{a(1-a)}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{a-3}{a+3}\times\frac{a(a+3)}{a-3}-\frac{a(1-a)}{(a+1)(a-1)}$

$=a+\frac{a}{a+1}$

$=\frac{a(a+1)}{a+1}+\frac{a}{a+1}$

$=\frac{a^2+2a}{a+1}$,

当$a=2$时，

可得：原式$=\frac{a^2+2a}{a+1}=\frac{2^2+2\times2}{2+1}=\frac{8}{3}$.

【变式训练】（24-25八年级下·云南文山·期末）先化简代数式：$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x}{x^2-1}$，再从$-1,0,1,-2$四个数中选择一个恰当的作为$x$的值，代入求出代数式的值.

【答案】$\frac{2}{x}$，当$x=-2$时，原式$=-1$

【分析】本题考查了分式化简求值，先通分，再运算乘法，化简得$\frac{2}{x}$，结合分母不为0，最后把$x=-2$代入$\frac{2}{x}$，得出分式的值为-1.

【详解】解：$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x}{x^2-1}$

$=\left[\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}\right]\div\frac{x}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x+1-x+1}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x+1)(x-1)}{x}$

$=\frac{2}{x}$;

$\because x^2-1\neq0, x\neq0$，

$\therefore x\neq\pm1, x\neq0$

$\therefore$把$x=-2$代入$\frac{2}{x}=\frac{2}{-2}=-1$.

题型十五 分式最值

【典例分析】（25-26八年级下·山东威海·期末）分式$\frac{1}{x^2+2x+5}$的最大值是（　　）

A．5　　B．6　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{5}$

【答案】C

【分析】本题考查分式的最值，利用完全平方公式，求出分母的最小值，进而求出分式的最大值即可.

【详解】解：$\because x^2+2x+5=(x+1)^2+4$，且$(x+1)^2\geq0$，

$\therefore x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq4$，

$\therefore x^2+2x+5$的最小值为4，

$\therefore$分式$\frac{1}{x^2+2x+5}$的最大值是$\frac{1}{4}$;

故选：C.

【变式训练】（25-26 八年级下·江苏镇江·月考）请仔细阅读下面材料，然后解决问题：

在分式中，对于只含有一个字母的分式，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”，例如：$\frac{x}{x+1},\frac{x^2}{x+1}$；当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”，例如：$\frac{1}{x+1},\frac{x}{x^2+1}$. 我们知道，假分数可化为带分数，例$\frac{13}{4}=\frac{12+1}{4}=3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$，类似的，假分式也可以化为“带分式”（整式与真分式和的形式），例如：$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$.

(1)将分式$\frac{3x}{x-1}$化为带分式；

(2)当 x 取哪些整数值时，分式$\frac{3x}{x-1}$的值也是整数？

(3)当$x=$_____时，分式$\frac{3x^2+5}{x^2+1}$的最大值是_____.

【答案】(1)$3+\frac{3}{x-1}$

(2)$x=-2,0,2,4$

(3)当$x=0$时，分式$\frac{3x^2+5}{x^2+1}$的最大值是 5

【分析】本题考查了分式的运算与变形，分式的值等知识.

（1）根据材料提供方法变形即可求解；

（2）由（1）得$\frac{3x}{x-1}=3+\frac{3}{x-1}$，根据分式$\frac{3x}{x-1}$的值是整数，得到$\frac{3}{x-1}$为整数，即可得到当 x 取整数时，$x-1$是 3 的整数因数，得到$x-1=\pm1$或$x-1=\pm3$，即可求出$x=-2,0,2,4$；

（3）$\frac{3x^2+5}{x^2+1}$变形为$3+\frac{2}{x^2+1}$，即可得到当x^2+1取最小值时，分式$\frac{3x^2+5}{x^2+1}$有最大值．根据$x^2\geq0$，得到$x^2+1\geq1$，求出当$x=0$时，$\frac{3x^2+5}{x^2+1}=5$，问题得解.

【详解】（1）解：$\frac{3x}{x-1}=\frac{3x-3+3}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=3+\frac{3}{x-1}$；

（2）解：∵由（1）得$\frac{3x}{x-1}=3+\frac{3}{x-1}$，

∵分式$\frac{3x}{x-1}$的值是整数，

∴$\frac{3}{x-1}$为整数，

∴当 x 取整数时，$x-1$是 3 的整数因数，

∴$x-1=\pm1$或$x-1=\pm3$，

∴$x=-2,0,2,4$；

（3）解：$\frac{3x^2+5}{x^2+1}=\frac{3(x^2+1)+2}{x^2+1}=3+\frac{2}{x^2+1}$，

∴当x^2+1取最小值时，分式$\frac{3x^2+5}{x^2+1}$有最大值．

∵$x^2\geq 0$，

∴$x^2+1\geq 1$，

∴当$x^2+1=1$即$x=0$时，$\frac{3x^2+5}{x^2+1}=3+\frac{2}{x^2+1}=3+2=5$，

故当$x=0$时，分式$\frac{3x^2+5}{x^2+1}$的最大值是 5．

题型十六 解分式方程（化为一元一次)

【典例分析】（25-26 八年级下·重庆·月考）解不等式组、解方程：

(1)$\begin{cases}4x>3(x-1)\\ x<\frac{2x+1}{3}\end{cases}$

(2)$\frac{2x}{x-3}=1+\frac{3}{3-x}$

【答案】(1)$-3<x<1$

(2)$x=-6$

【分析】（1）分别求出不等式组中两个一元一次不等式的解集，根据口诀“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到”得到不等式组的解集；

（2）解分式方程先通过去分母将分式方程转化为整式方程，求解整式方程后再进行检验即可．

【详解】（1）解：$\begin{cases}4x>3(x-1)①\\ x<\frac{2x+1}{3}②\end{cases}$，

解不等式①得$x>-3$，

解不等式②得$x<1$，

∴原不等式组的解集为$-3<x<1$；

（2）解：$\frac{2x}{x-3}=1+\frac{3}{3-x}$，

将方程变形为$\frac{2x}{x-3}=1-\frac{3}{x-3}$，

方程两边同乘$(x-3)$，得$2x=(x-3)-3$，

移项合并得$x=-6$，

检验：当$x=-6$时，$x-3=-9\neq 0$，

∴原分式方程的解为$x=-6$．

【变式训练】（25-26 八年级下·四川遂宁·月考）解方程：$\frac{3-2x}{x-2}=\frac{x}{2-x}-2$．

【答案】$x=1$

【分析】根据解分式方程的方法解方程即可.

【详解】解：$\frac{3-2x}{x-2}=\frac{x}{2-x}-2$

$3-2x=-x-2(x-2)$

$3-2x=-x-2x+4$

$x+2x-2x=4-3$

$x=1$；

检验：当$x=1$时，$x-2=1-2=-1\neq 0$，

$x=1$是原方程的解.

题型十七 根据分式方程解的情况求值

【典例分析】（25-26八年级下·云南昆明·期末）若关于x的分式方程$\frac{mx-1}{x-3}+\frac{5}{3-x}=1$无解，则$m$的值是（　　）

A．1或2　　B．2或3　　C．1或3　　D．3或0

【答案】A

【分析】本题考查了分式方程的无解问题，先把分式方程化为整式方程得到$(m-1)x=3$，由于关于x的分式方程$\frac{mx-1}{x-3}+\frac{5}{3-x}=1$无解，分最简公分母为0分式方程有增根和化简后的整式方程无解两种情况可求得m.

【详解】解：$\frac{mx-1}{x-3}+\frac{5}{3-x}=1$

去分母，得$mx-1-5=x-3$，

$(m-1)x=3$.

∵关于x的分式方程无解，

当$m-1=0$时，原方程无解，

∴$m=1$，

当最简公分母$x-3=0$，

$x=3$，

当$x=3$时，得$m=2$，

综上m的值为1或2，

故选A.

【变式训练】（25-26 八年级下·甘肃甘南·期末）已知关于x的分式方程$\frac{x}{x-3}=2-\frac{m}{3-x}$无解，求$m$的值.

【答案】$m=3$

【分析】先去分母求出x，再根据无解的条件求解即可

【详解】解：原方程化为$\frac{x}{x-3}=2+\frac{m}{x-3}$，

方程两边同时乘以$(x-3)$，得$x=2(x-3)+m$，

解方程，得$x=6-m$，

∵该分式方程无解，

∴ $x=3$，即 $6-m=3$，

∴ $m=3$.

题型十八 分式方程无解问题

【典例分析】（25-26 八年级下·湖北荆州·期末）若关于x的分式方程$\frac{2}{x-4}=3-\frac{m}{x-4}$无解，则$m$的值是_____.

【答案】-2

【分析】本题主要考查了分式方程无解的条件，熟练掌握分式方程增根的产生原因及求解方法是解题的关键.

先将分式方程化为整式方程，再根据分式方程无解的条件（解为增根），求出m的值.

【详解】解：$\frac{2}{x-4}=3-\frac{m}{x-4}$，

$2=3(x-4)-m$，

$2=3x-12-m$，

$3x=m+14$，

$x=\frac{m+14}{3}$，

当$x=4$时，原方程分母为零，是增根，此时方程无解，

$\frac{m+14}{3}=4$，

$m+14=12$，

$m=-2$，

故答案为：-2.

【变式训练】（25-26 八年级下·山东烟台·期末）如果关于x的分式方程$\frac{mx}{1-x}+\frac{x}{x-1}=2$无解，那么实数$m$的值是（　　）

A．$m\neq 1$且$m\neq -1$　　B．$m=-1$　　C．$m=1$或$m=-1$　　D．$m\neq 1$

【答案】C

【分析】本题考查分式方程无解的情况，分式方程无解分两种：变形后的整式方程无解，或整式方程的解是原分式方程的增根，需分别讨论这两种情况求m的值．

【详解】解：∵原方程为$\frac{mx}{1-x}+\frac{x}{x-1}=2$

∴将方程变形为$\frac{-mx}{x-1}+\frac{x}{x-1}=2$

方程两边同乘$(x-1)$（$x\neq 1$），得$-mx+x=2(x-1)$

整理得$(m+1)x=2$

∵原分式方程无解

∴分两种情况讨论：

①当整式方程无解时，$m+1=0$，解得$m=-1$

②当整式方程的解为增根时，增根为$x=1$，将$x=1$代入$(m+1)x=2$，得$m+1=2$，解得$m=1$

综上，$m=1$或$m=-1$，

故选：C．

题型十九 分式方程的行程问题

【典例分析】（25-26八年级下·北京·月考）甲和乙计划前往距学校4km的图书馆，甲先出发步行前往，乙在30分钟后骑自行车前往，最终甲和乙同时抵达图书馆．若将甲和乙的运动过程看作匀速运动，已知乙的速度比甲的速度快5km/h，求甲的速度．设甲的速度为$x$km/h，请根据题意列出方程_____．

【答案】$\frac{4}{x}=\frac{4}{x+5}+\frac{1}{2}$

【分析】本题考查分式方程的实际应用，理解题意并根据等量关系列方程是解题关键．

甲先出发30分钟，乙后出发同时到达，即甲所用时间比乙多0.5小时，根据速度和时间关系列方程

【详解】解：∵甲的速度为 $x$km/h，乙的速度比甲的速度快5km/h，

∴乙的速度为 $(x+5)$km/h，

∴甲行驶4km所用时间为 $\frac{4}{x}$ 小时，乙行驶4km所用时间为 $\frac{4}{x+5}$ 小时，

∵由于甲先出发30分钟（即0.5小时），且两人同时到达，

∴甲所用时间比乙多0.5小时，

根据题意可列方程：$\frac{4}{x}=\frac{4}{x+5}+\frac{1}{2}$．

故答案为：$\frac{4}{x}=\frac{4}{x+5}+\frac{1}{2}$.

【变式训练】（25-26 八年级下·云南昆明·月考）我国推进科技自立自强，牢筑钢铁长城．近期，我国自主研制的核动力航母“福建舰”正式下水试航．现“福建舰”在距离 A 港正东方向 50 海里的海面以试航速度航行，此时一架监测直升机从 A 港出发，以比“福建舰”试航的速度多 50 海里/时的速度沿正东方向追赶“福建舰”，当“福建舰”试航了 25 海里后，监测直升机刚好追上“福建舰”，求“福建舰”的试航速度．

【答案】25 海里/时

【分析】本题主要考查列分式方程解应用题，根据题意确定等量关系，列出方程是解题的关键．

根据监测直升机从 A 港出发，刚好追上“福建舰”所用的时间与“福建舰”试航所用的时间相等作为等量关系列分式方程求解即可．

【详解】解：设“福建舰”的试航速度为x海里/时，则监测直升机的速度为$(x+50)$海里/时，

由题意得，$\frac{25}{x}=\frac{50+25}{x+50}$，

解得$x=25$，

答：“福建舰”的试航速度为 25 海里/时．

题型二十 分式方程的工程问题

【典例分析】（25-26 八年级下·重庆潼南·期末）某学校计划利用暑假时间（共 58 天）对全校教室墙壁进行粉刷，现有甲、乙两个工程队有意承包这项工程，调查发现：乙队单独完成工程的时间是甲队的 1.5 倍，甲、乙两队合作完成工程需要 24 天，甲队每天的工作费用为 1500 元，乙队每天的工作费用为 950 元．

(1) 甲、乙两队单独完成这项工程各需多少天？

(2) 现有三种方案可选：①甲队单独完成工程，②乙队单独完成工程，③甲、乙两队合作完成工程．请你选择其中一种方案，既能在暑假时间完工，又能使工程费用最少，并计算出最少工程费用．

【答案】(1) 甲单独完成此项工程需要 40 天，乙单独完成此项工程需要 60 天

(2) 甲、乙两队合作既能在暑假时间完成工程，同时费用最少，最少费用为 5.88 万元

【分析】本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键．

（1）设甲工程队单独完成该工程需 x 天，则乙工程队单独完成该工程需 $1.5x$天，再根据“甲、乙两队合作完成工程需要 24 天”，列出分式方程，解方程即可；

（2）根据（1）中的结果求出甲单独完成，和甲、乙两队合作完成的费用比较，即可解答．

【详解】（1）解：设甲工程队单独完成此项工程需 x 天，则乙工程队单独完成此项工程需 $1.5x$天，

由题意得：$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1.5x}\right)\times 24=1$，

即：$\left(\frac{1.5+1}{1.5x}\right)\times 24=1$，

即：$\frac{5}{3x}\times 24=1$

解得：$x=40$，

经检验：$x=40$ 是原方程的解，

则 $1.5x=60$（天），

答：甲单独完成此项工程需要 40 天，乙单独完成此项工程需要 60 天；

（2）解：由（1）知甲单独完成此项工程需要 40 天，乙单独完成此项工程需要 60 天，

$\because 40<58<60$，

∴甲能在暑假时间完成，乙不能在暑假时间完成，

又∵甲单独完成的费用为：$40\times 1500=60000$（元），

甲、乙两队合作完成的费用为：$24\times(1500+950)=58800$（元），

且 $58800<60000$，

∴综上：甲、乙两队合作既能在暑假时间完成工程，同时费用最少，最少费用为 5.88 万元.

【变式训练】（25-26 八年级下·山东滨州·期末）皮影戏是一种在灯光照射下用隔亮布进行表演的民间戏剧形式．某玩具厂准备生产皮影戏玩具 8000 套，为尽快完成任务，实际每天生产皮影戏玩具的数量是原计划的 1.6 倍，结果提前 6 天完成任务．设该玩具厂原计划每天生产这种皮影戏玩具 x 套，根据题意可列方程为（　　）

A．$\frac{8000}{1.6x}-\frac{8000}{x}=6$　　B．$\frac{8000}{x}-\frac{8000}{1.6x}=6$

C．$\frac{8000}{x}+\frac{8000}{1.6x}=6$　　D．$\frac{8000\times 1.6}{x}-\frac{8000}{x}=6$

【答案】B

【分析】本题考查了分式方程的应用，根据题意列出分式方程是解答本题的关键.

设原计划每天生产 x 套，则实际每天生产 $1.6x$套，再根据生产皮影戏玩具 8000 套，提前 6 天完成任务列出分式方程并求解即可.

【详解】解：设原计划每天生产 x 套，则原计划天数为$\frac{8000}{x}$，实际每天生产 $1.6x$套，实际天数为 $\frac{8000}{1.6x}$.

∵ 提前 6 天完成任务，

∴ $\frac{8000}{x}-\frac{8000}{1.6x}=6$，

故选：B.

题型二十一 分式方程的经济问题

【典例分析】（24-25 八年级下·河南南阳·月考）某中学购买 A、B两种书架，其中 A 种书架的单价比 B 种书架的单价多 20 元，用 600 元购买 A 种书架的个数与用 480 元购买 B 种书架的个数相同.

(1)求 A、B两种书架的单价各是多少元？

(2)学校准备购买 A、B 书架共 15 个，且购买的总费用不超过 1400 元，求最多可以购买多少个 A 种书架？

【答案】(1)A 种书架的单价为 100 元，B种书架的单价为 80 元

(2)最多可以购买 10 个 A 种书架

【分析】（1）设B种书架的单价为x元，则A种书架的单价为$(x+20)$元，由题意：用 600 元购买A种书架的个数与用 480 元购买B种书架的个数相同．列出分式方程，解方程即可；

（2）设可以购买m个A种书架，由题意：学校准备购买A、B书架共 15 个，且购买的总费用不超过 1400 元，列出一元一次不等式，解不等式即可．

【详解】（1）解：设B种书架的单价为x元，则A种书架的单价为$(x+20)$元，

根据题意，得：$\frac{600}{x+20}=\frac{480}{x}$，

解得：$x=80$，

经检验：$x=80$ 是原分式方程的解．且符合题意，

则$x+20=100$．

答：A种书架的单价为 100 元，B种书架的单价为 80 元．

（2）解：设可以购买m个A种书架，

根据题意，得：$100m+80(15-m)\leq 1400$．

解得：$m\leq 10$，

答：最多可以购买 10 个A种书架．

【变式训练】（25-26 八年级下·江苏苏州·月考）“给垃圾一个分类的归宿，还我们一个清洁的世界”，柘城县某小区积极响应号召，准备购买两种类型的分类垃圾桶，在市场上了解到A种类型的垃圾桶比B种类型的垃圾桶贵 20 元，用 600 元购买A种类型的垃圾桶数量和用 500 元购买B种类型的垃圾桶数量相同．求购买一个A种类型的垃圾桶和购买一个B种类型的垃圾桶各需要多少元？

【答案】购买一个A种类型的垃圾桶需要 120 元，购买一个B种类型的垃圾桶需要 100 元

【分析】设购买一个B种类型的垃圾桶需要x元，则购买一个A种类型的垃圾桶需要$(x+20)$元，根据“总价÷单价=数量”，利用 600 元购买A种类型的垃圾桶数量和用 500 元购买B种类型的垃圾桶数量相同，建立分式方程求解即可．

【详解】解：设购买一个B种类型的垃圾桶需要x元，则购买一个A种类型的垃圾桶需要$(x+20)$元，

$\frac{600}{x+20}=\frac{500}{x}$，

解得$x=100$，

经检验，$x=100$是原方程的解，且符合实际意义，

$x+20=100+20=120$，

答：购买一个A种类型的垃圾桶需要120元，购买一个B种类型的垃圾桶需要100元.

题型二十二 分式方程和差倍分问题

【典例分析】（24-25八年级下·四川成都·期中）某公园为了美化环境，预备购进A,B两款花卉美化公园，已知A款花卉的单价是B款花卉的1.4倍，若花费14000元购买A款花卉和7000元购买B款花卉，可购买A款花卉比B款花卉多300株.

(1)求A,B两款花卉的单价是分别多少元？

(2)该公园有12480元预备款，在不超出预备款的前提下，准备购进A,B两款花卉共1000株，其中B款花卉数量不超过400株，求该公园购买花卉的最低总费用为多少？

【答案】(1)A款花卉单价为14元，B款花卉单价为10元

(2)12400元

【分析】本题考查了分式方程的应用，一元一次不等式的应用，正确列出方程和不等式是解答本题的关键.

（1）设B款花卉单价为x元，则A款花卉单价为$1.4x$元，根据“花费14000元购买A款花卉和7000元购买B款花卉，可购买A款花卉比B款花卉多300株”列方程求解即可；

（2）设A款花卉数量为a株，B款花卉为$(1000-a)$株，根据B款花卉数量不超过400株，列不等式组并结合一次函数的性质分析求解即可.

【详解】（1）解：设B款花卉单价为x元，则A款花卉单价为$1.4x$元，由题意可得

$\frac{14000}{1.4x}=\frac{7000}{x}+300$，

$x=10$，

经检验，$x=10$是原方程的解，

$1.4x=1.4\times10=14$(元)，

答：A款花卉单价为14元，B款花卉单价为10元；

（2）解：设A款花卉数量为a株，B款花卉为$(1000-a)$株，

根据题意得：$\begin{cases}14a+10(1000-a)\le12480\\1000-a\le400\end{cases}$，

解得：$600 \le a \le 620$，

设该公园购买花卉的总费用$w = 14a + 10(1000 - a) = 4a + 10000$

$\because 4 > 0$

$\therefore w$随a的增大而增大，

$\therefore$当 A 款花卉购买 600 株，此时总费用最少为 $4 \times 600 + 10000 = 12400$ 元.

【变式训练】（24-25 八年级下·黑龙江哈尔滨·期中）某超市销售甲、乙两种商品，五月份该超市同时购进甲、乙两种商品共 80 件，购进甲种商品用去 400 元，购进乙种商品用去 1200 元.

(1) 已知每件乙种商品的进价是每件甲种商品的进价的 3 倍，求甲、乙两种商品每件的进价

(2) 由于甲、乙这两种商品受到市民欢迎，六月份超市决定再次购进甲、乙两种商品共 80 件，且保持（1）的进价不变，已知甲种商品每件的售价 15 元，乙种商品每件的售价 40 元. 要使六月份购进的甲、乙两种商品共 80 件全部销售完的总利润不少于 600 元，那么该超市最多购进甲种商品多少件？

【答案】(1) 甲、乙两种商品的进价分别为每件 10 元、30 元

(2) 40 件

【分析】本题考查了分式方程和一元一次不等式的应用，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系和不等关系，列方程求解.

（1）设甲种商品每件的进价是 x 元，则乙种商品每件的进价为 $3x$元，根据甲乙两种商品共 80 件以及甲乙两种商品花的钱数，列方程求解；

（2）设六月份再次购进甲种商品 a 件，则购进乙种商品$(80 - a)$件，根据总利润不少于 600 元，列不等式求解.

【详解】（1）解：设甲种商品每件的进价是x元，则乙种商品每件的进价为 $3x$元.

依题意可得$\frac{400}{x} + \frac{1200}{3x} = 80$，

解得$x = 10$

经检验$x = 10$ 为原分式方程的解，

$\therefore 3x = 3 \times 10 = 30$

答：甲、乙两种商品的进价分别为每件 10 元、30 元；

（2）解：设六月份再次购进甲种商品a件，则购进乙种商品$(80 - a)$件，

依题意可得$(15 - 10)a + (40 - 30)(80 - a) \ge 600$

解得$a \le 40$，

$\therefore a$的最大值是 40

答：该超市六月份最多购进甲种商品 40 件

题型二十三 分式方程的其它实际问题

【典例分析】（24-25 八年级下·广东肇庆·期末）2025 年，在国家实行报废补贴、以旧换新利好政策的推动下，李明的爸爸准备换车，看中了两款价格相同的国产车，请帮李明父子解决以下问题：

燃油车 油箱容积：40 升 油价：7.5 元/升 续航里程：m 千米 每千米行驶费用： $\frac{40\times7.5}{m}$元	纯电动汽车 电池容量：80 千瓦时 电价：0.55 元/千瓦时 续航里程：m 千米 每千米行驶费用： _____元

(1)用含 m 的代数式表示纯电动汽车的每千米行驶费用；

(2)若纯电动汽车每千米行驶费用比燃油车少 0.64 元.

①分别求出这两款车的每千米行驶费用；

②若燃油车和纯电动汽车每年的其它费用分别为 4000 元和 7200 元，设一年内李明爸爸的行驶里程为 x 千米，燃油车和纯电动汽车所需的年费用分别为y_1和y_2元，请分别写出y_1和y_2关于 x 的函数表达式（年费用=年行驶费用+年其它费用），假如你是李明，你会给爸爸提出怎样的购车建议？

【答案】(1)$\frac{44}{m}$

(2)①燃油车每千米行驶费用为 0.75 元，纯电动汽车每千米行驶费用为 0.11 元；

②$y_1=0.75x+4000$，$y_2=0.11x+7200$，建议：若行驶里程小于 5000 千米，则买燃油车；

若行驶里程等于 5000 千米，则两种均可；

若行驶里程大于 5000 千米，则买纯电动汽车.

【分析】本题考查列代数式，分式方程的应用，一元一次不等式的应用.

（1）根据表中的信息，可以表示纯电动汽车的每千米行驶费用；

（2）①根据燃油车的每千米行驶费用比纯电动汽车多 0.64 元和表中的信息，可以列出相应的分式方程，然后求解即可，注意分式方程要检验；

②根据①中结论结合题意直接列出表达式，比较两表达式，即可提出建议.

【详解】（1）解：纯电动汽车的每千米行驶费用为：$\frac{80\times0.55}{m}=\frac{44}{m}$(元)，

故答案为：$\frac{44}{m}$元；

（2）①由题意得$\frac{40\times7.5}{m}-\frac{44}{m}=0.64$，

解得$m=400$，

经检验，$m=400$是原分式方程的解，

$\therefore\frac{40\times7.5}{400}=0.75$(元)，$\frac{44}{400}=0.11$(元)，

答：燃油车的每千米行驶费用为0.75元，纯电动汽车的每千米行驶费用为0.11元；

②由题意得：$y_1=0.75x+4000$；$y_2=0.11x+7200$.

当$y_1<y_2$，即$0.75x+4000<0.11x+7200$时，解得$x<5000$；

当$y_1=y_2$，即$0.75x+4000=0.11x+7200$时，解得$x=5000$；

当$y_1>y_2$，即$0.75x+4000>0.11x+7200$时，解得$x>5000$；

建议：若行驶里程小于5000千米，则买燃油车；

若行驶里程等于5000千米，则两种均可；

若行驶里程大于5000千米，则买纯电动汽车.

【变式训练】（24-25八年级下·山东潍坊·期末）某校计划组织八年级师生进行研学旅行，拟租用10辆车．数学兴趣小组就租车问题展开了调查研究，得到如下信息：大型客车载客量为50人，中型客车载客量为30人，一辆中型客车的租金比一辆大型客车少150元，用5000元租大型客车的数量和用3500元租中型客车的数量相同.

(1)一辆大型客车和一辆中型客车的租金分别为多少元？

(2)已知该校八年级师生共460人.

①该校至少需要租用多少辆大型客车？

②若租车费用的预算为4900元，学校有哪几种租车方案？哪种方案花费最低？

【答案】(1)一辆大型客车的租金为500元，一辆中型客车的租金为350元；

(2)①该校至少需要租用8辆大型客车；

②学校有2种租车方案：方案1：租用8辆大型客车，2辆中型客车；方案2：租用9辆大型客车，1辆中型客车；方案1花费最低

【分析】本题考查了分式方程的应用，一元一次不等式的应用.

（1）设一辆大型客车的租金为x元，则一辆中型客车的租金为$(x-150)$元，根据用5000元租大型客车的数量和用3500元租中型客车的数量相同，列出分式方程，解分式方程即可；

（2）①设租用y辆大型客车，则租用中型客车$(10-y)$辆，根据大型客车载客量为50人，中型客车载客量为30人，师生共460人，列出一元一次不等式，解不等式即可；

②设租用y辆大型客车，则租用中型客车$(10-y)$辆，根据租车费用的预算为4900元，运用（1）(1)的结

论，列出一元一次不等式，再结合①的结果，即可得出答案.

【详解】（1）解：设一辆大型客车的租金为x元，则一辆中型客车的租金为$(x-150)$元，

由题意得：$\frac{5000}{x}=\frac{3500}{x-150}$，

解得：$x=500$，

经检验，$x=500$是原方程的解，且符合题意，

$\therefore x-150=500-150=350$，

答：一辆大型客车的租金为500元，一辆中型客车的租金为350元；

（2）①设至少租用y辆大型客车，则租用中型客车$(10-y)$辆，

由题意得：$50y+30(10-y)\geq 460$，

解得：$y\geq 8$，

答：该校至少需要租用8辆大型客车；

②设租用y辆大型客车，则租用中型客车$(10-y)$辆，

由题意得：$500y+350(10-y)\leq 4900$，

解得：$y\leq 9\frac{1}{3}$，

由①得：$y\geq 8$，且y为正整数，

$\therefore y=8$或$y=9$，

当$y=8$时，$10-y=2$，费用为：$500\times 8+350\times 2=4700$；

当$y=9$时，$10-y=1$，费用为：$500\times 9+350\times 1=4850$；

∴学校有2种租车方案：

方案1：租用8辆大型客车，2辆中型客车；

方案2：租用9辆大型客车，1辆中型客车；

$\because 4700<4850$，

∴方案1花费最低.

能力提升训练

1.（24-25八年级下·江西赣州·月考）若关于x的一元一次不等式组$\begin{cases}2x-1\leq 3(x-2)\\ \frac{x-a}{2}>1\end{cases}$的解集为$x\geq 5$，且关于$y$的分式方程$\frac{y}{y-2}+\frac{2a}{2-y}=-2$有非负整数解，则符合条件的所有整数$a$的和为（　　）

A．-1　　B．-2　　C．-3　　D．-4

【答案】B

【分析】解不等式组并根据题意求得a的取值范围，解分式方程并根据题意求得a的取值范围，然后确定a的整数解，最后把它们相加并计算即可.

【详解】解：解第一个不等式得：$x \geq 5$，

解第二个不等式得：$x > a+2$，

∵原不等式组的解集为$x \geq 5$，

∴ $a+2<5$，

解得：$a<3$，

解分式方程：$\frac{y}{y-2}+\frac{2a}{2-y}=-2$

去分母得：$y-2a=-2y+4$，

解得：$y=\frac{2a+4}{3}$，

∵原分式方程有非负整数解，

∴ $\frac{2a+4}{3} \geq 0$ 且$\frac{2a+4}{3} \neq 2$ 且$\frac{2a+4}{3}$为整数，

则$a \geq -2$, 且$a \neq 1$, 且$\frac{2a+4}{3}$为整数，

又∵ $a<3$ 且a为整数，

∴ $a=-2$，

则符合条件的所有整数a的和为-2.

2.（2026·黑龙江齐齐哈尔·模拟预测）如果关于x的分式方程$\frac{m}{x-2}+\frac{2x-3}{2-x}=1$的解是正数，那么实数$m$的取值范围是（）

A. $m<1$ 且$m \neq -1$　　B. $m>-5$

C. $m>-5$ 且$m \neq 1$　　D. $m>-2$ 且$m \neq 0$

【答案】C

【分析】先解分式方程得到 x 关于 m 的表达式，再根据解为正数且分母不为零列不等式求解即可.

【详解】解：方程为$\frac{m}{x-2}+\frac{2x-3}{2-x}=1$，

变形得$\frac{m}{x-2}-\frac{2x-3}{x-2}=1$，

去分母得，$m-(2x-3)=x-2$，

解得：$x=\frac{m+5}{3}$，

∵分式方程的分母不能为 0，

$\therefore x \neq 2$，即$\frac{m+5}{3} \neq 2$，解得$m \neq 1$，

∵方程的解是正数，

$\therefore x > 0$，即$\frac{m+5}{3} > 0$，解得$m > -5$，

综上，实数 m的取值范围是$m > -5$ 且$m \neq 1$.

3.（25-26 八年级下·福建福州·期末）若关于x的分式方程$\frac{3x}{x-2} = \frac{m}{2-x} + 1$ 的解为正数，则m的取值范围是（　　）

A．$m > -2$　　B．$m < -2$

C．$m > -2$ 且$m \neq -6$　　D．$m < -2$ 且$m \neq -6$

【答案】D

【分析】本题考查了根据分式方程解的情况求值，解一元一次不等式.

先通过去分母求解分式方程，得到解的表达形式，再根据解为正数且分母不为零的条件，列不等式求参数范围.

【详解】解：$\frac{3x}{x-2} = \frac{m}{2-x} + 1$，

去分母，得 $3x = -m + (x - 2)$，

解得：$x = \frac{-m-2}{2}$；

∵分式方程$\frac{3x}{x-2} = \frac{m}{2-x} + 1$ 的解为正数，

$\therefore \frac{-m-2}{2} > 0$，

即$m < -2$，

在分式方程$\frac{3x}{x-2} = \frac{m}{2-x} + 1$ 中，分母$x - 2 \neq 0$，$2 - x \neq 0$，

即$x \neq 2$，

故$\frac{-m-2}{2} \neq 2$，得出$m \neq -6$，

综上，m的取值范围是$m < -2$ 且$m \neq -6$.

故选：D.

4.（2025·北京·模拟预测）方程$\frac{4}{3x-1} - \frac{3}{x} = 0$ 的解为_____.

【答案】

$x = \frac{3}{5}$

【分析】先通过去分母将分式方程转化为一元一次方程，求解后检验所得解是否使原方程分母不为 0.

【详解】解：$\frac{4}{3x-1}-\frac{3}{x}=0$

两边同乘最简公分母$x(3x-1)$，得 $4x-3(3x-1)=0$，

去括号，得 $4x-9x+3=0$，

合并同类项，得$-5x+3=0$，

移项，得$-5x=-3$，

系数化为 1，得$x=\frac{3}{5}$，

检验：当$x=\frac{3}{5}$时，$x(3x-1)=\frac{3}{5}\times(3\times\frac{3}{5}-1)=\frac{12}{25}\neq 0$，即原方程分母不为 0，

故$x=\frac{3}{5}$是原分式方程的解．

5．（25-26 八年级下·上海奉贤·期末）若$\frac{x^2-1}{x}=2$，则$x^2+\frac{1}{x^2}$的值是_____．

【答案】6

【分析】先将已知等式化简得到$x-\frac{1}{x}=2$，再利用完全平方公式对等式两边平方，整理后即可求出所求式子的值．

【详解】解：$\because\frac{x^2-1}{x}=2$

$\therefore\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}=2$，

将等式两边同时平方，得

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=2^2$

根据完全平方公式展开左边，得

$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$，

整理得

$x^2+\frac{1}{x^2}-2=4$

移项得

$x^2+\frac{1}{x^2}=6$．

6．（25-26 八年级下·山东德州·期末）化简$\left(\frac{3}{x+1}+\frac{x+3}{x^2-1}\right)\div\frac{x}{x-1}$的结果是_____．

【答案】$\frac{4}{x+1}$/$\frac{4}{1+x}$

【分析】先根据分式的加减计算括号内的，同时将除法转化为乘法，再根据分式的性质化简，即可求解．

【详解】解：原式$=\frac{3(x-1)+x+3}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x}$

$=\frac{4x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x}$

$=\frac{4}{x+1}$.

7.（25-26 八年级下·全国·课后作业）已知$a^2-a=10$，则$\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-2a+1}\div\frac{1}{a^2-1}$的值为_____.

【答案】8

【分析】先对分式的分子分母进行因式分解，再根据分式乘除的运算法则运算即可求解.

【详解】解：原式$=\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)^2}\div\frac{1}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{a-2}{a-1}\cdot(a+1)(a-1)$

$=(a-2)(a+1)$

$=a^2-a-2$，

$\because a^2-a=10$，

$\therefore$原式$=10-2=8$.

8.（25-26 八年级下·山东济南·月考）解方程：

(1)$\frac{x}{x-1}+\frac{2}{1-x}=2$；

(2)$\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}=\frac{12}{x^2-9}$.

【答案】(1)$x=0$

(2)原方程无解

【分析】（1）对于分式方程$\frac{x}{x-1}+\frac{2}{1-x}=2$，解题思路是先将分式方程变形，确定最简公分母为$x-1$，两边同乘最简公分母化为整式方程，求解整式方程后进行验根，确定原方程的解.

（2）对于分式方程$\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}=\frac{12}{x^2-9}$，解题思路是先对分母因式分解，确定最简公分母为$(x+3)(x-3)$，两边同乘最简公分母化为整式方程，求解整式方程后验根，判断原方程解的情况.

【详解】（1）解：$\frac{x}{x-1}+\frac{2}{1-x}=2$，

$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x-1}=2$，

方程两边同乘$(x-1)$，得

$x-2=2(x-1)$，

$x-2=2x-2$，

$x-2x=-2+2$，

$-x=0$，

$x=0$，

检验：当$x=0$时，$x-1=-1\neq 0$，

故原分式方程的解为$x=0$.

（2）解：$\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}=\frac{12}{x^2-9}$，

方程两边同乘$(x+3)(x-3)$，得

$(x-3)+2(x+3)=12$，

$x-3+2x+6=12$，

$3x+3=12$，

$3x=9$，

$x=3$，

检验：当$x=3$时，$(x+3)(x-3)=0$，

因此$x=3$不是原分式方程的解.

故原分式方程无解.

9.（24-25八年级下·吉林长春·期中）解方程：$\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$.

【答案】无解

【详解】解：$\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$，

$x+2=4$，

$x=2$.

检验，当$x=2$，最简公分母$(x+2)(x-2)=0$，

$\therefore x=2$是原方程的增根.

$\therefore$原方程无解.

10.（25-26八年级下·重庆·月考）“五·一”小长假期间，某旅行社组织了三峡研学活动，共有80名学生报名参加．已知前往研学目的地有大巴车和游船两种出行方式，大巴车的速度是游船的2.5倍，在同时出发的前提下，乘坐大巴车将比乘坐游船提前24分钟到达，两种出行方式的路程及票价如下表所示．

	游船	大巴车
路程	36km	60km

票价	一等票 64 元/人	88 元/人
	二等票 40 元/人	

(1) 求游船和大巴车的速度（单位：km/h）；

(2) 该旅行社最终选择乘坐游船出行，若要使得所有学生的票价总和不超过 3980 元，则最多购买多少张一等票？

【答案】(1) 游船的速度为 30km/h，大巴车的速度为 75km/h

(2) 最多购买 32 张一等票

【分析】（1）设游船的速度为$v$km/h，则大巴车的速度为 2.5$v$km/h，然后根据等量关系“乘坐大巴车将比乘坐游船提前 24 分钟到达”列分式方程求解即可；

（2）设购买 a 张一等票，则可购买$(80-a)$张二等票，再根据不等关系“所有学生的票价总和不超过 3980 元”列一元一次不等式求解即可.

【详解】（1）解：设游船的速度为$v$km/h，则大巴车的速度为 2.5$v$km/h

根据题意，$\frac{36}{v}-\frac{60}{2.5v}=\frac{24}{60}$，解得：$v=30$，

经检验，$v=30$ 是原分式方程的解且符合题意，

$\therefore v=30$，$2.5v=2.5\times30=75$.

答：游船的速度为 30km/h，大巴车的速度为 75km/h.

（2）解：设购买 a 张一等票，则可购买$(80-a)$张二等票，

由题意可得：$64a+40(80-a)\le3980$，解得：$a\le32.5$.

$\because a$为整数

$\therefore a$的最大值为 32.

答：最多购买 32 张一等票.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872