分式提优

题型一 分式值为零的条件

【典例分析】已知分式$\frac{x^2-4}{3x+6}$的值为0，那么x的值为（　　）

A．$x=-2$且$x=2$　　B．$x=-2$或$x=2$　　C．$x=-2$　　D．$x=2$

【变式训练】若分式$\frac{x-2025}{x+2024}$的值为0，则x的取值为_____.

题型二 分式的求值

【典例分析】若$\frac{y}{2x-3y}=\frac{1}{5}$，那么$\frac{x}{y}$的值是（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．4

【变式训练】已知：$\frac{xy}{x+y}=-1,\frac{yz}{y+z}=\frac{4}{3},\frac{zx}{z+x}=-\frac{4}{3}$，则$\frac{xyz}{xy+yz+zx}$的值为____.

题型三 求分式值为正（负）数时未知数的取值范围

【典例分析】如果分式$\frac{3x^2}{4-2x}$的值为正数，则x的取值范围是__.

【变式训练】已知关于x的不等式$ax+b>0$的解集是$x<1$，则关于x的不等式$\frac{bx-a}{x-5}>0$的解集是（　　）

A．$-1<x<5$　　B．$x<-1$或$x>5$　　C．$x<1$或$x>5$　　D．$x>5$

题型四 求使分式值为整数时未知数的整数值

【典例分析】若一个四位数满足百位数字和十位数字相同，千位数字与个位数字之和为7，这样的数称为“两同和七数”．已知M为一个“两同和七数”，且M可以被9整除．则满足条件M的最大值是_____．将M的各个数位数字之和记为$P(M)$，M的个位数字与千位数字的差记为$Q(M)$，并令$G(M)=\frac{P(M)}{Q(M)}$，当$G(M)$是整数时，则满足条件M的最小值是_____.

【变式训练】若$\frac{x^2-5x+4}{x-3}$的值为整数，则符合要求的整数x的个数为（　　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

题型五 利用分式的基本性质判断分式值的变化

【典例分析】将分式$\frac{4m-3n}{5mn}$中的m、n同时扩大为原来的 3 倍，分式的值将（　　）

A．扩大 3 倍　　B．不变　　C．缩小为原来的$\frac{1}{3}$　　D．缩小为原来的$\frac{1}{9}$

【变式训练】将分式$\frac{xy}{2x+y}$中的 x，y 的值都变为原来的 2 倍，则该分式的值（　　）

A．变为原来的 2 倍　　B．变为原来的 4 倍　　C．不变　　D．变为原来的一半

题型六 约分

【典例分析】若$\frac{4-☆}{x-2}$表示的是一个最简分式，则☆可以是（）

A．$2x$　　B．x　　C．$4x-x^2$　　D．x^2

【变式训练】（运算能力）定义：若一个分式约分后是一个整式，则称这个分式为“巧分式”，约分后的整式称为这个分式的“巧整式”．例如：$\frac{4x^2-8x}{x-2}=\frac{4x(x-2)}{x-2}=4x$，则称分式$\frac{4x^2-8x}{x-2}$是“巧分式”，$4x$为它的“巧整式”．根据上述定义，解决下列问题：

(1)下列分式中是“巧分式”的有_____（填序号）；

①$\frac{(x-1)(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$；②$\frac{2x+5}{x+3}$；③$\frac{x^2-y^2}{x+y}$．

(2)若分式$\frac{-2x^3+2x}{A}$的“巧整式”为$1-x$，请判断$\frac{2x^3+4x^2+2x}{A}$是否是“巧分式”，并说明理由．

题型七 最简分式

【典例分析】若$\frac{1-☆}{x-1}$表示的是一个最简分式，则☆可以是（　　）

A．$2x$　　B．x　　C．x^2　　D．1

【变式训练】下列各式中，最简分式有 _____个.

①$\frac{1}{1-x}$；②$\frac{4y+2}{2x}$；③$\frac{x}{3\pi}$；④$\frac{10+4a}{5+2a}$；⑤ $\frac{4y^2+10y}{2y+5}$

题型八 最简公分母

【典例分析】分式$\frac{y}{2x^7}$与$\frac{1}{5x^4}$的最简公分母是（ ）

A．$10x^7$ B．$7x^7$ C．$10x^{11}$ D．$7x^{11}$

【变式训练】在解分式方程：$\frac{x-1}{x^2-4}+2=\frac{1}{x^2+2x}$的过程中，去分母时，需方程两边都乘以最简公分母

_____.

题型九 通分

【典例分析】小强昨天做了一道分式题：“对下列分式通分：$\frac{x-3}{x^3-x}$，$\frac{3}{x-x^2}$”．他的解答过程如下．请你指出他的错误，并改正．

$\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{x-3}{x(x^2-1)}=\frac{x-3}{x(x+1)(x-1)}=x-3$，…①

$\frac{3}{x-x^2}=\frac{3}{x(1-x)}=\frac{3(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=3(x+1)$．…②

【变式训练】分式$\frac{b}{3a}$与$-\frac{ab}{2c}$的最简公分母是_____，通分后的结果是_____、_____.

题型十 分式加减混合运算

【典例分析】（1）观察下列各式：$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，

$\frac{1}{30}=\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$，……，由此可推断$\frac{1}{72}=$_____=_____.

（2）请猜想能表示（1）的特点的一般规律，用含 m 的等式表示出来为_____=_____（m 表示正整数）；

（3）请参考（2）中的规律计算：$\frac{1}{(x-3)(x-2)}-\frac{2}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}$.

【变式训练】人们把$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$这个数叫做黄金分割数，著名数学家华罗庚的优选法中的 0.618 就应用了黄金分割数．设$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，记$S_1=\frac{1}{1+a^1}+\frac{1}{1+b^1}$，$S_2=\frac{2}{1+a^2}+\frac{2}{1+b^2}$，……，$S_{10}=\frac{10}{1+a^{10}}+\frac{10}{1+b^{10}}$，则$S_1+S_2+\ldots\ldots+S_{10}$的值为_____.

题型十一 分式加减的实际应用

【典例分析】图 1 中阴影部分的面积为S_1（边长为 a 的大正方形中有一个边长为 b 的小正方形）．图 2 中阴影部分的面积为S_2（边长为 a 的大正方形中有一个长为 a、宽为 b 的小长方形），$a>b>0$，设$k=\frac{S_1}{S_2}$，则 k 的取值范围为_____.

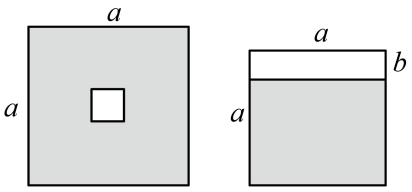


图1　　图2

【变式训练】甲、乙两人前后两次同时在同一家超市购买大米，前后两次购买大米的价格每千克分别为 m 元和 n 元（m，n 为不相等的正数）．若甲每次购买 p 千克大米，乙每次花 p 元钱购买大米（p 为正数）．则甲、乙两种购买方式平均价格低的是（　　）

A．甲　　B．乙　　C．甲、乙一样　　D．不确定

题型十二 含乘方的分式乘除混合运算

【典例分析】当$a=2$，$b=-3$时，$(ab)^3\times\left(-\frac{b}{a^2}\right)^3\div\left(-\frac{b}{a}\right)^4=$____.

【变式训练】（1）计算：$\left(-\frac{2a}{b^2}\right)^2\cdot\left(\frac{2b}{a}\right)^2\div\left(-\frac{2b^2}{a}\right)$；

（2）已知$x+2y=4$，$x-2y=-1$，先化简再求值：$\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\div\left(\frac{x+2y}{x+y}\right)^2$；

（3）已知$x-y=\frac{1}{2}$，$xy=-\frac{3}{4}$，先分解因式，再求值：$x^3y-2x^2y^2+xy^3$.

题型十三 分式加减乘除混合运算

【典例分析】化简：$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)\div\frac{x-1}{x-2}$

【变式训练】先化简，再求值：$\left(\frac{3x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{x}{x^2-4}$，其中$x=1$

题型十四 分式化简求值

【典例分析】化简$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}\div\frac{a-3}{a^2+3a}-\frac{a-a^2}{a^2-1}$，然后在 0，1，2，3 中选一个你认为合适的$a$值，代入求值.

【变式训练】先化简代数式：$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x}{x^2-1}$，再从$-1,0,1,-2$四个数中选择一个恰当的作为$x$的值，代入求出代数式的值.

题型十五 分式最值

【典例分析】分式$\frac{1}{x^2+2x+5}$的最大值是（　　）

A．5　　B．6　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{5}$

【变式训练】请仔细阅读下面材料，然后解决问题：

在分式中，对于只含有一个字母的分式，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”，例如：$\frac{x}{x+1}$，$\frac{x^2}{x+1}$；当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”，例如：$\frac{1}{x+1}$，$\frac{x}{x^2+1}$．我们知道，假分数可化为带分数，例$\frac{13}{4}=\frac{12+1}{4}=3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$，类似的，假分式也可以化为“带分式”（整式与真分式和的形式），例如：$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$．

(1)将分式$\frac{3x}{x-1}$化为带分式；

(2)当 x 取哪些整数值时，分式$\frac{3x}{x-1}$的值也是整数？

(3)当$x=$_____时，分式$\frac{3x^2+5}{x^2+1}$的最大值是_____．

题型十六 解分式方程（化为一元一次)

【典例分析】解不等式组、解方程：

(1)$\begin{cases}4x>3(x-1)\\ x<\frac{2x+1}{3}\end{cases}$

(2)$\frac{2x}{x-3}=1+\frac{3}{3-x}$

【变式训练】解方程：$\frac{3-2x}{x-2}=\frac{x}{2-x}-2$.

题型十七 根据分式方程解的情况求值

【典例分析】若关于 x 的分式方程$\frac{mx-1}{x-3}+\frac{5}{3-x}=1$无解，则 m 的值是（　　）

A．1 或 2　　B．2 或 3　　C．1 或 3　　D．3 或 0

【变式训练】已知关于x的分式方程$\frac{x}{x-3}=2-\frac{m}{3-x}$无解，求$m$的值.

题型十八 分式方程无解问题

【典例分析】若关于x的分式方程$\frac{2}{x-4}=3-\frac{m}{x-4}$无解，则$m$的值是_____.

【变式训练】如果关于x的分式方程$\frac{mx}{1-x}+\frac{x}{x-1}=2$无解，那么实数$m$的值是（　　）

A．$m\neq 1$且$m\neq -1$　　B．$m=-1$　　C．$m=1$或$m=-1$　　D．$m\neq 1$

题型十九 分式方程的行程问题

【典例分析】甲和乙计划前往距学校 4km 的图书馆，甲先出发步行前往，乙在 30 分钟后骑自行车前往，最终甲和乙同时抵达图书馆．若将甲和乙的运动过程看作匀速运动，已知乙的速度比甲的速度快 5km/h，求甲的速度．设甲的速度为$x$km/h，请根据题意列出方程_____.

【变式训练】我国推进科技自立自强，牢筑钢铁长城．近期，我国自主研制的核动力航母“福建舰”正式下水试航．现“福建舰”在距离 A 港正东方向 50 海里的海面以试航速度航行，此时一架监测直升机从 A 港出发，以比“福建舰”试航的速度多 50 海里/时的速度沿正东方向追赶“福建舰”，当“福建舰”试航了 25 海里后，监测直升机刚好追上“福建舰”，求“福建舰”的试航速度．

题型二十 分式方程的工程问题

【典例分析】某学校计划利用暑假时间（共 58 天）对全校教室墙壁进行粉刷，现有甲、乙两个工程队有意承包这项工程，调查发现：乙队单独完成工程的时间是甲队的 1.5 倍，甲、乙两队合作完成工程需要 24 天，甲队每天的工作费用为 1500 元，乙队每天的工作费用为 950 元．

(1)甲、乙两队单独完成这项工程各需多少天？

(2)现有三种方案可选：①甲队单独完成工程，②乙队单独完成工程，③甲、乙两队合作完成工程．请你选择其中一种方案，既能在暑假时间完工，又能使工程费用最少，并计算出最少工程费用．

【变式训练】皮影戏是一种在灯光照射下用隔亮布进行表演的民间戏剧形式．某玩具厂准备生产皮影戏玩具 8000 套，为尽快完成任务，实际每天生产皮影戏玩具的数量是原计划的 1.6 倍，结果提前 6 天完成任务．设该玩具厂原计划每天生产这种皮影戏玩具 x 套，根据题意可列方程为（　　）

A．$\frac{8000}{1.6x}-\frac{8000}{x}=6$　　B．$\frac{8000}{x}-\frac{8000}{1.6x}=6$

C．$\frac{8000}{x}+\frac{8000}{1.6x}=6$　　D．$\frac{8000\times1.6}{x}-\frac{8000}{x}=6$

题型二十一　分式方程的经济问题

【典例分析】某中学购买 A、B 两种书架，其中 A 种书架的单价比 B 种书架的单价多 20 元，用 600 元购买 A 种书架的个数与用 480 元购买 B 种书架的个数相同．

(1)求 A、B 两种书架的单价各是多少元？

(2)学校准备购买 A、B 书架共 15 个，且购买的总费用不超过 1400 元，求最多可以购买多少个 A 种书架？

【变式训练】“给垃圾一个分类的归宿，还我们一个清洁的世界”，柘城县某小区积极响应号召，准备购买两种类型的分类垃圾桶，在市场上了解到A种类型的垃圾桶比B种类型的垃圾桶贵 20 元，用 600 元购买A种类型的垃圾桶数量和用 500 元购买B种类型的垃圾桶数量相同．求购买一个A种类型的垃圾桶和购买一个B种类型的垃圾桶各需要多少元？

题型二十二 分式方程和差倍分问题

【典例分析】某公园为了美化环境，预备购进A,B两款花卉美化公园，已知A款花卉的单价是B款花卉的1.4倍，若花费14000元购买A款花卉和7000元购买B款花卉，可购买A款花卉比B款花卉多300株.

(1)求A,B两款花卉的单价是分别多少元？

(2)该公园有12480元预备款，在不超出预备款的前提下，准备购进A,B两款花卉共1000株，其中B款花卉数量不超过400株，求该公园购买花卉的最低总费用为多少？

【变式训练】某超市销售甲、乙两种商品，五月份该超市同时购进甲、乙两种商品共80件，购进甲种商品用去400元，购进乙种商品用去1200元.

(1)已知每件乙种商品的进价是每件甲种商品的进价的3倍，求甲、乙两种商品每件的进价

(2)由于甲、乙这两种商品受到市民欢迎，六月份超市决定再次购进甲、乙两种商品共80件，且保持（1）的进价不变，已知甲种商品每件的售价15元，乙种商品每件的售价40元．要使六月份购进的甲、乙两种商品共80件全部销售完的总利润不少于600元，那么该超市最多购进甲种商品多少件？

题型二十三 分式方程的其它实际问题

【典例分析】2025 年，在国家实行报废补贴、以旧换新利好政策的推动下，李明的爸爸准备换车，看中了两款价格相同的国产车，请帮李明父子解决以下问题：

燃油车 油箱容积：40 升 油价：7.5 元/升 续航里程：m 千米 每千米行驶费用： $\frac{40\times7.5}{m}$元	纯电动汽车 电池容量：80 千瓦时 电价：0.55 元/千瓦时 续航里程：m 千米 每千米行驶费用： _____元

(1)用含 m 的代数式表示纯电动汽车的每千米行驶费用；

(2)若纯电动汽车每千米行驶费用比燃油车少 0.64 元.

①分别求出这两款车的每千米行驶费用；

②若燃油车和纯电动汽车每年的其它费用分别为 4000 元和 7200 元，设一年内李明爸爸的行驶里程为 x 千米，燃油车和纯电动汽车所需的年费用分别为y_1和y_2元，请分别写出y_1和y_2关于 x 的函数表达式（年费用=年行驶费用+年其它费用），假如你是李明，你会给爸爸提出怎样的购车建议？

【变式训练】某校计划组织八年级师生进行研学旅行，拟租用 10 辆车．数学兴趣小组就租车问题展开了调查研究，得到如下信息：大型客车载客量为 50 人，中型客车载客量为 30 人，一辆中型客车的租金比一辆大型客车少 150 元，用 5000 元租大型客车的数量和用 3500 元租中型客车的数量相同．

(1) 一辆大型客车和一辆中型客车的租金分别为多少元？

(2) 已知该校八年级师生共 460 人．

①该校至少需要租用多少辆大型客车？

②若租车费用的预算为 4900 元，学校有哪几种租车方案？哪种方案花费最低？

能力提升训练

1．若关于x的一元一次不等式组$\begin{cases}2x-1\leq 3(x-2)\\ \frac{x-a}{2}>1\end{cases}$的解集为$x\geq 5$，且关于$y$的分式方程$\frac{y}{y-2}+\frac{2a}{2-y}=-2$有非负整数解，则符合条件的所有整数$a$的和为（　　）

A．-1　　B．-2　　C．-3　　D．-4

2．如果关于x的分式方程$\frac{m}{x-2}+\frac{2x-3}{2-x}=1$的解是正数，那么实数$m$的取值范围是（）

A．$m<1$且$m\neq -1$　　B．$m>-5$

C．$m>-5$且$m\neq 1$　　D．$m>-2$且$m\neq 0$

3．若关于x的分式方程$\frac{3x}{x-2}=\frac{m}{2-x}+1$的解为正数，则$m$的取值范围是（　　）

A．$m>-2$　　B．$m<-2$

C．$m>-2$且$m\neq -6$　　D．$m<-2$且$m\neq -6$

4．方程$\frac{4}{3x-1}-\frac{3}{x}=0$的解为_____.

5．若$\frac{x^2-1}{x}=2$，则$x^2+\frac{1}{x^2}$的值是_____.

6．化简$\left(\frac{3}{x+1}+\frac{x+3}{x^2-1}\right)\div\frac{x}{x-1}$的结果是_____.

7．已知$a^2-a=10$，则$\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-2a+1}\div\frac{1}{a^2-1}$的值为_____.

8．解方程：

(1)$\frac{x}{x-1}+\frac{2}{1-x}=2$；　　(2)$\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}=\frac{12}{x^2-9}$.

9．解方程：$\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$.

10.“五·一”小长假期间，某旅行社组织了三峡研学活动，共有 80 名学生报名参加．已知前往研学目的地有大巴车和游船两种出行方式，大巴车的速度是游船的 2.5 倍，在同时出发的前提下，乘坐大巴车将比乘坐游船提前 24 分钟到达，两种出行方式的路程及票价如下表所示．

<table>
<tr><td></td><td>游船</td><td>大巴车</td></tr>
<tr><td>路程</td><td>36km</td><td>60km</td></tr>
<tr><td rowspan="2">票价</td><td>一等票 64 元/人</td><td rowspan="2">88 元/人</td></tr>
<tr><td>二等票 40 元/人</td></tr>
</table>

(1)求游船和大巴车的速度（单位：km/h）；

(2)该旅行社最终选择乘坐游船出行，若要使得所有学生的票价总和不超过 3980 元，则最多购买多少张一等票？

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872