因式分解提优



题型 01.提公因式与公式法综合

1．分解因式：$x^2+xy-6y^2+x+13y-6=$____.

【答案】$(x+3y-2)(x-2y+3)$

【分析】先用十字相乘法对$6y^2-13y+6$进行因式分解，用提公因式法对$xy+x$因式分解，再将$x(y+1)$分解为$[(3y-2)-(2y-3)]x$，最后将$x^2+[(3y-2)-(2y-3)]x-(3y-2)(2y-3)$整体利用十字相乘法因式分解，即可求解.

【详解】解：$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$

$=x^2+x(y+1)-(6y^2-13y+6)$,

$=x^2+x(y+1)-(3y-2)(2y-3)$,

$=x^2+[(3y-2)-(2y-3)]x-(3y-2)(2y-3)$,

$=(x+3y-2)(x-2y+3)$.

【点睛】掌握因式分解十字相乘法对于x^2+px+q型的式子如果q能分解为两个数a，b的积，且有$a+b=p$时(即a与b和是一次项的系数)，那么$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$,这种分解因式的方法叫做十字相乘法.

2．若多项式$6m^2-6n+4mn-9m$可因式分解成$(am+bn)(cm+d)$，其中a，b，c，d均为整数，则$|a+b|\times|c+d|$的值是（　）

A．5　　B．6　　C．25　　D．30

【答案】A

【分析】本题利用分组分解法对多项式进行因式分解，得到符合形式的因式后，代入计算所求式子的值即可.

【详解】先整理原多项式，再用分组分解法因式分解：整理原式得：

$6m^2-6n+4mn-9m=6m^2+4mn-(9m+6n)=2m(3m+2n)-3(3m+2n)=(3m+2n)(2m-3)$,

$(3m+2n)(2m-3)=(am+bn)(cm+d)$,

得 $a=3,b=2,c=2,d=-3$，乘以 -1 的情况不改变绝对值结果，

计算得：$|a+b|=|3+2|=5$，$|c+d|=|2-3|=1$，

$|a+b|\times|c+d|=5\times1=5$

3．因式分解：$(x+1)^4+(x+3)^4-272$．

【答案】

$2(x^2+4x+19)(x-1)(x+5)$

【分析】利用换元法简化原式，设 $y=x+2$，再依次通过合并同类项、提取公因式、十字相乘法、平方差公式逐步分解，最后回代得到最终结果．

【详解】解：设 $y=x+2$，则 $x+1=y-1$，$x+3=y+1$，

$\therefore$ 原式 $=(y-1)^4+(y+1)^4-272$

$=\left[(y-1)^2\right]^2+\left[(y+1)^2\right]^2-272$

$=(y^2-2y+1)(y^2-2y+1)+(y^2+2y+1)(y^2+2y+1)-272$

$=(y^4-2y^3+y^2-2y^3+4y^2-2y+y^2-2y+1)+(y^4+2y^3+y^2+2y^3+4y^2+2y+y^2+2y+1)-272$

$=(y^4-4y^3+6y^2-4y+1)+(y^4+4y^3+6y^2+4y+1)-272$

$=2y^4+12y^2-270$

$=2(y^4+6y^2-135)$

$=2(y^2+15)(y^2-9)$

$=2(y^2+15)(y-3)(y+3)$，

再将 $y=x+2$ 代入得，

原式 $=2\left[(x+2)^2+15\right](x+2-3)(x+2+3)$

$=2(x^2+4x+4+15)(x-1)(x+5)$

$=2(x^2+4x+19)(x-1)(x+5)$．



题型 02.多步连续彻底因式分解

4．因式分解：$(y^2-8)^2-64=$_____．

【答案】$y^2(y+4)(y-4)$

【分析】本题考查运用公式法因式分解，熟练掌握平方差公式是解题关键.

原式符合平方差的结构形式，先利用平方差公式分解，再对可分解的多项式继续分解即可.

【详解】解：$(y^2-8)^2-64$

$=(y^2-8)^2-8^2$

$=(y^2-8+8)(y^2-8-8)$

$=y^2(y^2-16)$

$=y^2(y+4)(y-4)$

5．分解因式：$3x^4-48=$_____.

【答案】$3(x^2+4)(x+2)(x-2)$

【分析】先提取公因式，再利用平方差公式两次分解因式即可得到结果.

【详解】$3x^4-48$

$=3(x^4-16)$

$=3\left[(x^2)^2-4^2\right]$

$=3(x^2+4)(x^2-4)$

$=3(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

6．分解因式：$-m^2n+6mn-9n=$_____.

【答案】$-n(m-3)^2$

【分析】先提取公因式$-n$，再利用完全平方公式分解即可.

【详解】解：原式$=-n(m^2-6m+9)$

$=-n(m-3)^2$.



题型 03.完全平方式参数求解

7．已知$M=2^n+2^8+1$，若M可以转换成某数平方的形式，则n的取值为_____.

【答案】5，14，-10

【分析】因为M是平方数，根据完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，分情况讨论哪一项是中间项$2ab$.

【详解】解：完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，分情况讨论哪一项是中间项$2ab$；

情况 1：2^n是中间项$2ab$，此时两个平方项为$2^8=(2^4)^2$和$1=1^2$，

∴$2ab=2\times2^4\times1=2^5$，即$2^n=2^5$，得$n=5$.

验证：$M=2^5+2^8+1=32+256+1=289=17^2$，符合要求.

情况 2：2^8是中间项$2ab$， 此时两个平方项为2^n和$1=1^2$，

∴ $2ab=2\times2^{\frac{n}{2}}\times1=2^{\frac{n}{2}+1}=2^8$，即$\frac{n}{2}+1=8$，解得$n=14$.

验证：$M=2^{14}+2^8+1=\left(2^7\right)^2+2\times2^7\times1+1^2=\left(2^7+1\right)^2$，符合要求.

情况 3：1是中间项$2ab$，此时两个平方项为2^n和$2^8=(2^4)^2$，

∴ $2ab=2\times2^{\frac{n}{2}}\times2^4=2^{\frac{n}{2}+5}=2^0$，即$\frac{n}{2}+5=0$，解得$n=-10$，

验证：$M=2^{-10}+2^8+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(2^4\right)^2+1=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^2+\left(2^4\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times2^4=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5+2^4\right]^2$，符合要求.

综上，n的取值为5或14或-10.

8．若$a^2+(2t-1)ab+4b^2$是完全平方式，则实数t的值为（ ）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{5}{2}$或$-\frac{3}{2}$　　C．5　　D．4

【答案】B

【分析】本题考查了完全平方公式的应用知识点，掌握完全平方公式的结构特征是解题的关键.

本题根据完全平方公式$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$，分析多项式的结构，得出“中间项系数需满足与首项、末项的关系”的结论，进而通过解方程求出t的值，即可解决根据完全平方式的结构特征求字母参数的问题.

【详解】解：∵$a^2+(2t-1)ab+4b^2$是完全平方式，

∴$a^2+(2t-1)ab+4b^2=(a\pm2b)^2$，

∵$(a\pm2b)^2=a^2\pm4ab+4b^2$，

∴$(2t-1)ab=\pm4ab$，

即：$2t-1=\pm4$，

当$2t-1=4$时，$t=\frac{5}{2}$；

当$2t-1=-4$时，$t=-\frac{3}{2}$，

综上：$t=\frac{5}{2}$或$t=-\frac{3}{2}$.

故选 ：B.

9．若多项式x^2+mx+4能用完全平方公式分解因式，则整数m=_____.

【答案】±4

【分析】本题考查了完全平方公式的应用，解题的关键是熟悉完全平方公式的结构特征，即$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$，并据此建立关于m的等式求解.

根据完全平方公式的结构，将多项式x^2+mx+4与$a^2\pm2ab+b^2$对应，确定$a=x$，$b=2$，从而得到$mx=\pm2\times x\times2$，进而求出整数m的值.

【详解】解：∵ 多项式x^2+mx+4能用完全平方公式分解因式，

$\therefore x^2+mx+4=(x\pm2)^2$.

$\because(x\pm2)^2=x^2\pm4x+4$，

$\therefore mx=\pm4x$.

$\therefore m=\pm4$.

故答案为：±4.



题型 04.平方差公式单独变形分解

10．因式分解：$x^2-9y^2=$_____

【答案】$(x+3y)(x-3y)$

【详解】解：$x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y)$.

11．分解因式：$x^2-\frac{4}{9}=$_____.

【答案】$\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

【分析】利用平方差公式分解因式即可.

【详解】解：$x^2-\frac{4}{9}=\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

12．如果一个正整数能表示为两个正整数的平方差，那么这个正整数就称为“智慧数”，例如：$5=3^2-2^2$，5 就是一个“智慧数”．下列各数不是“智慧数”的是（ ）

A．15　　B．16　　C．17　　D．18

【答案】D

【分析】根据“智慧数”的定义，若正整数n是智慧数，则存在正整数$a>b$，使得$n=a^2-b^2$．利用平方差公式分解得 $n=(a+b)(a-b)$，因此可以通过验证每个选项能否写成两个正整数的平方差来判断．

【详解】解：A、$15=4^2-1^2=16-1$，符合智慧数定义，不符合题意；

B、$16=5^2-3^2=25-9$，符合智慧数定义，不符合题意；

C、$17=9^2-8^2=81-64$，符合智慧数定义，不符合题意；

D、假设$18=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，其中a,b为正整数，则$a+b$与$a-b$的奇偶性必须相同，18 的正因数对有$(1,18),(2,9),(3,6)$，这三对数均为一奇一偶，不满足同奇同偶的要求，故 18 不是智慧数，符合题意．

故选：D．

【点睛】本题考查了平方差公式的应用与正整数的因数分解，解题关键是利用平方差公式将“智慧数”转化为两个因数的乘积，通过分析因数的奇偶性和整数解来判断是否为智慧数．



题型 05.平方差完全平方公式混合分解

13．若a，b，c是一组勾股数，且$a=2025^2+2026^2$，$b=4050\times2026$，$a>c$，则$c=$_____．

【答案】4051

【分析】本题考查勾股数的应用，勾股定理，平方差公式，完全平方公式，掌握知识点是解题的关键．

先推导出当a，b，c是一组勾股数时，a为直角三角形的斜边，再根据勾股定理求解即可．

【详解】解：由题意，得

$a=2025^2+2026^2$，$b=4050\times2026=2\times2025\times2026$，

$\because a-b=(2025^2+2026^2)-(2\times2025\times2026)=(2025-2026)^2=1>0$，

$\therefore a>b$，

$\because a>c$，

$\therefore$当a，b，c是一组勾股数时，a为直角三角形的斜边，

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}$

$=\sqrt{(a+b)(a-b)}$

$=\sqrt{\left[(2025^2+2026^2)+(2\times2025\times2026)\right]\times1}$

$=\sqrt{(2025+2026)^2}=4051$

故答案为：4051．

14．因式分解：$16a^4-8a^2b^2+b^4=$_____.

【答案】$(2a-b)^2(2a+b)^2$

【分析】先运用完全平方公式，再运用平方差公式分解因式即可.

【详解】解：$16a^4-8a^2b^2+b^4=(4a^2)^2-2\times(4a^2)\times b^2+(b^2)^2$

$=(4a^2-b^2)^2=[(2a)^2-b^2]^2$

$=[(2a+b)(2a-b)]^2$

$=(2a-b)^2(2a+b)^2$.

15．因式分解：$a^4-27a^2b^2+b^4$.

【答案】

$(a^2-b^2+5ab)(a^2-b^2-5ab)$

【分析】使用分组分解法进行因式分解，先将原式拆项凑完全平方，再利用平方差公式进行因式分解.

【详解】解：原式$=a^4-2a^2b^2+b^4-25a^2b^2$

$=(a^2-b^2)^2-(5ab)^2$

$=(a^2-b^2+5ab)(a^2-b^2-5ab)$.



题型 06.基础四项分组因式分解

16．因式分解：$x^3-3x^2+(a+2)x-2a$.

【答案】

$(x-2)(x^2-x+a)$

【分析】使用分组分解法求解，先将原式拆分重组，然后用十字相乘法和提公因式法分别分解后，再提取整体公因式即可得到结果.

【详解】解：原式$=x^3-3x^2+ax+2x-2a$

$=(x^3-3x^2+2x)+(ax-2a)$

$=x(x^2-3x+2)+a(x-2)$

$=x(x-1)(x-2)+a(x-2)$

$=(x-2)[x(x-1)+a]$

$=(x-2)(x^2-x+a)$.

17．因式分解：$a^2(1-b)^2-1+2b-b^2$.

【答案】

$(a-1)(a+1)(1-b)^2$

【详解】解：原式$=a^2(1-b)^2-(1-2b+b^2)$

$=a^2(1-b)^2-(1-b)^2$

$=(1-b)^2(a^2-1)$

$=(a-1)(a+1)(1-b)^2$.

18．因式分解：$x^4+2x^3+5x^2+4x-12$.

【答案】

$(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$

【分析】使用分组分解法进行因式分解，先将原式拆项分组，提取公因式得到两个二次因式的乘积，再对其中可分解的二次因式继续分解即可得到结果.

【详解】解：原式$=x^4+x^3-2x^2+x^3+x^2-2x+6x^2+6x-12$

$=(x^4+x^3-2x^2)+(x^3+x^2-2x)+(6x^2+6x-12)$

$=x^2(x^2+x-2)+x(x^2+x-2)+6(x^2+x-2)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+6)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$.



题型 07.分组后结合公式因式分解

19．因式分解：$a^3-a^2b-ab^2+b^3=$_____.

【答案】$(a-b)^2(a+b)$

【分析】本题考查了因式分解．运用分组分解法，先将多项式合理分组，再依次利用提取公因式法、平方差公式进行因式分解，直至分解为几个整式的积的形式.

【详解】解：$a^3-a^2b-ab^2+b^3$

$=(a^3-a^2b)+(-ab^2+b^3)$

$=a^2(a-b)-b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)(a-b)(a+b)$

$=(a-b)^2(a+b)$

故答案为：$(a-b)^2(a+b)$.

20．分解因式：$9-4x^2+4xy-y^2=$_____.

【答案】$(3+2x-y)(3-2x+y)$

【分析】本题考查因式分解，先分组得到$9-(4x^2-4xy+y^2)$，再利用完全平方公式分解因式，进一步利用平方差公式分解因式即可.

【详解】解：$9-4x^2+4xy-y^2$

$=9-(4x^2-4xy+y^2)$

$=3^2-(2x-y)^2$

$=[3+(2x-y)][3-(2x-y)]$

$=(3+2x-y)(3-2x+y)$,

故答案为：$(3+2x-y)(3-2x+y)$.

21．因式分解：$x^3-2x^2y-7xy^2-4y^3=$_____.

【答案】$(x+y)^2(x-4y)$

【分析】本题主要考查了分解因式，掌握提取公因式法和公式法是解题的关键.

先利用计算公式，将$-4y^3$变形为$+y^3-5y^3$，结合x^3+y^3因式分解的公式，得到$(x+y)(x^2-xy+y^2)$，对$2x^2y+7xy^2+5y^3$部分先提取公因式 y，再利用十字相乘法进行因式分解，得到$y(x+y)(2x+5y)$，再整体提取公因式$(x+y)$，对余下部分利用十字相乘法进行因式分解即可.

【详解】解：原式$=(x^3+y^3)-(2x^2y+7xy^2+5y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-y(2x^2+7xy+5y^2)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-y(x+y)(2x+5y)$

$=(x+y)(x^2-3xy-4y^2)$

$=(x+y)(x+y)(x-4y)$

$=(x+y)^2(x-4y)$.



题型 08.因式分解整体代入求值

22．已知 $ab=2$，$a-b=4$，则代数式 $a^3b-2a^2b^2+ab^3=$_____.

【答案】32

【分析】先对所求代数式进行因式分解，再将已知 $ab=2$，$a-b=4$ 代入计算即可.

【详解】解：$a^3b-2a^2b^2+ab^3$

$=ab(a^2-2ab+b^2)$

$=ab(a-b)^2$

将 $ab=2$，$a-b=4$ 代入得，原式 $=2\times4^2=2\times16=32$.

23．已知 $m-n=5$，$mn=4$，那么 $m^3n-2m^2n^2+mn^3=$_____.

【答案】100

【分析】先对所求多项式进行因式分解，再将已知条件整体代入计算即可.

【详解】解：$m^3n-2m^2n^2+mn^3=mn(m^2-2mn+n^2)=mn(m-n)^2$ ，

将 $m-n=5$，$mn=4$ 代入得：$mn(m-n)^2=4\times5^2=4\times25=100$.

24．若多项式 $2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2$ 的值为 0，则 $x+y$ 的值为_____.

【答案】0

【分析】本题考查了因式分解的应用．根据平方差公式与完全平方公式因式分解，将原多项式化简为 $(x+y)^4$，再根据其值为 0，得到 $x+y=0$

【详解】解：$2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2$

$=2(x^2+y^2)(x+y)^2-[(x+y)(x-y)]^2$

$=2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x+y)^2(x-y)^2$

$=(x+y)^2[2x^2+2y^2-(x-y)^2]$

$=(x+y)^2\left[2x^2+2y^2-(x^2-2xy+y)^2\right]$

$=(x+y)^2\left(2x^2+2y^2-x^2+2xy-y^2\right)$

$=(x+y)^2\left(x^2+2xy+y^2\right)$

$=(x+y)^2(x+y)^2$

$=(x+y)^4$，

由题意得$(x+y)^4=0$，

解得$x+y=0$.

故答案为：0.



题型 09.因式分解简便运算

25．利用因式分解计算：$303^2-606\times297+297^2=$_____.

【答案】36

【分析】本题考查了因式分解的应用，利用因式分解可以简化计算，正确计算是解题的关键.

观察表达式，发现其符合完全平方公式的形式，通过完全平方公式进行因式分解简化计算.

【详解】解：原式$=303^2-2\times303\times297+297^2$

$=(303-297)^2$

$=6^2$

$=36$.

故答案为：36.

26．$\dfrac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)...(2020^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)...(2020^3+1)}$ 的值最接近（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】B

【分析】本题主要考查因式分解的应用，利用立方和与立方差公式化简计算，即可得出答案.

【详解】解：由立方和、立方差公式可得，

$n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$，

$n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$，

$\therefore \dfrac{n^3-1}{(n+1)^3+1}=\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+2)(n^2+n+1)}=\dfrac{n-1}{n+2}$，

$\therefore \dfrac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2020^3-1)}{(2^3+1)(1+^3+1)\cdots\cdots(2020^3+1)}$

$=\dfrac{(2-1)(3-1)(4-1)\cdots\cdots(2020-1)}{(2+1)(3+1)(4+1)\cdots\cdots(2020+1)}\times\dfrac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\cdots(2020^2+2020+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)\cdots\cdots(2020^2-2020+1)}$

$=\dfrac{1\times2}{2020\times2021}\times\dfrac{(2020^2+2020+1)}{(2^2-2+1)}$

$\approx\dfrac{2}{3}$

故选：B.

27．利用因式分解计算：$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\times\lambda\times\left(1-\dfrac{1}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{121}\right)$．

【答案】$\dfrac{6}{11}$

【分析】本题考查利用因式分解进行简算，利用平方差公式进行因式分解后，进行计算即可．

【详解】解：原式

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{10}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{11}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{11}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{4}\times\lambda\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{11}{10}\times\dfrac{10}{11}\times\dfrac{12}{11}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{11}$

$=\dfrac{6}{11}$．



题型 10.因式分解判定三角形形状

28．已知a,b,c为$\triangle ABC$的三边，且满足$a^2-b^2=ac-bc$，则$\triangle ABC$的形状是_____三角形．

【答案】等腰

【分析】将已知等式因式分解后，结合三角形三边关系得到三角形边的等量关系，即可判断三角形形状．

【详解】解：$\because a^2-b^2=ac-bc$，

$\therefore(a-b)(a+b)=c(a-b)$，

移项得$(a-b)(a+b)-c(a-b)=0$，

提取公因式得$(a-b)(a+b-c)=0$，

∵ a,b,c 为$\triangle ABC$ 的三边，

根据三角形三边关系可知 $a+b>c$，即 $a+b-c>0$，

∴ $a-b=0$，即 $a=b$，

∴$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

29．已知$\triangle ABC$ 的三边的边长分别是 a，b，c，且满足 $a^2+2b^2-2b(a+c)+c^2=0$，判断此三角形的形状为_____.

【答案】等边三角形/正三角形

【分析】本题考查完全平方公式的应用，将原式变形为 $(a-b)^2+(b-c)^2=0$，根据平方的非负性可得 $a=b$，$b=c$，进而可得 $a=b=c$，即可求解.

【详解】解：∵ $a^2+2b^2-2b(a+c)+c^2=0$，

∴ $a^2+2b^2-2ab-2bc+c^2=0$，

∴ $(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)=0$，

∴ $(a-b)^2+(b-c)^2=0$，

∴ $a-b=0$，$b-c=0$，

∴ $a=b$，$b=c$，

∴ $a=b=c$，

∴$\triangle ABC$ 是等边三角形，

故答案为：等边三角形.

30．分解因式 $x^2-4y^2-2x+4y$，细心观察这个式子就会发现，前两项符合平方差公式，后两项可提取公因式，前后两部分分别分解因式后会产生公因式，然后提取公因式就可以完成整个式子的分解因式了，过程为：$x^2-4y^2-2x+4y=(x+2y)(x-2y)-2(x-2y)=(x-2y)(x+2y-2)$ 这种分解因式的方法叫分组分解法，利用这种方法解决下列问题：

(1)分解因式：a^2-4a-b^2+4b；

(2)$\triangle ABC$ 三边 a，b，c 满足 $a^2-ab-ac+bc=0$，判断$\triangle ABC$ 的形状.

【答案】(1)$(a-b)(a+b-4)$

(2)等腰三角形

【分析】（1）应用分组分解法，把 a^2-4a-b^2+4b 分解因式即可.

（2）首先应用分组分解法，把 $a^2-ab-ac+bc=0$ 分解因式，然后根据三角形的分类方法，判断出$\triangle ABC$

的形状即可.

【详解】（1）解：a^2-4a-b^2+4b

$=a^2-b^2-4a+4b$

$=(a+b)(a-b)-4(a-b)$

$=(a-b)(a+b-4)$；

（2）$\because a^2-ab-ac+bc=0$，

$\therefore a(a-b)-c(a-b)=0$，

$\therefore (a-b)(a-c)=0$，

$\therefore a-b=0$或$a-c=0$，

$\therefore a=b$或$a=c$，

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.



题型 11.因式分解证明整除问题

31．若关于x的二次三项式$2x^2+7x+m$能被$x+3$整除，则m的值为_____.

【答案】3

【分析】本题考查了整式的除法，根据题意设出多项式分解因式的结果是解题的关键.

根据题意设出多项式分解因式的结果，利用多项式乘多项式法则及多项式相等的条件即可求出m的值.

【详解】解：根据题意可设$2x^2+7x+m=(x+3)(2x+a)=2x^2+(a+6)x+3a$，

$\therefore \begin{cases} a+6=7, \\ m=3a, \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=1, \\ m=3. \end{cases}$

则m的值为3.

故答案为：3.

32．已知m,n均为正整数，且满足：$mn-2m-n-2025=0$，则$m+n=$_____.

【答案】2031

【分析】本题考查利用因式分解解方程，将方程通过因式分解转化为乘积形式，找到正整数解的可能组合，进而求解$m+n$.

将原方程转为为$(m-1)(n-2)=2027$，然后结合条件得出$n-2$和$m-1$为正整数，进而根据质数的因数只有 1 和它本身，得出$n-2$和$m-1$的值，只能分别为 1 和 2027，分类讨论求出m,n的值，求出$m+n$.

【详解】解：$\because mn-2m-n-2025=0$

$\therefore mn-2m-n+2=2025+2$

$\therefore (m-1)(n-2)=2027$

$\because$2027 是质数，m,n均为正整数，

即$2027=1\times2027$，

$\therefore$当$m-1=1$时，$m=2$，此时$n-2=2027$，$n=2029$

故$m+n=2+2029=2031$，

$\therefore$当$m-1=2027$时，$m=2028$，此时$n-2=1$，$n=3$

故$m+n=2028+3=2031$，

综上，$m+n=2031$.

故答案为：2031.

33．若正整数$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_9$满足$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_9^2$整除$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)^2-1$．请写出符合条件的$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_9$的一组数：_____ .

【答案】1，1，1，1，1，1，1，2，2

【分析】本题主要考查了数的整除，熟练掌握整除的意义是解题的关键．通过构造以 1 为主的特殊正整数组合，结合整除的定义验证是否满足条件.

【详解】解：设 7 个正整数为 1，2 个正整数为 2，

$\therefore 7\times1^2+2\times2^2=7+8=15$，

$\therefore (a_1+a_2+\ldots+a_9)^2-1=(7\times1+2\times2)^2-1=11^2-1=121-1=120$，

因为$120\div15=8$，即 15 能整除 120，满足题设中“正整数的平方和整除和的平方减 1”的条件，

故答案为：1，1，1，1，1，1，1，2，2.



题型 12.因式分解式子规律探究

34．我国古代数学的许多发现都位居世界前列，其中“杨辉三角”就是一例，如图所示，它给出了$(a+b)^n$（n为非负整数）的展开式（按a的次数由大到小的顺序排列）的系数规律，例如：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \cdots\cdots\ (a+b)^1=a+b \\ & 1 & & 2 & & 1 & \cdots\cdots\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \quad \cdots\cdots\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

请利用以上规律求出$(2x+1)^6$的展开式$a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$a_5$的值是

_____.

【答案】192

【分析】读懂题意并根据所给的式子寻找规律,将$(2x+1)^6$展开，即可求解.

【详解】解：观察发现，$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$，

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$\therefore (2x+1)^6=(2x)^6+6\times(2x)^5\times1+15\times(2x)^4\times1^2+20\times(2x)^3\times1^3+15\times(2x)^2\times1^4+6\times2x\cdot1^5+1^6$，

$=64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1$,

$\therefore a_5=192$.

35．观察规律：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$,

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$,

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{8}\cdots\cdots$,

若$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1013}{2025}$（$n$为正整数），则$n$的值为_____.

【答案】2025

【分析】本题考查了利用平方差公式的规律类运算，理解规律和掌握平方差公式是解题关键.根据题目中式子的特点，利用平方差公式分解因式，然后约分即可求得答案.

【详解】解：$\because\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1013}{2025}$,

$\therefore\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1013}{2025}$,

$\therefore\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1013}{2025}$,

$\therefore\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1013}{2025}$,

解得：$n=2025$，

故答案为：2025．

36．我国古代数学的许多创新与发展都曾居世界前列．其中“杨辉三角”（图 1）就是一例，其规律是：从第三行起，每行两端的数都是“1”，其余各数都等于该数“两肩”上的数之和．如图 2 中虚线标记的一列数：$1,3,6,10,15,\cdots\cdots$，我们把第一个数记为a_1，第二个数记为a_2，第三个数记为$a_3,\cdots\cdots$，第n个数记为a_n，若$a_{n+1}+a_n=2027^2$，则n的值是_____．

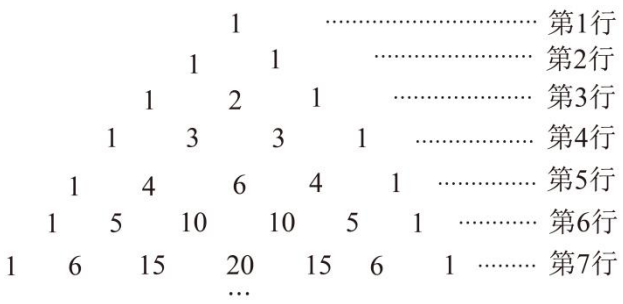
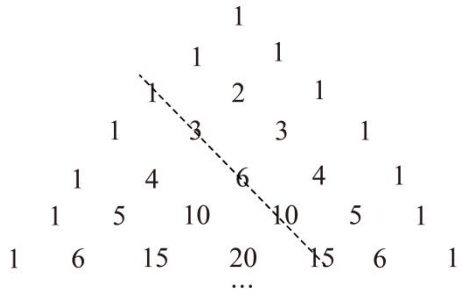


图1


图2

【答案】2026

【分析】本题考查数的规律探索，关键是根据规律推导得出a_n的表达式，再通过代数运算建立方程求解．

【详解】解：观察图 2 中虚线标记的一列数：$1,3,6,10,15,\cdots\cdots$可知：

$a_1=1=\dfrac{1\times2}{2}$，$a_2=3=\dfrac{2\times3}{2}$，$a_3=6=\dfrac{3\times4}{2}$，$\cdots$，

$\therefore a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

则$a_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$，

当$a_{n+1}+a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=2027^2$时，

整理化简得$(n+1)^2=2027^2$，

$\because n$为正整数，

$\therefore n+1=2027$，

解得$n=2026$；

故答案为：2026．



题型 13.新定义运算

37．定义：若一个正整数M能表示成两个相邻偶数a，$b(a>b\geq0)$的平方差，即$M=a^2-b^2$，且M的算术平方根是一个正整数，则称正整数M是“双方数”．例如：$36=10^2-8^2$，$\sqrt{36}=6$，36 就是一个“双方

数”．若将“双方数”从小到大排列，第 100 个“双方数”为_____．

【答案】158404

【分析】本题主要考查了新定义下的实数运算，因式分解的应用等内容，解题的关键是找出规律．

根据新定义表示出“双方数”，然后进行因式分解，找出“双方数”的规律进行计算即可．

【详解】解：根据题意得，$a=b+2$，

$\therefore M=a^2-b^2=(b+2)^2-b^2=4(b+1)$，

$\because M$ 的算术平方根是一个正整数，

$\therefore b+1$ 是一个完全平方数，

$\because b+1$ 是奇数，

$\therefore b+1$ 只能是奇数的平方，从小到大依次是 1^2、3^2、5^2、…、$(2n-1)^2$，

那么“双方数”从小到大依次为 4×1^2、4×3^2、4×5^2、…、$4\times(2n-1)^2$，

第 100 个“双方数”为 158404，

故答案为：158404．

38．我们规定：若一个正整数 A 能写成 $A=m^2-mn$，其中 m 与 n 都是两位数，且 m 与 n 的十位数字相同，个位数字之和为 7，则称 A 为“积减数”，并把 A 分解成 $A=m^2-mn$ 的过程称为“积减分解”．例如：因为 $45=15^2-15\times12$，15 与 12 的十位数字相同，个位数字 5 与 2 的和为 7，所以 45 是“积减数”．按照这个规定，最小的“积减数”是_____，把一个“积减数”A 进行“积减分解”，即 $A=m^2-mn$，将 m 放在 n 的左边组成一个新的四位数 B，若 B 与 m 的差除以 17 的余数为 15，则满足条件的所有正整数 A 的和为_____．

【答案】 14 568

【分析】本题考查了新定义，整式的运算，设 m 的十位数字为 a，个位数字为 b，可得 $A=(10a+b)(2b-7)$，然后求出“积减数”最小时，$a=1$，$b=4$；表示 $B-m=1000a+98b+7$，即可得到余数为 $14a+13b+7$ 且 $\frac{7}{2}<b\le7$，然后对 a，b 取不同的整数解计算得到 A 的值求和即可．

【详解】解：$A=m^2-mn=m(m-n)$，

设 m 的十位数字为 a，个位数字为 b，则 $m=10a+b$，$n=10a+(7-b)$，

$\therefore A=m^2-mn=(10a+b)(2b-7)$，

$\because$“积减数”最小，又是正整数，

$\therefore a=1$，$b=4$，

∴最小的“积减数”是14；

∵ $B=100(10a+b)+10a+(7-b)$，

∴ $B-m=100(10a+b)+10a+(7-b)-(10a+b)=1000a+98b+7$，

∴ $\dfrac{1000a+98b+7}{17}=58a+5b+\dfrac{14a+13b+7}{17}$，且 $\dfrac{7}{2}<b\le 7$，

当 $b=4$ 时，余数为 $14a+59=(14a+8)+17\times 3$，

即 $a=9$，则 $A=94$；

当 $b=5$ 时，余数为 $14a+72=(14a+4)+17\times 4$，

即 $a=2$，则 $A=75$；

当 $b=6$ 时，余数为 $14a+85=14a+17\times 5$，无解；

当 $b=7$ 时，余数为 $14a+98=(14a+13)+17\times 5$，

即 $a=5$，则 $A=399$；

满足条件的所有正整数 A 的和为 $94+75+399=568$，

故答案为：14，568．

39．定义：对于任意四个有理数 a，b，c，d，定义一种新运算：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=a^2+d^2+bc$．

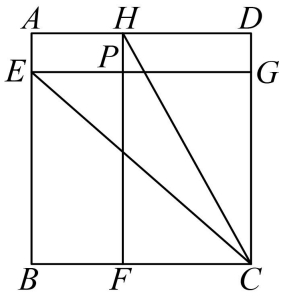
(1)求 $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的值；

(2)若 $\begin{bmatrix} m & -n \\ km & 2n \end{bmatrix}=(m-2n)^2$，则 $k=$_____；

(3)若有理数 m，n 满足 $m+3n=5$，且 $\begin{bmatrix} m+4n & -4 \\ 4m^2+2n^2 & 4m-n \end{bmatrix}=13$．

①求 mn 的值；

②如图，四边形 $ABCD$ 是长方形，点 E，F，G，H 分别在边 AB，BC，CD，DA 上，连接 EG，FH 交于点 P，且 EG，FH 将长方形 $ABCD$ 分割成四个小长方形．若 $AB=9n$，$BF=3n$，$CF=3m$，$DG=m$，在①的条件下，请直接写出由线段 EP，PH，HC，CE 围成的图形的面积．



【答案】(1)11

(2)4

(3)①2；②$\frac{33}{2}$

【分析】本题考查了新定义，完全平方公式的变形求解以及因式分解的应用，熟练掌握新定义和完全平方公式是解答本题的关键.

（1）根据$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=a^2+d^2+bc$计算即可；

（2）根据$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=a^2+d^2+bc$计算，再根据完全平方式的特征求解即可；

（3）①根据$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=a^2+d^2+bc$得出$(m+4n)^2+(4m-n)^2-4(4m^2+2n^2)=13$，再结合$m+3n=5$即可求出$mn=2$；

②根据图象可得由线段EP，PH，HC，CE围成的图形的面积为$S_{矩形ABCD}-S_{矩形AEPH}-S_{\triangle EBC}-S_{\triangle HDC}$，化简后代入$m+3n=5$，$mn=2$即可求解；

【详解】（1）解：$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=(-1)^2+4^2+3\times(-2)=1+16-6=11$；

（2）解：$\begin{bmatrix} m & -n \\ km & 2n \end{bmatrix}=m^2-kmn+4n^2$；

$\because \begin{bmatrix} m & -n \\ km & 2n \end{bmatrix}=(m-2n)^2$，

$\therefore m^2-kmn+4n^2=(m-2n)^2=m^2-4mn+4n^2$

$\therefore k=4$；

（3）解：①$\because \begin{bmatrix} m+4n & -4 \\ 4m^2+2n^2 & 4m-n \end{bmatrix}=13$，

$\therefore (m+4n)^2+(4m-n)^2-4(4m^2+2n^2)=13$，

$\therefore m^2+9n^2=13$，

$\therefore (m+3n)^2-6mn=13$，

$\because m+3n=5$，

$\therefore 25-6mn=13$，

$\therefore mn=2$，

②由题意可知：EP，PH，HC，CE围成的图形的面积$S=S_{长方形ABCD}-S_{长方形AEPH}-S_{\triangle EBC}-S_{\triangle HDC}$

$=9n\cdot(3n+3m)-3mn-\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot 9n-\frac{1}{2}\cdot(9n-m)(3n+3m)$

$=27n^2+27mn-3mn-\frac{27}{2}mn-\frac{1}{2}(27n^2+24mn-3m^2)$

$=27n^2+27mn-3mn-\frac{27}{2}mn-\frac{27}{2}n^2-12mn+\frac{3}{2}m^2$

$=\frac{27}{2}n^2-\frac{3}{2}mn+\frac{3}{2}m^2$

$=\frac{3}{2}\left[(3n+m)^2-7mn\right]$，

将$m+3n=5$，$mn=2$代入可得，$S=\frac{33}{2}$.



题型 14.因式分解中配方法应用

40．将多项式$ax^2+bx+c(a\neq 0)$变形为$a(x+m)^2+n$的形式，这样的方法叫做配方法．利用配方法和非负数的性质可以求出多项式的最大（小）值．例如：$x^2-4x-5=x^2-4x+2^2-2^2-5=(x-2)^2-9$，

$\because (x-2)^2\geq 0$，$\therefore (x-2)^2-9\geq -9$，$\therefore$当$x=2$时，多项式$x^2-4x-5$有最小值$-9$．

已知a，b为实数，多项式$(x+3)(3x+a)$展开后x的一次项系数为m，多项式$(3x+2)(x+b)$展开后x的一次项系数为n，且m，n均为正整数，则当$m+n=17$时，ab的最大值为_____.

【答案】3

【分析】本题主要考查了完全平方公式的应用，非负数的性质，多项式乘以多项式，根据题意得出$m=a+9$，$n=3b+2$，进而根据$m+n=17$，可得$a=6-3b$，然后得出，根据配方法，即可求解．

【详解】解：$\because (x+3)(3x+a)=3x^2+(a+9)x+3a$

$\therefore m=a+9$，

$\because (3x+2)(x+b)=3x^2+(3b+2)x+2b$

$\therefore n=3b+2$

$\because m+n=17$

$\therefore a+9+3b+2=17$

$\therefore a=6-3b$

$\therefore ab=(6-3b)b=-3b^2+6b$

$=-3(b^2-2b+1)+3$

$=-3(b-1)^2+3$

$\because -3(b-1)^2\le 0$

$\therefore -3(b-1)^2+3\le 3$

$\therefore$当$b=1$时，ab的最大值为3，

故答案为：3．

41．我们知道，$a^2+2ab+b^2$和$a^2-2ab+b^2$这样的式子可以运用完全平方公式进行因式分解．有些多项式不是完全平方式，我们可以用配方法将多项式进行分解，并解决一些最值问题．

例如：①分解因式：x^2-2x-3；

解：原式$=x^2-2x+1-1-3=(x-1)^2-4=(x-1)^2-2^2=(x-1+2)(x-1-2)$

$=(x+1)(x-3)$；

②求代数式x^2-2x-3的最小值．

解：原式$=x^2-2x+1-1-3=(x-1)^2-4$，

$\because (x-1)^2\ge 0$，$\therefore (x-1)^2-4\ge -4$，

$\therefore$当$x=1$时，代数式x^2-2x-3有最小值-4．

结合以上材料解决下面的问题：

(1)分解因式：x^2-8x+7；

(2)当x为何值时，x^2-8x+7有最小值？最小值为多少？

(3)求证：无论x，y取任何实数，代数式$x^2+y^2+4x-6y+15$的值恒为正数．

【答案】(1)$(x-1)(x-7)$

(2)当$x=4$时，代数式x^2-8x+7取最小值-9

(3)见解析

【详解】（1）解：x^2-8x+7

$=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+7$

$=(x-4)^2-9$

$=(x-4+3)(x-4-3)$

$=(x-1)(x-7)$；

（2）解：x^2-8x+7

$=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+7$

$=(x-4)^2-9$

$\because (x-4)^2\geq 0$

$\therefore (x-4)^2-9\geq -9$

当$x=4$时，代数式x^2-8x+7取最小值-9；

（3）解：$x^2+y^2+4x-6y+15$

$=(x+2)^2+(y-3)^2+2$

$\because (x+2)^2\geq 0$，$(y-3)^2\geq 0$

$\therefore (x+2)^2+(y-3)^2+2\geq 2$

$\therefore$无论x，y取任何实数，代数式$x^2+y^2+4x-6y+15$的值恒为正数.

42.【阅读理解，自主探究】把代数式通过配凑等手段，得到完全平方式，再运用完全平方式是非负数这一性质增加问题的条件，这种解题方法叫做配方法，配方法在代数式求值、解方程、最值问题等都有着广泛的应用.

例 1：因式分解：a^2+6a+8.

解：原式$=a^2+6a+9-1=(a+3)^2-1=(a+3-1)(a+3+1)=(a+2)(a+4)$.

例 2：若$M=a^2-2ab+2b^2-2b+2$，利用配方法求M的最小值.

解：$a^2-2ab+2b^2-2b+2=a^2-2ab+b^2+b^2-2b+1+1=(a-b)^2+(b-1)^2+1$.

$\because (a-b)^2\geq 0$，$(b-1)^2\geq 0$，

$\therefore$当$a=b=1$时，M有最小值 1.

请根据上述阅读材料，解决下列问题：

(1)用配方法因式分解：$a^2-12a+35=$_____；

(2)已知$a^2+2b^2+c^2-2ab+4b-6c+13=0$，求$a+b+c$的值.

(3)已知$P=x^2-y^2+6x-1$，$Q=2x^2+4y+13$，试比较P，Q的大小.

(4)若a,b为有理数且满足$ab=a+b,P=a^2-4ab+b^2+11$，求P的最小值.

【答案】(1)$(a-5)(a-7)$

(2)$a+b+c=-1$

(3)$Q>P$

(4)3

【分析】本题考查了因式分解的应用，完全平方公式的应用.

（1）找到常数项为一次项系数一半的平方，然后整理成完全平方公式，再运用公式法进行分解因式，即可作答；

（2）根据完全平方公式因式分解，再根据非负数的性质，求得a,b,c的值，代入代数式，即可求解；

（3）根据因式分解求得$Q-P=(x-3)^2+(y+2)^2+1$，根据例 2 的方法，即可求解；

（4）根据因式分解可得$P=(a-2)^2+(b-2)^2+3$，同例 2 的方法，即可求解.

【详解】（1）解：依题意，$a^2-12a+35=a^2-12a+36-1=(a-6)^2-1^2=(a-7)(a-5)$，

故答案为：$(a-5)(a-7)$.

（2）$\because a^2+2b^2+c^2-2ab+4b-6c+13=0$，

$\therefore a^2-2ab+b^2+b^2+4b+4+c^2-6c+9=0$，

$\therefore (a-b)^2+(b+2)^2+(c-3)^2=0$，

又$\because (a-b)^2\geq 0$，$(b+2)^2\geq 0$，$(c-3)^2\geq 0$，

$\therefore a-b=0$，$b+2=0$，$c-3=0$，

$\therefore a=b=-2$，$c=3$，

$\therefore a+b+c=-2+(-2)+3=-1$.

（3）$\because P=x^2-y^2+6x-1$，$Q=2x^2+4y+13$，

$\therefore Q-P=(2x^2+4y+13)-(x^2-y^2+6x-1)$

$=x^2-6x+9+y^2+4y+4+1$

$=(x-3)^2+(y+2)^2+1$

$\because (x-3)^2 \geq 0$，$(y+2)^2 \geqslant 0$，

$\therefore Q-P \geq 1$

$\therefore Q > P$.

（4）解：$\because ab=a+b$，

$\therefore P=a^2-4ab+b^2+11$

$=a^2-4(a+b)+b^2+11$

$=a^2-4a-4b+b^2+11$

$=(a^2-4a+4)+(b^2-4b+4)+3$

$=(a-2)^2+(b-2)^2+3$，

$\because (a-2)^2 \geq 0,(b-2)^2 \geq 0$，

$\therefore$ 当 $a=b=2$ 时，P 有最小值，最小值为 3，此时满足 $2\times 2=2+2$，

故答案为：3

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872