实数的初步认识

答案与解析

【夯实基础】

【题型 1　判断无理数】

【例 1】下列四个实数中，是无理数的是（　　）

A．0　　B．$\sqrt{25}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．2

【答案】C

【分析】需先化简带根号的数，再根据无理数的定义判断各选项.

【详解】解：0，2 均为整数，属于有理数；

$\sqrt{25}=5$，是整数，属于有理数；

$\sqrt{6}$开方开不尽，为无理数.

【变式 1-1】请写出一个小于-3 的无理数：_____.（写出一个正确答案即可）

【答案】$-\sqrt{10}$（答案不唯一）

【分析】根据无理数的定义，利用算术平方根估算无理数的大小，即可得到符合要求的无理数.

【详解】解：$\because 10>9$，

$\therefore \sqrt{10}>\sqrt{9}=3$，

$\therefore -\sqrt{10}<-3$，

又$\because -\sqrt{10}$是无理数，

$\therefore -\sqrt{10}$是小于-3 的无理数.

【变式 1-2】在实数：$-\sqrt{7}$，5，$-\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$，$\sqrt[3]{-15}$，$\sqrt{49}$中，负无理数有_____个.

【答案】2

【分析】先将各数化简，再根据负无理数的定义逐一判断，统计得到负无理数的个数.

【详解】解：$-\sqrt{7}$是负无理数，5 是正有理数，$-\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=-\frac{3}{4}$是负有理数，$\sqrt[3]{-15}=-\sqrt[3]{15}$是负无理数，

$\sqrt{49}=7$ 是正有理数，

因此负无理数共有 2 个.

【变式 1-3】有六个数：0.123，$(-1.5)^3$，3.1416，$\frac{22}{7}$，-2π，0.2020020002…（相邻的两个 2 之间依次多一个 0）．若其中无理数的个数为x，非负数的个数为y，则$x+y=$_____.

【答案】6

【分析】先根据无理数的定义确定无理数的个数得到x的值，再根据非负数的定义确定非负数的个数得到y的值，最后计算$x+y$即可.

【详解】解：无理数为：-2π，0.2020020002…（相邻的两个 2 之间依次多一个 0），共 2 个，即$x=2$，

非负数为：0.123，3.1416，$\frac{22}{7}$，0.2020020002…，共 4 个，即$y=4$，

则$x+y=2+4=6$.

【题型 2　求一个数的平方根】

【例 2】13 的平方根是_____.

【答案】$\pm\sqrt{13}$

【详解】解：$\because\left(\pm\sqrt{13}\right)^2=13$，

$\therefore$13 的平方根是$\pm\sqrt{13}$.

【变式 2-1】一个自然数的一个平方根是 a，则与它相邻的下一个自然数的平方根是（　）

A．$\pm\sqrt{a+1}$　　B．$a+1$　　C．a^2+1　　D．$\pm\sqrt{a^2+1}$

【答案】D

【分析】本题考查平方根，以及已知一个数的平方根，求这个数，先用 a 表示该自然数，然后再求出这个自然数相邻的下一个自然数，进而得到其平方根.

【详解】解：由题意可知：该自然数为a^2，

$\therefore$该自然数相邻的下一个自然数为a^2+1，

$\therefore$ a^2+1 的平方根为$\pm\sqrt{a^2+1}$.

故选：D.

【变式 2-2】下列各数中，不一定有平方根的是(　　)

A．x^2+1　　B．$|x|+2$　　C．$\sqrt{a}+1$　　D．$|a|-1$

【答案】D

【分析】根据平方根的性质解答即可.

【详解】A、$\because x^2+1>0$，$\therefore$该数有平方根；

B、$\because|x|+2>0$，$\therefore$该数有平方根；

C、$\sqrt{a}+1>0$，$\therefore$该数有平方根；

D、$\because|a|\geq 0$，$\therefore|a|-1$ 不一定大于 0，故该数不一定有平方根；

故选：D.

【点睛】此题考查了平方根的性质：正数有两个平方根，0 有一个平方根是 0，负数没有平方根，正确掌

握实数的大小估算确定其为正数、负数或是 0 是解题的关键.

【变式 2-3】$\sqrt{16}=$（　　）

A．4　　B．± 4　　C．-4　　D．± 8

【答案】A

【详解】解：$\sqrt{16}$表示 16 的算术平方根. $\because 4^2=16$，　$\therefore \sqrt{16}=4$.

【题型 3　求一个数的算术平方根】

【例 3】计算：$\sqrt{2^2}$=_____.

【答案】2

【分析】利用平方运算，求一个数的算术平方根，或二次根式的运算性质计算即可.

【详解】解：方法一：$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$,

方法二：$\sqrt{2^2}=|2|=2$

【变式 3-1】$(-2026)^2$的算术平方根是_____.

【答案】2026

【分析】根据算术平方根的定义，先计算乘方结果，再求出其正的算术平方根即可.

【详解】解：$\sqrt{(-2026)^2}=\sqrt{2026^2}=2026$，

所以$(-2026)^2$的算术平方根是 2026.

【变式 3-2】已知$\sqrt{m^2}=6$，且$n=\sqrt{3-m}$，则mn的值为_____.

【答案】-18

【分析】先根据二次根式的性质得到m的所有可能值，再根据二次根式有意义的条件确定m的取值，最后代入计算mn即可.

【详解】解：$\because \sqrt{m^2}=6$，

$\therefore |m|=6$，即$m=\pm 6$，

$\because n=\sqrt{3-m}$，二次根式有意义的条件为被开方数是非负数，

$\therefore 3-m\geq 0$，

解得$m\leq 3$，

$\therefore m=6$ 不符合题意，舍去，

$\therefore m=-6$，

将$m=-6$ 代入得$n=\sqrt{3-(-6)}=\sqrt{9}=3$，

$\therefore mn=-6\times 3=-18$.

【变式 3-3】计算$\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}$的结果等于_____.

【答案】$-\frac{5}{3}$

【分析】根据立方根的定义和性质，将被开方数写成某个数的立方，即可计算出这个数的立方根.

【详解】解：$\because 5^3=125$，$3^3=27$，

$\therefore -\frac{125}{27}=\left(-\frac{5}{3}\right)^3$，

$\therefore \sqrt[3]{-\frac{125}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{5}{3}\right)^3}=-\frac{5}{3}$.

【题型 4　求一个数的立方根】

【例 4】$|-64|$的立方根是（　　）

A．± 8　　B．4　　C．-4　　D．16

【答案】B

【详解】$\because |-64|=64$，

又$\because 4^3=64$，

$\therefore$ 64 的立方根是 4，

即$|-64|$的立方根是 4.

【变式 4-1】对于实数a、b，定义运算“※”如下：$a※b=a^2-ab$，则关于 4※6 的结果，下列说法正确的是（　　）

A．平方根是 2　　B．算术平方根是 2

C．立方根是 2　　D．立方根是-2

【答案】D

【分析】先根据新定义运算求出 4※6 的结果，再根据平方根、算术平方根、立方根的定义判断各选项即可.

【详解】解：$\because a※b=a^2-ab$，

$\therefore 4※6=4^2-4\times 6=16-24=-8$.

$\because$负数没有平方根和算术平方根，因此排除 A、B 选项，

又$\because \sqrt[3]{-8}=-2$，

$\therefore$4※6 结果的立方根是-2，D 正确.

【变式 4-2】已知$\sqrt[3]{0.214}\approx 0.5981$，$\sqrt[3]{2.14}\approx 1.289$，$\sqrt[3]{21.4}\approx 2.776$，则$\sqrt[3]{2140}\approx$（　　）

A．27.76　　B．12.89　　C．59.81　　D．5.981

【答案】B

【分析】被开立方的数的小数点每向右移动三位，那么开立方的结果的小数点向右移动一位，据此可得答案.

【详解】解：$\because \sqrt[3]{2.14} \approx 1.289$，

$\therefore \sqrt[3]{2140} = \sqrt[3]{2.14 \times 1000} \approx 12.89$.

【变式 4-3】若$m = \sqrt[3]{(\pi - 3)^3}, n = \sqrt{(\pi - 4)^2}$，则$m + n$的值为（　）

A．1　　B．-1　　C．7　　D．-7

【答案】A

【分析】本题主要考查根式的运算性质，特别是奇次根式与偶次根式的区别，以及绝对值的应用，理解相关概念是解题的关键.

【详解】解：$\because m = \sqrt[3]{(\pi - 3)^3} = \pi - 3$；$n = \sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| = 4 - \pi$

$\therefore m + n = \pi - 3 + 4 - \pi = 1$

故选：A.

【题型 5　判断平方根与立方根的性质】

【例 5】下列说法正确的是（　）

A．$\sqrt{9}$的平方根是± 3　　B．8 的立方根是± 2

C．4 的平方根是 2　　D．$-\sqrt{2}$是 2 的平方根

【答案】D

【分析】本题考查平方根与立方根的定义，根据定义逐一计算判断各选项即可得到正确结果.

【详解】A．$\sqrt{9} = 3$，所以，3 的平方根是$\pm\sqrt{3}$，因此本选项错误，不符合题意；

B．$2^3 = 8$，所以，8 的立方根是 2，因此本选项错误，不符合题意；

C．$(\pm 2)^2 = 4$，所以，4 的平方根是± 2，因此本选项错误，不符合题意；

D．$(-\sqrt{2})^2 = 2$，所以，$-\sqrt{2}$是 2 的平方根，因此本选项正确，符合题意；

【变式 5-1】下列式子能正确表示并计算“64 的平方根”的是（　）

A．$\sqrt{64} = \pm 8$　　B．$\pm\sqrt{64} = \pm 8$　　C．$\pm\sqrt[3]{64} = \pm 4$　　D．$\sqrt{64} = 8$

【答案】B

【分析】根据平方根的定义，先判断表示形式，再验证计算结果．即正数的平方根表示为$\pm\sqrt{a}$，$\sqrt{a}$是算术平方根，$\sqrt[3]{a}$是立方根.

【详解】解：64 的平方根需表示为$\pm\sqrt{64}$，A、C、D 均不符合该形式.

$\because \sqrt{64} = 8$，

$\therefore \pm\sqrt{64} = \pm 8$，选项 B 正确.

【变式 5-2】下列命题中，真命题是（　　）

A．若一个数的立方等于它本身，则这个数一定是 0

B．若一个数的绝对值等于它本身，则这个数一定是正数

C．若一个数的平方根等于它本身，则这个数是 0 和 1

D．若一个数的立方根等于它本身，则这个数为 0、1、-1

【答案】D

【详解】解：A 选项，$1^3 = 1$，即 1 的立方等于本身，故 A 为假命题；

B 选项，$|0| = 0$，即 0 的绝对值等于本身，故 B 为假命题；

C 选项，1 的平方根是± 1，不等于本身，故 C 为假命题；

D 选项，0，1，-1 的立方根均等于本身，故 D 为真命题.

【变式 5-3】如表为嘉琪同学的答卷，她的得分应是（　　）

姓名：嘉琪　得分：_____
填空：（每小题 20 分，共 100 分）
①$\sqrt{2}$的倒数是$-\sqrt{2}$；
②$-\sqrt{3}$的绝对值是_$\sqrt{3}$_；
③4 的算术平方根为_2_；
④平方根与立方根相等的数是_0_；
⑤$\sqrt[3]{(-2)^3} = \underline{-2}$.

A．40 分　　B．60 分　　C．80 分　　D．100 分

【答案】C

【分析】先根据倒数、绝对值、算术平方根、平方根、立方根的定义，逐个判断嘉琪的答案是否正确，再计算得分即可.

【详解】解：逐个判断正误：

①$\sqrt{2}$的倒数是$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，嘉琪答案错误；

②负数的绝对值是它的相反数，$|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$，嘉琪答案正确；

③算术平方根为非负数，4 的算术平方根是 2，嘉琪答案正确；

④只有 0 的平方根与立方根相等，嘉琪答案正确；

⑤$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$，嘉琪答案正确；

∴嘉琪共做对 4 道题，每小题 20 分，得分为 $4\times20=80$ 分.

【题型 6　利用平方根与立方根求值】

【例 6】（24-25 八年级下·山东聊城·期末）已知x是 5 的算术平方根，则x^2-13 的立方根是（　）

A．-8　　B．-3　　C．-2　　D．2

【答案】C

【分析】先根据算术平方根的定义确定 x 的值，再计算x^2-13 的值，最后求其立方根.

本题主要考查了算术平方根的定义和立方根的定义，熟练掌握算术平方根的定义和立方根的定义是解题的关键.

【详解】解：∵x 是 5 的算术平方根，

∴$x^2=5$，

∴$x^2-13=5-13=-8$，

-8 的立方根$=\sqrt[3]{-8}=-2$，

∴x^2-13 的立方根是-2，

故选：C.

【变式 6-1】计算$\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3$的结果为_____.

【答案】

0

【分析】根据平方、立方的运算法则计算即可.

【详解】解：$\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3$

$=2-2$

$=0$.

【变式 6-2】若$\sqrt{x-2}=5$，则 x 的立方根是_____

【答案】3

【分析】本题考查了算术平方根和立方根．根据算术平方根的定义可求出 x 的值，再求它的立方根.

【详解】解：∵$\sqrt{x-2}=5$，

∴$x-2=25$，

∴$x=27$，

∴x 的立方根是 3.

故答案为：3.

【变式 6-3】已知甲数是 $1\frac{7}{9}$的算术平方根，乙数是 $3\frac{3}{8}$的立方根，则甲、乙两个数的积是__.

【答案】2

【分析】分别根据算术平方根、立方根的定义可以求出甲数、乙数，进而即可求得题目结果.

【详解】解：∵甲数是 $1\frac{7}{9}$的算术平方根

∴甲数等于$\frac{4}{3}$;

∵乙数是 $3\frac{3}{8}$的立方根，

∴乙数等于$\frac{3}{2}$.

∴甲、乙两个数的积是$\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$.

故答案为：2.

【点睛】此题主要考查了算术立方根、平方根的定义，其中求一个数的立方根，应先找出所要求的这个数是哪一个数的立方．由开立方和立方是互逆运算，用立方的方法求这个数的立方根．注意一个数的立方根与原数的性质符号相同.

【题型 7　实数的分类】

【例 7】下列说法正确的是（　）

A．有理数是有限小数　　B．无理数是无限小数

C．无限小数是无理数　　D．$\frac{\pi}{3}$是分数

【答案】B

【分析】本题考查了实数的相关概念.

无理数就是无限不循环小数，有理数是整数与分数的统称．即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数．由此即可判定选择项..

【详解】A．有理数也包括无限循环小数（如$\frac{1}{3}$），原说法错误，本选项不符合题意；

B．无理数是无限不循环小数，原说法正确，本选项符合题意；

C．无限小数也包括无限循环小数，而无限循环小数是有理数，故原说法错误，本选项不符合题意；

D．$\frac{\pi}{3}$是无理数，分数属于有理数，原说法错误，本选项不符合题意；

故选：B.

【变式 7-1】（24-25 七年级下·全国·单元测试）下列说法正确的是（　）

A．正实数和负实数统称实数　　B．正数、和负数统称有理数

C．带根号的数和负数统称实数　　D．无理数和有理数统称实数

【答案】D

【分析】本题考查实数、有理数的定义，解题的关键是掌握：有理数和无理数统称为实数，整数和分数统称为有理数．据此解答即可．

【详解】解：A．有理数和无理数统称为实数，实数包括正实数、负实数和 0，原说法遗漏了 0，故原说法不正确，故此选项不符合题意；

B．有理数由正有理数、负有理数和 0 组成，而选项中的“正数”包含了无理数（如π），故原说法不正确，故此选项不符合题意；

C．有理数和无理数统称为实数，原说法不正确，故此选项不符合题意；

D．无理数和有理数统称实数，原说法正确，故此选项符合题意．

故选：D．

【变式 7-2】在①$-\frac{5}{2}$，②$\frac{\pi}{3}$，③$\sqrt{2}$，④$-\sqrt{\frac{1}{16}}$，⑤3.14，⑥0，⑦$\sqrt{2}-1$，⑧$\frac{\sqrt{5}}{2}$，⑨$|\sqrt{4}-1|$，⑩0.12122122（两个 1 之间依次多一个 2）中，请按下列要求填上对应的序号：

整数有_____；

负分数有_____；

正无理数有_____．

【答案】⑥⑨；①④；②③⑦⑧⑩

【分析】逐个分析每个数：如果一个数是像 0、绝对值化简后为整数的数，那么它属于整数；如果一个数是小于 0 的分数（包括可化为分数的有限小数），那么它属于负分数；如果一个数是大于 0 且无限不循环的小数，那么它属于正无理数．

【详解】解：整数有：⑥⑨；

负分数有：①④；

正无理数有：②③⑦⑧⑩．

【变式 7-3】把下列各数填入相应的集合内：

3.14，$\sqrt{5}$，-7，$\sqrt[3]{-27}$，$\frac{2}{3}$，$\sqrt{16}$，$-\pi$，0.7777…

(1)有理数集合：{　　}

(2)无理数集合：{　　}

(3)正实数集合：{　　}

(4)负实数集合：{　　}

【答案】(1)3.14，-7，$\sqrt[3]{-27}$，$\frac{2}{3}$，$\sqrt{16}$，0.7777…

(2)$\sqrt{5}$，$-\pi$；

(3)3.14，$\sqrt{5}$ ，$\frac{2}{3}$，$\sqrt{16}$，0.7777…；

(4)-7，$\sqrt[3]{-27}$，$-\pi$.

【分析】首先实数可以分为有理数和无理数，无限不循环小数称之为无理数，除了无限不循环小数以外的数统称有理数；正整数、0、负整数统称为整数；正实数是大于 0 的所有实数，负实数是小于 0 的所有实数；结合$\sqrt[3]{-27}=-3$，$\sqrt{16}=4$，由此即可求解.

【详解】（1）解：$\because \sqrt[3]{-27}=-3$，$\sqrt{16}=4$，

$\therefore$有理数集合：$\{3.14，-7，\sqrt[3]{-27}，\frac{2}{3}，\sqrt{16}，0.7777\cdots\}$

（2）解：无理数集合：$\{\sqrt{5}，-\pi\}$

（3）解：正实数集合：$\{3.14，\sqrt{5}，\frac{2}{3}，\sqrt{16}，0.7777\cdots\}$

（4）解：负实数集合：$\{-7，\sqrt[3]{-27}，-\pi\}$

【题型 8　无理数的估算】

【例 8】若n为正整数，且满足$n<\sqrt{13}<n+1$，则n的值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【答案】B

【分析】找到与 13 相邻的完全平方数，估算$\sqrt{13}$的取值范围，结合已知不等式确定n的值.

【详解】解：$\because 3^2=9$，$4^2=16$，且$9<13<16$，

$\therefore \sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$，即$3<\sqrt{13}<4$，

$\because n$为正整数且$n<\sqrt{13}<n+1$，

$\therefore n=3$.

【变式 8-1】估计$\sqrt{26}+1$ 的值在（　　）

A．4 和 5 之间　　B．5 和 6 之间　　C．6 和 7 之间　　D．7 和 8 之间

【答案】C

【详解】解：$\because \sqrt{25}<\sqrt{26}<\sqrt{36}$，

$\therefore 5<\sqrt{26}<6$，

$\therefore 6<\sqrt{26}+1<7$，

$\therefore$估计$\sqrt{26}+1$ 的值在 6 和 7 之间.

【变式 8-2】在$\sqrt{40}$与$\sqrt{50}$之间的整数是_____.

【答案】7

【详解】解：∵$6^2=36$，$7^2=49$，$8^2=64$，且$36<40<49<50<64$，

∴$6<\sqrt{40}<7<\sqrt{50}<8$，

因此$\sqrt{40}$与$\sqrt{50}$之间的整数是7.

【变式8-3】（24-25七年级下·湖南张家界·期中）规定无理数m的整数部分记为$[m]$，小数部分记为$\{m\}$，例如：$[\sqrt{5}]=2$，$\{\sqrt{5}\}=\sqrt{5}-2$.

(1)$[\sqrt{10}]=$_____；$\{\sqrt{26}\}=$_____.

(2)求$\{4+\sqrt{3}\}+\{4-\sqrt{3}\}$的值.

【答案】(1)3，$\sqrt{26}-5$；

(2)1.

【分析】本题考查了估算无理数的大小，求一个数的平方根．解题的关键是理解题意，掌握估算无理数大小的方法，正确计算.

（1）先根据无理数的大小估算办法估算即可；

（2）先根据无理数的大小估算办法估算，然后再计算实数的混合运算.

【详解】（1）解：∵$9<10<16$，

∴$3<\sqrt{10}<4$，

∴$[\sqrt{10}]=3$，

∵$25<26<36$，

∴$5<\sqrt{26}<6$，

∴$\{\sqrt{26}\}=\sqrt{26}-5$，

故答案为：3，$\sqrt{26}-5$；

（2）∵$1<\sqrt{3}<2$，

∴$5<4+\sqrt{3}<6$，$2<4-\sqrt{3}<3$，

∴$\{4+\sqrt{3}\}=4+\sqrt{3}-5=\sqrt{3}-1$，

$\{4-\sqrt{3}\}=4-\sqrt{3}-2=2-\sqrt{3}$，

∴$\{4+\sqrt{3}\}+\{4-\sqrt{3}\}=\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1$.

【题型9　实数与数轴的对应关系】

【例9】如图，数轴上在点A，点B之间，且表示整数的点有_____个.



【答案】4

【分析】本题考查利用数轴估算无理数的大小，解题关键是先判断A和B的范围.

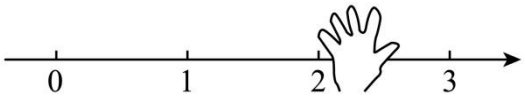
由大于$-\sqrt{2}$的最小整数为-1，小于$\sqrt{5}$的最大整数为 2，即可确定A，B两点之间表示整数的点的个数.

【详解】解：$\because -2<-\sqrt{2}<-1$，$2<\sqrt{5}<3$，

∴数轴上介于-1 和 2 之间的整数有-1、0、1、2，

∴在数轴上的点A，点B之间表示整数的点有 4 个.

【变式 9-1】如图，数轴上被手掌遮挡住的数可能是（）



A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{4}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{10}$

【答案】C

【分析】观察数轴确定被遮挡数的取值范围.

【详解】解：由图可知，被手掌遮挡住的数在 2 与 3 之间.

$\because 2=\sqrt{4},3=\sqrt{9}$，

∴该数应满足$\sqrt{4}<x<\sqrt{9}$，

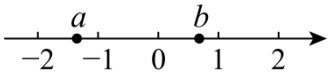
A．$\sqrt{3}<\sqrt{4}$，不合题意，

B．$\sqrt{4}=2$，不合题意，

C．$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$，符合题意，

D．$\sqrt{10}>\sqrt{9}$，不合题意.

【变式 9-2】实数a,b在数轴上的位置如图所示，则化简$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(a+b)^2}$的结果是（　　）



A．$2b$　　B．$-2a$　　C．$2(b-a)$　　D．0

【答案】A

【分析】根据数轴可得$a<0<b,|a|>|b|$，则$a+b<0$，然后化简绝对值即可.

【详解】解：由数轴可知：$a<0<b,|a|>|b|$，

$\therefore a+b<0$，

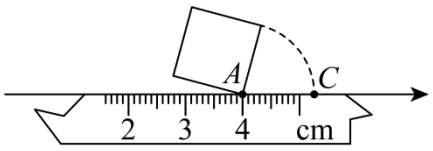
∴原式$=-a+b+(a+b)$

$=-a+b+a+b$

$=2b.$

【变式 9-3】将一把刻度尺如图所示放在数轴上（数轴的单位长度是 1cm），数轴上点A对应刻度尺上的

“4”，面积为 2cm^2的正方形其中一个顶点落在点C处，以点A为圆心，以正方形边长为半径作圆交数轴于点C．则点C在刻度尺上对应的数为_____．



【答案】$4+\sqrt{2}$

【详解】解：由题意得，正方形的边长为$\sqrt{2}$cm，

∵数轴上点A对应刻度尺上的“4”， 以点A为圆心，以正方形边长为半径作圆交数轴于点C

∴点C在刻度尺上对应的数为 $4+\sqrt{2}$．

【题型 10 实数的相反数与绝对值】

【例 10】$-\sqrt{7}$的绝对值是_____；$1-\sqrt[3]{3}$的相反数是_____．

【答案】 $\sqrt{7}$ $\sqrt[3]{3}-1$

【分析】根据绝对值和相反数的定义计算即可．

【详解】解：由题意得，$-\sqrt{7}$的绝对值为$\left|-\sqrt{7}\right|=-\left(-\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}$；

$1-\sqrt[3]{3}$的相反数为$-\left(1-\sqrt[3]{3}\right)=\sqrt[3]{3}-1$．

【变式 10-1】下列各组数中，互为相反数的是（ ）

A．2 与$\sqrt[3]{8}$ B．$\sqrt[3]{-2}$与$-\sqrt[3]{2}$ C．-2 与$\sqrt[3]{-8}$ D．$\sqrt[3]{5}$与$\sqrt[3]{-5}$

【答案】D

【详解】解：$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{-8}=-2$，故 A，B，C 选项中的两数均相等，不是相反数；

D 选项中，$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$，两数互为相反数．

【变式 10-2】下列关于$-\sqrt{7}$的说法错误的是（ ）

A．$-\sqrt{7}$的绝对值是$\sqrt{7}$ B．$-\sqrt{7}$的相反数是$\sqrt{7}$

C．$-\sqrt{7}$的倒数是$-\frac{1}{\sqrt{7}}$ D．$-\sqrt{7}$是有理数

【答案】D

【分析】根据绝对值，相反数，倒数，有理数和无理数的定义逐一判断选项，找出错误说法．

【详解】解：∵ 负数的绝对值是它的相反数，∴ $|-\sqrt{7}|=\sqrt{7}$，A 选项说法正确；

∵ 只有符号不同的两个数互为相反数，∴$-\sqrt{7}$的相反数是$\sqrt{7}$，B 选项说法正确；

∵ 乘积为 1 的两个数互为倒数，$(-\sqrt{7})\times\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=1$，∴$-\sqrt{7}$的倒数是$-\frac{1}{\sqrt{7}}$，C 选项说法正确；

∵ $\sqrt{7}$是开方开不尽的数，属于无理数，∴$-\sqrt{7}$是无理数，不是有理数，D 选项说法错误．

【变式 10-3】已知实数a、b互为倒数，实数c、d互为相反数，实数x的绝对值为$\sqrt{2}$，求$\frac{1}{2}ab+\frac{c+d}{5}+x^2$的值．

【答案】$\frac{5}{2}$

【分析】本题主要考查了相反数、倒数、绝对值的性质，求解代数式的值，正确掌握相关定义是解题关键．

根据相反数、倒数、绝对值的性质分别得出$ab=1,c+d=0,x=\pm\sqrt{2}$，然后代入计算即可解答．

【详解】解：∵实数a、b互为倒数，实数c、d互为相反数，实数x的绝对值为$\sqrt{2}$，

$\therefore ab=1,c+d=0,x=\pm\sqrt{2}$，

$\therefore x^2=(\pm\sqrt{2})^2=2$，

$\therefore \frac{1}{2}ab+\frac{c+d}{5}+x^2=\frac{1}{2}\times 1+0+2=\frac{5}{2}$．

【进阶拔高】

【题型 11　平方根与算术平方根的区别】

【例 11】下列说法不正确的是（　）

A．4 的平方根是± 2　　B．-8 的立方根是-2

C．5 没有算术平方根　　D．0 的平方根和立方根都是 0

【答案】C

【分析】本题主要考查了平方根、算术平方根和立方根的基本概念，解题的关键是掌握以上概念．

根据平方根和立方根的定义，逐一判断各选项的正确性．

【详解】解：A. 4 的平方根是± 2，该选项正确，不符合题意；

B. -8 的立方根是-2，该选项正确，不符合题意；

C. 5 的算术平方根是$\sqrt{5}$，该选项错误，符合题意；

D. 0 的平方根和立方根都是 0，该选项正确，不符合题意；

故选：C．

【变式 11-1】下列关于平方根、算术平方根、立方根的说法，正确的是（　）

A．算术平方根等于本身的数只有 0

B．平方根等于本身的数是 0 和 1

C．立方根等于本身的数是 0 和± 1

D．负数没有立方根

【答案】C

【分析】根据平方根、立方根的定义依次验证 4 个选项.

【详解】解：A、算术平方根等于本身的数是 0 和 1，故 A 项不符合题意；

B、平方根等于本身的数只有 0，故 B 项不符合题意；

C、立方根等于本身的数是 0 和±1，故 C 项符合题意；

D、负数有立方根，故 D 项不符合题意.

故答案为 C.

【变式 11-2】完成下列表格：

被开方数	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
算术平方根											
平方根											

【答案】

被开方数	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
算术平方根	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
平方根	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10

【分析】对于非负数a，若$x^2=a$，则x是a的平方根，其中非负的平方根是a的算术平方根，据此计算对应值即可

【详解】解：根据定义逐个计算：

当被开方数为 0 时，

∵ $0^2=0$，且 0 是非负数，

∴ 0 的算术平方根为 0，平方根为 0；

当被开方数为 1 时，

∵ $(\pm 1)^2=1$，其中非负平方根为 1，

∴ 1 的算术平方根为 1，平方根为±1；

当被开方数为 4 时，

∵ $(\pm 2)^2=4$，其中非负平方根为 2，

∴ 4 的算术平方根为 2，平方根为±2；

同理可推得其余被开方数的结果：

被开方数 9：算术平方根为 3，平方根为±3；

被开方数 16：算术平方根为 4，平方根为±4；

被开方数 25：算术平方根为 5，平方根为±5；

被开方数 36：算术平方根为 6，平方根为±6；

被开方数 49：算术平方根为 7，平方根为±7；

被开方数 64：算术平方根为 8，平方根为±8；

被开方数 81：算术平方根为 9，平方根为±9；

被开方数 100：算术平方根为 10，平方根为±10

完成表格见答案

【变式 11-3】如果一个正数的平方根是 m，那么这个数的另一个平方根是_____，这个数的算术平方根是_____，两个平方根的和是____.

【答案】 $-m$ $|m|$ 0

【分析】根据一个正数的两个平方根互为相反数即可求得另一个平方根，再根据算术平方根的非负性可得这个数的算术平方根，最后根据相反数的性质即可解答.

【详解】解：∵一个正数的平方根是 m，

∴那么这个数的另一个平方根是$-m$；

根据算术平方根的非负性可知，这个正数的算术平方根是$|m|$；

根据一个正数的两个平方根互为相反数可知，这个正数的 0.

故答案为$-m$，$|m|$，0.

【点睛】本题主考查了平方根、算术平方根的意义，掌握一个正数的两个平方根互为相反数是解答本题的关键.

【题型 12 已知平方根求这个数】

【例 12】已知一个正数的平方根分别为 $2a-1$ 和$-a+2$，这个正数是_____.

【答案】9

【分析】一个正数的两个平方根是互为相反数的，据此可得 $2a-1+(-a+2)=0$，求出$a=-1$，再根据平方根的定义即可求出这个正数.

【详解】解：∵一个正数的平方根分别为 $2a-1$ 和$-a+2$，

∴$2a-1+(-a+2)=0$，解得：$a=-1$，

∴$2a-1=-3$，

∴这个正数是$(-3)^2=9$.

【变式 12-1】（24-25 八年级上·河南郑州·阶段检测）若 $3-2a$与$a-1$ 是同一个数的两个不等的平方根，则这个数是（　）

A．2　　B．-2　　C．4　　D．1

【答案】D

【分析】本题考查平方根，解题的关键是正确理解平方根的定义．根据平方根的性质即可求出答案．

【详解】解：$3-2a$与$a-1$ 是同一个数的两个不等的平方根，

$\therefore 3-2a+a-1=0$，

解得：$a=2$，

$\therefore$这个数是$(a-1)^2=1$，

故选：D．

【变式 12-2】已知$-2x+1$ 和 $3x-2$ 是实数m的两个不同的平方根．

(1)求x，m的值；

(2)计算 $5x+7m^2$的值．

【答案】(1)

$x=1$，$m=1$

(2)

12

【分析】（1）一个正数的两个平方根互为相反数，据此列方程求出x的值，进而可求出m的值；

（2）根据（1）所求代入求值即可．

【详解】（1）解：$\because -2x+1$ 和 $3x-2$ 是实数m的两个不同的平方根，

$\therefore -2x+1+3x-2=0$，

解得$x=1$，

$\therefore m=(3x-2)^2=(3\times 1-2)^2=1$；

（2）解：由（1）得$x=1, m=1$，

$\therefore 5x+7m^2=5\times 1+7\times 1^2=5+7=12$．

【变式 12-3】已知 $2a+1$ 的平方根是± 3，$5a+2b-2$ 的算术平方根是 6，求 $5a-2b$的平方根．

【答案】$\pm\sqrt{2}$

【分析】根据平方根、算术平方根的概念列式求解得到$a=4, b=9$，再代入计算，最后算出平方根即可．

【详解】解：根据题意，$2a+1=(\pm 3)^2=9$，$5a+2b-2=6^2=36$，

解得$a=4, b=9$，

$\therefore 5a-2b=2$，

$\therefore 5a-2b$的平方根是$\pm\sqrt{2}$.

【题型 13　已知立方根求这个数】

【例 13】如果一个非零实数的立方根等于这个数本身，那么这个数是_____.

【答案】-1 或 1

【分析】设非零实数为 x，根据立方根的定义列出方程 $\sqrt[3]{x}=x$，通过立方运算和解方程求解.

本题考查了立方根，熟练掌握立方根的相关计算是解题的关键.

【详解】解：设这个非零实数为 x，则 $\sqrt[3]{x}=x$.

两边立方得 $x=x^3$，即 $x^3-x=0$.

因式分解得 $x(x-1)(x+1)=0$.

由于 $x\neq 0$，

所以 $x-1=0$ 或 $x+1=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=-1$.

经检验，$x=1$ 和 $x=-1$ 都满足题意.

故答案为 1 或 -1.

【变式 13-1】（24-25 七年级下·全国·课后作业）已知$\sqrt[3]{x-1}=x-1$，则x^2-x的值是_____.

【答案】0 或 2/2 或 0

【分析】本题考查立方根的性质，根据立方根等于它本身的数是 0 或±1，即可求出 x 的值，然后代入代数式求值即可.

【详解】解：$\because\sqrt[3]{x-1}=x-1$，

$\therefore x-1=0$ 或±1，

$\therefore x=1$ 或$x=2$ 或$x=0$，

当$x=1$ 时，$x^2-x=1^2-1=0$；

当$x=2$ 时，$x^2-x=2^2-2=2$；

当$x=0$ 时，$x^2-x=0^2-0=0$；

综上，x^2-x的值是 0 或 2，

故答案为：0 或 2.

【变式 13-2】已知$a+1$ 的平方根是±3，$b-1$ 的立方根是 2，则$(a-b)^{2025}$的值是（　　）

A．0　　B．1　　C．-1　　D．2^{2025}

【答案】C

【详解】解：∵$a+1$的平方根是± 3，$b-1$的立方根是2，

∴$a+1=(\pm 3)^2=9$，$b-1=2^3=8$，

解得$a=8$，$b=9$，

∴$(a-b)^{2025}=(8-9)^{2025}=(-1)^{2025}=-1$.

【变式 13-3】. 已知$x=\sqrt[a+b]{m}$是m的立方根，而$y=\sqrt[3]{b-6}$是x的相反数，且$m=3a-7$，求x与y的平方和的立方根.

【答案】2

【分析】根据立方根定义和相反数性质列方程组，求解得到$\begin{cases}a=5\\b=-2\end{cases}$，$m=8$，再计算$x^2+y^2$的立方根即可.

【详解】解：∵$x=\sqrt[a+b]{m}$是m的立方根，

∴$a+b=3$，$m=x^3$，

∵$y=\sqrt[3]{b-6}$是x的相反数，

∴$y=-x$，

∴$\sqrt[3]{b-6}=-x$，两边同时立方可得：$b-6=-x^3$，

又∵$-m=-x^3$，

∴$b-6=-m$，

∴$m+b=6$，

∵$m=3a-7$，

∴$3a-7=6-b$，

∴$\begin{cases}a+b=3\\3a-7=6-b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=5\\b=-2\end{cases}$，

∴$m=3a-7=8$，

∴$x=\sqrt[a+b]{m}=\sqrt[3]{8}=2$，$y=\sqrt[3]{-2-6}=\sqrt[3]{-8}=-2$，

∴$\sqrt[3]{x^2+y^2}=\sqrt[3]{2^2+(-2)^2}=\sqrt[3]{8}=2$.

【题型 14　利用算术平方根非负性求字母的值】

【例 14】已知实数a,b满足$a=\sqrt{2-b}+\sqrt{b-2}+5$，则$a-b$的值为_____.

【答案】3

【分析】根据二次根式有意义的条件，被开方数为非负数，列出不等式组求出b的值，再代入求出a的值，最后计算$a-b$即可.

【详解】解：根据二次根式的定义可得$\begin{cases}2-b\geq 0\\b-2\geq 0\end{cases}$，

解不等式组得$b=2$.

将$b=2$代入$a=\sqrt{2-b}+\sqrt{b-2}+5$，得$a=\sqrt{0}+\sqrt{0}+5=5$.

则$a-b=5-2=3$.

【变式 14-1】已知$|a-3|+\sqrt{3+b}=0$，则$\left(\frac{a}{b}\right)^{2027}=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

【答案】B

【分析】根据绝对值、算术平方根的非负性即可解出a、b的值，再把a、b的值代入$\left(\frac{a}{b}\right)^{2027}$，计算即可得答案.

【详解】解：$\because|a-3|+\sqrt{3+b}=0$，

$\therefore a-3=0$，$3+b=0$，

$\therefore a=3$，$b=-3$，

$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^{2027}=\left(\frac{3}{-3}\right)^{2027}=-1$.

【变式 14-2】已知$|2020-a|+\sqrt{a-2021}=a$，则2020^2-a的值为_____.

【答案】-2021

【分析】根据算术平方根的非负性确定a的取值范围，再化简绝对值，整理等式变形即可求出所求式子的值.

【详解】解：由题意可得，$a-2021\geq 0$，即 $a\geq 2021$，

$\therefore 2020-a<0$,

由$|2020-a|+\sqrt{a-2021}=a$，

可得$a-2020+\sqrt{a-2021}=a$，

$\sqrt{a-2021}=2020$，

$a-2021=2020^2$，

$\therefore 2020^2-a=-2021$.

【变式 14-3】设a，b都是实数，且满足$(a+2)^2+\sqrt{2-b}=0$，求式子a^2+2b的算术平方根.

【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】先由平方和算术平方根的非负性求解a,b，然后求解代数式的值，再求解算术平方根.

【详解】解：$\because(a+2)^2+\sqrt{2-b}=0,(a+2)^2\geq 0,\sqrt{2-b}\geq 0$

$\therefore a+2=0$，$2-b=0$

解得$a=-2$，$b=2$

则$a^2+2b=(-2)^2+2\times2=8$

所以a^2+2b的算术平方根为$2\sqrt{2}$.

【题型 15　实数的大小比较】

【例 15】比较大小：$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$_____1.（填“>”或“<”）

【答案】<

【分析】通过变形将问题转化为比较$\sqrt{7}$和 3 的大小，利用算术平方根的性质估算即可.

【详解】解：$\frac{\sqrt{7}-1}{2}-1=\frac{\sqrt{7}-1-2}{2}=\frac{\sqrt{7}-3}{2}$,

$\because\sqrt{7}<\sqrt{9}=3$,

$\therefore\sqrt{7}-3<0$,

$\therefore\frac{\sqrt{7}-1}{2}-1=\frac{\sqrt{7}-3}{2}<0$,

$\therefore\frac{\sqrt{7}-1}{2}<1$.

【变式 15-1】在实数-2.23，$-\sqrt{3}$，$-\sqrt{5}$，3 中，最小的数是（　　）

A．$-\sqrt{5}$　　B．-2.23　　C．$-\sqrt{3}$　　D．3

【答案】A

【分析】根据$(\sqrt{3})^2=3$，$(|-2.23|)^2=4.9729$，$(\sqrt{5})^2=5$，确定绝对值的大小，根据实数的大小比较，求解即可.

【详解】解：3 是正数，-2.23，$-\sqrt{3}$，$-\sqrt{5}$均为负数，

∵正数大于负数，

∴3 是最大的数；

$-\sqrt{3}$，-2.23，$-\sqrt{5}$的绝对值分别为$\sqrt{3}$，2.23，$\sqrt{5}$，且$(\sqrt{3})^2=3$，$(|-2.23|)^2=4.9729$，$(\sqrt{5})^2=5$，

$\because5>4.9729>3$,

$\therefore\sqrt{5}>2.23>\sqrt{3}$,

∵ 两个负数比较大小，绝对值大的数反而小，

$\therefore-\sqrt{5}<-2.23<-\sqrt{3}$,

故$-\sqrt{5}$是最小的.

【变式 15-2】已知a是$(-2)^2$的负平方根，$b=|-\sqrt{4^2}|$，$c=\sqrt[3]{-64}$，则a，b，c中最大的实数与最小的实数的差是（　　）

A．-2　　B．2　　C．6　　D．8

【答案】D

【分析】根据平方根、绝对值、立方根的定义分别求出a，b和c的值，比较大小得到最大数和最小数，计算两者的差即可.

【详解】解：a是$(-2)^2$的负平方根，

$\therefore a=-\sqrt{(-2)^2}=-\sqrt{4}=-2.$

$\because b=\left|-\sqrt{4^2}\right|=\left|-\sqrt{16}\right|=|-4|=4$，$c=\sqrt[3]{-64}=-4$，

$\therefore -4<-2<4$，即$c<a<b$

∴最大的实数是b，最小的实数是c，

$\therefore b-c=4-(-4)=4+4=8.$

【变式 15-3】比较下列各组数的大小：

(1)$\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{3}$；

(2)$-\sqrt[3]{4}$与$-\sqrt[3]{3}$.

【答案】(1)$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)$-\sqrt[3]{4}<-\sqrt[3]{3}$

【分析】（1）对两个正根式作 6 次乘方，转化为有理数比较大小.

（2）先比较立方根的大小，再推导负数的大小关系.

【详解】（1）解：$\because \sqrt{2}>0$，$\sqrt[3]{3}>0$，

$\therefore (\sqrt{2})^6=[(\sqrt{2})^2]^3=2^3=8$，$(\sqrt[3]{3})^6=[(\sqrt[3]{3})^3]^2=3^2=9$；

$\because 8<9$，

$\therefore \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$；

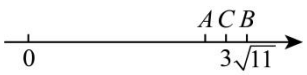
（2）解：$\because 4>3$，

$\therefore \sqrt[3]{4}>\sqrt[3]{3}$，

$\therefore -\sqrt[3]{4}<-\sqrt[3]{3}.$

【题型 16　实数在数轴上的位置判断】

【例 16】如图，3，$\sqrt{11}$在数轴上对应的点分别为C,B，点C是AB的中点，则数轴上点A表示的数是_____.



【答案】

$6-\sqrt{11}$

【分析】本题考查了实数与数轴的特征，以及两点间的距离的求法，解题的关键是要熟练掌握这些内容．

设A表示的数是a，根据$AC = CB$，求出a的值即可．

【详解】解：设A表示的数是a，

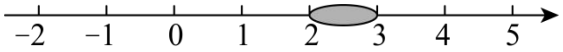
$\because AC = CB$，

$\therefore 3 - a = \sqrt{11} - 3$

$\therefore a = 6 - \sqrt{11}$．

【变式 16-1】若将$\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{10}$这三个数表示在数轴上，其中能被如图所示的墨迹（阴影）覆盖的数是

_____．



【答案】$\sqrt{7}$

【分析】首先利用算术平方根的性质估算出$\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{10}$分别在哪两个连续整数之间，然后观察数轴确定墨迹覆盖的数值范围，最后找出位于该范围内的数．

【详解】解：$\because 1 < 3 < 4$，

$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2$，

$\because 4 < 7 < 9$，

$\therefore 2 < \sqrt{7} < 3$，

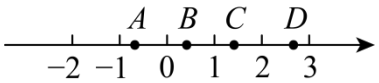
$\because 9 < 10 < 16$，

$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4$，

由图可知，墨迹覆盖的范围是 2 到 3 之间，

∴能被墨迹覆盖的数是$\sqrt{7}$．

【变式 16-2】如图，在数轴上有 A，B，C，D 四个点，则下列说法正确的是（　　）



A．点 A 表示的数可能是$-\sqrt{3}$　　B．点 B 表示的数可能是$\sqrt{2}$

C．点 C 表示的数可能是$\sqrt{5}$　　D．点 D 表示的数可能是$\sqrt{7}$

【答案】D

【分析】先估算各选项中无理数的大小，确定其所在的整数区间，再结合数轴上各点的位置进行判断．

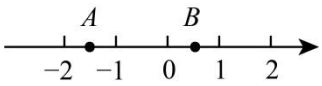
【详解】解：$\because 1 < 3 < 4$，$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2$，$\therefore -2 < -\sqrt{3} < -1$，而点$A$在$-1$与 0 之间，故 A 选项错误；

$\because 1 < 2 < 4$，$\therefore 1 < \sqrt{2} < 2$，而点$B$在 0 与 1 之间，故 B 选项错误；

∵ $4<5<9$， ∴ $2<\sqrt{5}<3$， 而点C在 1 与 2 之间，故 C 选项错误；

∵ $4<7<9$， ∴ $2<\sqrt{7}<3$， 而点D在 2 与 3 之间，故 D 选项正确.

【变式 16-3】如图，一只蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬了 2 个单位长度到达点 B，点 A 表示$-\sqrt{2}$，设点 B 所表示的数为 m.



(1)实数 m 的值是_____.

(2)求$|m+1|+|m-1|$的值；

(3)在数轴上还有 C、D 两点分别表示实数 c 和 d，且有$|2c+4|$与$\sqrt{d-4}$互为相反数，求 $2c+3d$的平方根.

【答案】(1)$2-\sqrt{2}$；

(2)$|m+1|+|m-1|$的值为 2；

(3)$2c+3d$的平方根为$\pm 2\sqrt{2}$.

【分析】（1）根据点A沿数轴向右爬了 2 个单位长度到达点B，即可得到m的值；

（2）根据数轴得到m的取值范围，去绝对值化简即可得出答案；

（3）根据非负数的性质得到c,d的值，代入求值，再求平方根得出答案.

【详解】（1）解：∵点 A 表示$-\sqrt{2}$，蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬了 2 个单位长度到达点 B，

∴点B表示的数为：$m=2-\sqrt{2}$；

（2）解：由数轴可知，$0<m<1$，

∴$m+1>0$，$m-1<0$，

∴ $|m+1|+|m-1|=m+1+1-m=2$.

（3）解：∵ $|2c+4|$与$\sqrt{d-4}$互为相反数，

∴ $|2c+4|+\sqrt{d-4}=0$，

∵ $|2c+4|\geq 0$，$\sqrt{d-4}\geq 0$

∴ $2c+4=0$，$d-4=0$，

解得：$c=-2$，$d=4$，

∴ $2c+3d=2\times(-2)+3\times 4=8$，

∴ $2c+3d$的平方根为$\pm 2\sqrt{2}$.

【题型 17　平方根与立方根综合求值】

【例 17】已知$a-b$是 27 的立方根，$3a+b-1$ 的算术平方根是 4.

(1)求a与b的值；

(2)求$a+2b$的平方根.

【答案】(1)$a=5$，$b=2$

(2)$a+2b$的平方根为± 3

【分析】（1）根据立方根和算术平方根的定义列出关于a、b的方程，联立求解得到a、b的值；

（2）将a与b的值代入计算$a+2b$，最后根据平方根的定义得到结果.

【详解】（1）解：$\because a-b$是 27 的立方根，且 27 的立方根是 3，

$\therefore a-b=3$，

$\because 3a+b-1$ 的算术平方根是 4，

$\therefore 3a+b-1=4^2=16$，

整理得 $3a+b=17$，

联立得方程组$\begin{cases} a-b=3 \\ 3a+b=17 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases}$；

（2）解：把$a=5$，$b=2$ 代入$a+2b$得$a+2b=5+2\times 2=9$，

$\therefore a+2b$的平方根为$\pm\sqrt{9}=\pm 3$.

【变式 17-1】已知a的算术平方根是 12.3，b的立方根是-45.6，x的平方根是± 1.23，y的立方根是 456，则x和y分别是（　）

A．$x=\frac{a}{1000},y=100b$　　B．$x=1000a,y=\frac{b}{1000}$

C．$x=\frac{a}{100},y=-1000b$　　D．$x=\frac{a}{100},y=1000b$

【答案】C

【分析】利用算术平方根和平方根，立方根的性质，可得到a，b的值，由此可得到x与a和y与b的关系

【详解】解：$\because a$的算术平方根是 12.3，b的立方根是-45.6，x的平方根是± 1.23，y的立方根是 456，

$\therefore a=12.3^2=100\times 1.23^2,b=(-45.6)^3$，

$x=1.23^2,y=1000\times 45.6^3$

$\therefore x=\frac{a}{100},y=-1000b$.

故选：C.

【点睛】本题考查了算术平方根和平方根，立方根的性质，得出x与a和y与b的关系是解题的关键.

【变式 17-2】已知 $2a-1$ 的平方根是± 3，$3a+b-1$ 的立方根是 4，c是算术平方根等于自身的数，则$a+2b-c^2=$_____.

【答案】105 或 104

【分析】本题考查平方根、算术平方根与立方根，解题的关键是理解算术平方根等于自身的数存在 0 与 1 两种情况.

根据平方根、算术平方根与立方根的定义分别计算出 a、b、c 的值，再代入代数式求值即可.

【详解】由题意可知：$2a-1=9, 3a+b-1=64, \sqrt{c}=c$

解得：$a=5, b=50, c=0$ 或 $c=1$.

$\therefore a+2b-c^2=5+2\times 50-0^2=105$，

或 $a+2b-c^2=5+2\times 50-1^2=104$.

故答案为：105 或 104.

【变式 17-3】已知一个非负数c的平方根是 $2a-3$ 与 $3a-2$，$a+3b-1$ 的算术平方根是 4.

(1)求a，b，c的值；

(2)求：$a+b+c+1$ 的立方根.

【答案】(1)$a=1$，$b=\frac{16}{3}$，$c=1$

(2)$\sqrt[3]{\frac{25}{3}}$

【分析】（1）根据平方根的定义列方程求出a，进而求出c，再根据算术平方根的定义列方程求出b；

（2）先求出$a+b+c+1$，再根据立方根的定义求解即可.

【详解】（1）解：∵一个非负数c的平方根是 $2a-3$ 与 $3a-2$，

$\therefore 2a-3+3a-2=0$，

解得$a=1$，

∴非负数c的一个平方根是 $2a-3=2\times 1-3=-1$，

$\therefore\ c=(-1)^2=1$，

∵ $a+3b-1$ 的算术平方根是 4，$a=1$，

$\therefore 1+3b-1=4^2$，

解得$b=\frac{16}{3}$;

（2）解：∵ $a=1$，$b=\frac{16}{3}$，$c=1$，

$\therefore\ a+b+c+1=1+\frac{16}{3}+1+1=\frac{25}{3}$，

$\therefore$ $a+b+c+1$ 的立方根为$\sqrt[3]{\frac{25}{3}}$.

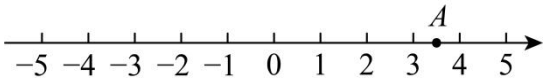
【题型 18　无理数估算与整数部分】

【例 18】阅读下面的文字，解答问题：大家知道$\sqrt{2}$是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此$\sqrt{2}$的小数部分我们不可能全部写出来．将这个数减去其整数部分，差就是小数部分，因为$\sqrt{2}$的整数部分是 1，于是用$\sqrt{2}-1$来表示$\sqrt{2}$的小数部分．

又例如：

$\because \sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$，即 $2<\sqrt{7}<3$，

$\therefore \sqrt{7}$的整数部分是 2，小数部分为$\sqrt{7}-2$．



(1)$\sqrt{17}$的整数部分是_____，小数部分是_____；

(2)点A表示的数为无理数，在数轴上的位置如图所示，若其整数部分为m，小数部分为n，则下列对于m，n的说法正确的是_____（填序号即可）；

①m，n均为有理数；②$1<\sqrt{m}<2$；③$3<m-n<4$；④$3<m+n<4$

(3)若m，n分别是 $6-\sqrt{5}$的整数部分和小数部分，求 $3m-n$的值．

【答案】(1)4，$\sqrt{17}-4$

(2)②④

(3)$6+\sqrt{5}$

【分析】（1）估算$\sqrt{17}$范围，直接写出整数部分，用原数减去整数部分得到小数部分；

（2）从数轴读出A的取值范围，分离出整数m与小数n，对四个选项逐一推理判断；

（3）先估算$\sqrt{5}$范围，再推出 $6-\sqrt{5}$的范围，求出整数部分m和小数部分n，再代入式子计算．

【详解】（1）解：$\because \sqrt{16}<\sqrt{17}<\sqrt{25}$，即 $4<\sqrt{17}<5$，

$\therefore \sqrt{17}$的整数部分是 4，小数部分为$\sqrt{17}-4$．

（2）解：据图可知 $3<A<4$，

则$m=3$，$n=A-3$，

A为无理数，则$A-3$ 为无理数，

可得m为有理数，n为无理数，

故①不正确；

$\sqrt{m}=\sqrt{3}$，$1<\sqrt{3}<\sqrt{4}$，即 $1<\sqrt{3}<2$，

故 $1<\sqrt{m}<2$，②正确；

$m-n=3-(A-3)=6-A$，

∵ $3 < A < 4$，

∴ $-4 < -A < -3$，$2 < 6 - A < 3$，

∴ $2 < m - n < 3$，

故③不正确；

$m + n = 3 + (A - 3) = A$，

∵ $3 < A < 4$，

∴ $3 < m + n < 4$，

∴④正确，

综上，正确的说法为②④.

（3）解：$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$，即 $2 < \sqrt{5} < 3$，

则$-3 < -\sqrt{5} < -2$，

可得 $3 < 6 - \sqrt{5} < 4$，

则$m = 3$，$n = 6 - \sqrt{5} - 3 = 3 - \sqrt{5}$，

故 $3m - n = 3 \times 3 - (3 - \sqrt{5}) = 6 + \sqrt{5}$.

【变式 18-1】已知$\sqrt{13}$的整数部分为a，小数部分为b，则代数式$a - b$的值为（　　）.

A．$6 - \sqrt{13}$　　B．$6 + \sqrt{13}$　　C．$\sqrt{13} - 6$　　D．6

【答案】A

【详解】解：∵ $9 < 13 < 16$，

∴ $3 < \sqrt{13} < 4$，

∴ $a = 3$，

∴ $b = \sqrt{13} - 3$，

∴ $a - b = 3 - (\sqrt{13} - 3) = 6 - \sqrt{13}$.

【变式 18-2】若$\sqrt{17}$的整数部分是 x，小数部分是 y，则$\frac{x+y}{x}$的值为_____.

【答案】$\frac{\sqrt{17}}{4}$

【分析】先估算$\sqrt{17}$的取值范围，确定$\sqrt{17}$的整数部分x，再根据无理数中整数部分与小数部分的关系得到小数部分 y，最后代入所求代数式计算即可.

【详解】解：∵ $16 < 17 < 25$，

∴ $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$，即 $4 < \sqrt{17} < 5$，

∴ $\sqrt{17}$的整数部分$x = 4$，

小数部分$y = \sqrt{17} - 4$，

将$x=4$，$y=\sqrt{17}-4$代入$\frac{x+y}{x}$，得$\frac{4+\sqrt{17}-4}{4}=\frac{\sqrt{17}}{4}$.

【变式 18-3】阅读《无理数》课堂实录，解决问题.

数学课上，老师带着大家学习无理数.

老师：大家知道无理数是无限不循环小数，因此一个无理数的小数部分，我们是不可能完全写出来的，那么，有什么方法表示出无理数的小数部分呢？例如：$\sqrt{2}$.

聪聪：我们可以用$\sqrt{2}-1$来表示$\sqrt{2}$的小数部分.

老师：为什么？

聪聪：因为$\sqrt{2}$的整数部分是 1，用这个数减去其整数部分，差就是小数部分.

老师：聪聪真聪明，那么你知道含有无理数的两个数之和的小数部分怎么表示吗？例如$\sqrt{6}+3$.

聪聪：这个还真是不清楚了.

(1)请同学们帮聪聪表示一下$\sqrt{6}+3$的小数部分为_；

(2)请同学们写出一个与$\sqrt{13}$的小数部分相同的无理数，并说明理由；

(3)若a为$\sqrt{11}-2$的小数部分，b为$6-\sqrt{11}$的小数部分，求$a+b$的平方根.

【答案】(1)$\sqrt{6}-2$

(2)取无理数$\sqrt{13}+1$（答案不唯一），理由如下：

$\because 3^2=9$，$4^2=16$，$9<13<16$，

$\therefore 3<\sqrt{13}<4$，

$\therefore 4<\sqrt{13}+1<5$，$\sqrt{13}$的小数部分为$\sqrt{13}-3$，

$\therefore \sqrt{13}+1$的整数部分为 4，$\sqrt{13}+1$的小数部分为$\sqrt{13}+1-4=\sqrt{13}-3$，

二者小数部分相等，符合要求.

(3)±1

【分析】（1）通过平方数估算无理数取值范围，确定整数部分，用原数减去整数部分得到小数部分；

（2）利用“无理数加整数后小数部分不变”构造同小数部分的无理数；

（3）分别表示出两个代数式的小数部分再相加，最后计算和的平方根.

【详解】（1）解：$\because 2^2=4$，$3^2=9$，$4<6<9$，

$\therefore 2<\sqrt{6}<3$，

$\therefore 5<\sqrt{6}+3<6$，

$\therefore \sqrt{6}+3$的整数部分为 5，

$\therefore \sqrt{6}+3$ 的小数部分为$\sqrt{6}+3-5=\sqrt{6}-2$；

（2）略

（3）解：$\because 3<\sqrt{11}<4$，

$\therefore 1<\sqrt{11}-2<2$，$2<6-\sqrt{11}<3$，

$\therefore \sqrt{11}-2$ 的整数部分为 1，$6-\sqrt{11}$的整数部分为 2，

$\therefore a=\sqrt{11}-2-1=\sqrt{11}-3$，$b=6-\sqrt{11}-2=4-\sqrt{11}$，

$\therefore a+b=(\sqrt{11}-3)+(4-\sqrt{11})=1$，

$\therefore a+b$的平方根为± 1.

【题型 19　实数的综合运算】

【例 19】计算：$\sqrt{9}-|1-\sqrt{3}|+(-2)^2-\sqrt[3]{-27}$

【答案】$11-\sqrt{3}$

【详解】解：原式$=3-[-(1-\sqrt{3})]+4-(-3)$

$=3+1-\sqrt{3}+4+3$

$=4-\sqrt{3}+7$

$=11-\sqrt{3}$

【变式 19-1】计算：

(1)$\sqrt{3}+\sqrt[3]{8}-\sqrt{(-2)^2}-|1-\sqrt{3}|$；

(2)$\sqrt{0.25}-\sqrt[3]{\frac{19}{27}-1}-(-1)^5$.

【答案】(1)1

(2)$\frac{13}{6}$

【详解】（1）解：$\sqrt{3}+\sqrt[3]{8}-\sqrt{(-2)^2}-|1-\sqrt{3}|$

$=\sqrt{3}+2-2+1-\sqrt{3}$

$=1$；

（2）解：$\sqrt{0.25}-\sqrt[3]{\frac{19}{27}-1}-(-1)^5$

$=0.5-\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}-(-1)$

$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)+1$

$=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{6}{6}$

$=\frac{13}{6}$.

【变式 19-2】计算：

(1)$-2\times\sqrt[3]{-27}+|2-\sqrt{5}|-\sqrt{(-5)^2}$

(2)$x^2-16=0$；

(3)$(x-2)^3=-125$.

【答案】(1)$\sqrt{5}-1$

(2)$x=\pm 4$

(3)$x=-3$

【详解】（1）解：$-2\times\sqrt[3]{-27}+|2-\sqrt{5}|-\sqrt{(-5)^2}$

$=-2\times(-3)+\sqrt{5}-2-5$

$=6+\sqrt{5}-7$

$=\sqrt{5}-1$

（2）解：$x^2-16=0$

移项得：$x^2=16$，

直接开平方得：$x=\pm 4$；

（3）解：$(x-2)^3=-125$

开立方得：$x-2=-5$，

解得：$x=-3$.

【变式 19-3】计算：$\sqrt{81}+\sqrt[3]{-27}+|1-\sqrt{3}|+(-2)^2$.

【答案】$9+\sqrt{3}$

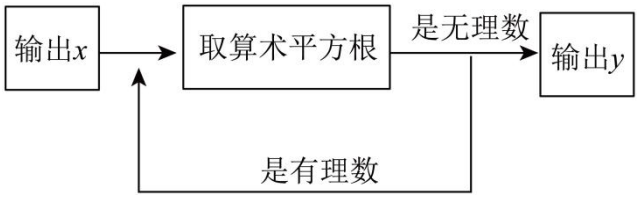
【详解】解：$\sqrt{81}+\sqrt[3]{-27}+|1-\sqrt{3}|+(-2)^2$

$=9-3+\sqrt{3}-1+4$

$=9+\sqrt{3}$

【题型 20　程序设计与实数运算】

【例 20】如图，这是一个数值转换器.



(1)当输入 x 的值为 9 时，输出$y=$_____.

(2)小明输入了下面的三个备选数据中的某一个，转换器在运算时显示“运算无意义”．请你判断输入 x 的值可能是哪一个数据？并说明理由．备选数据：4，$\frac{5}{7}$，$-\frac{1}{3}$.

(3)小明输入了某个 x 的值后得到了$\sqrt{2}$，请你写出 2 个不同的 x 值．

【答案】(1)$\sqrt{3}$

(2)

解：输入 x 的值可能是$-\frac{1}{3}$，理由如下：

∵运算无意义，即输入的数没有算术平方根，

∴输入的数为负数，

∴输入 x 的值可能是$-\frac{1}{3}$;

(3)2 或 4

【分析】本题主要考查了求一个数的算术平方根，无理数的识别，正确理解题意是解题的关键．

（1）先计算 9 的算术平方根，由结果为无理数则输出，若为有理数则把计算的结果作为新数输入再取算术平方根，直至结果为无理数输出即可；

（2）运算无意义，则输入的数没有算术平方根，即输入的数为负数，据此可得答案；

（3）第一次取算术平方根后输出的结果为$\sqrt{2}$时，则输入的数为$\sqrt{2}$的平方，第二次取算术平方根后输出的结果为$\sqrt{2}$，则输入的数为$\sqrt{2}$的平方的平方，据此可得所有可能输入的数，进而得到答案．

【详解】（1）解：$\sqrt{9}=3$ 是有理数，

$\sqrt{3}$是无理数，

∴当输入 x 的值为 9 时，输出$y=\sqrt{3}$;

（2）略

（3）解：当第一次取算术平方根后输出的结果为$\sqrt{2}$时，则输入的数为 2，

当第二次取算术平方根后输出的结果为$\sqrt{2}$时，则第一次取算术平方根后的结果为 2，

∴输入的数为$2^2=4$，

同理可得当第三次取算术平方根后输出的结果为$\sqrt{2}$时，则输入的数为$4^2=16$，……，

∴输入的数可以为 2 或 4.

【变式 20-1】如图，小雅用计算机设计了一个运算程序图，若输入的x的值为 8 时，输出的结果是

_____.



【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

【分析】根据程序图所示的运算顺序，对输入的x依次进行平方、开立方、取倒数、开算术平方根的运算即可得出结果.

【详解】解：第一步，取x的平方，即$x^2=8^2=64$，

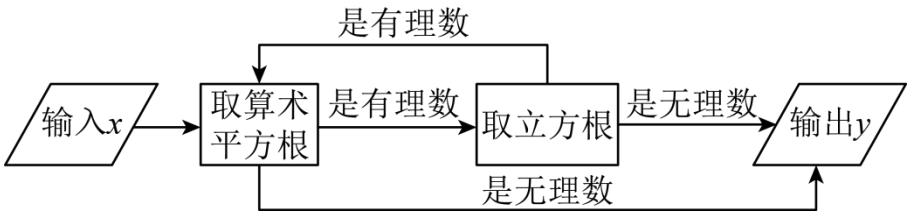
第二步，对结果取立方根，即$\sqrt[3]{64}=4$，

第三步，对结果取倒数，即$\frac{1}{4}$，

第四步，对结果取算术平方根，即$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，

因此，当输入$x=8$时，输出的结果是$\frac{1}{2}$.

【变式 20-2】在如图所示的运算程序中，若输入x的值是 729，则输出y的值是（　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt[3]{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt[3]{3}$

【答案】C

【分析】根据流程图，列出算式进行计算即可.

【详解】解：当输入x的值是 729 时，取算术平方根得$\sqrt{729}=27$，

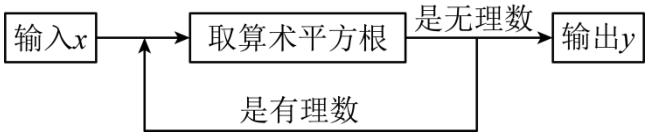
27 是有理数，再取立方根得$\sqrt[3]{27}=3$，

3 是有理数，再取算术平方根得$\sqrt{3}$，

由于$\sqrt{3}$是无理数，

所以输出的y值是$\sqrt{3}$.

【变式 20-3】有一个数值转换器．原理如图.



（1）当输入的x为 81 时，输出的y是多少？

（2）是否存在输入有效的x值后，始终输不出y值？如果存在．请写出所有满足要求的x的值；如果不存在，请说明理由；

（3）小明输入数据，在转换器运行程序时，屏幕显示“该操作无法运行”，请你推算输入的数据可能是什么情况？

（4）若输出的y是$\sqrt{5}$，试判断输入的x值是否唯一？若不唯一，请写出其中的两个．

【答案】（1）$\sqrt{3}$；（2）0 或 1；

（3）∵负数没有算术平方根，

∴输入的数据可能是负数；

（4）不唯一，5 和 25

【分析】（1）根据运算规则即可求解；

（2）根据 0 和 1 的算术平方根即可判断；

（3）根据算术平方根的定义，被开方数是非负数即可求解；

（4）找到使得输出值为$\sqrt{5}$的两个数即可．

【详解】解：（1）当 x=81 时，

$\sqrt{81}$=9，$\sqrt{9}$=3，$\sqrt{3}$是无理数，

故 y=$\sqrt{3}$；

（2）当 x=0 或 1 时，始终输不出 y 值．

因为 0，1 的算术平方根是 0，1，一定是有理数；

（3） 略

（4）25 的算术平方根是 5，5 的算术平方根是$\sqrt{5}$，

故输入的x值不唯一，例如 5 和 25．

【点睛】此题主要考查了算术平方根，正确把握数值转换器的原理是解题关键．

【创新思辨】

【题型 21　算术平方根的应用】

【例 21】小亮有一枚体积为 125cm^{3}的正方体玉石印章，可以放进一个体积为 180cm^{3}的长方体木匣中（不考虑木匣的厚度），木匣的宽与印章的棱长相等，木匣的长与高相等，则木匣的长为_____cm．

【答案】6

【分析】先根据正方体体积公式求出印章的棱长，得到长方体木匣的宽，再设木匣的长为未知数，根据长方体体积公式求解即可．

【详解】解：设正方体印章的棱长为$a$cm，

由正方体体积公式得：$a^3=125$，

$\therefore a=\sqrt[3]{125}=5$，

因此木匣的宽为 5cm，

设木匣的长为$x$cm，则木匣的高也为$x$cm，

根据长方体体积公式可得：$5x^2=180$，即$x^2=36$，

所以$x=\sqrt{36}=6$，

即木匣的长为 6cm.

【变式 21-1】青少年体重指数（BMI）是评价青少年营养状况、肥胖的一种衡量方式．其中体重指数 BMI 计算公式：$\mathrm{BMI}=\frac{G}{h^2}(\mathrm{kg/m^2})$，其中 G 表示体重(kg)，h 表示身高(m)．已知小红的体重为 45kg，她的 BMI 值为 20，则她的身高是_____ m．

【答案】

1.5

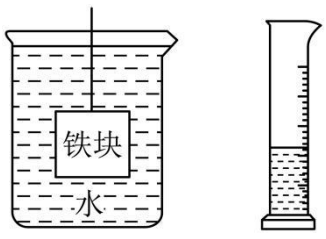
【详解】解：设小红的身高为xm，

由题意得 $20=\frac{45}{x^2}$，

整理得$x^2=\frac{45}{20}=\frac{9}{4}$，

解得$x=\frac{3}{2}$（负值舍去），则她的身高是 1.5m.

【变式 21-2】（24-25 八年级上·山西长治·期中）如图，在做浮力实验时，小明用一根细线将一个正方体铁块拴住，完全浸入盛满水的圆柱形烧杯中，并用量筒量得溢出水的体积为 45cm^3；然后小明将铁块从烧杯中提起至完全脱离水面，量得烧杯中的水位下降 0.6cm．当$\pi\approx3$ 时，烧杯内部的底面半径为_____cm．



【答案】5

【分析】本题考查平方根的应用，根据溢出的水的体积等于圆柱的体积建立方程求解即可．弄清题意并列出方程是解题的关键．

【详解】解：烧杯内部的底面半径为$r$cm， 根据题意，得：

$\pi r^2 \times 0.6 = 45$，

$\therefore r^2 = \frac{45}{0.6\pi} \approx 25$，

$\therefore r \approx 5$ 或$r \approx -5$，

$\because r > 0$，

$\therefore r \approx 5(\text{cm})$

即烧杯内部的底面半径为 5cm.

故答案为：5.

【变式 21-3】小康为研究汽车紧急制动时的安全刹车距离，整理出如下实验数据：

v	34	34.1	34.2	34.3	34.4	34.5	34.6	34.7	34.8	34.9	35
v^2	1156	1162.81	1169.64	1176.49	1183.36	1190.25	1197.16	1204.09	1211.04	1218.01	1225

根据上述表格内容，完成下列问题.

(1)比较大小：$\sqrt{1227}$_____35；

(2)汽车在干燥水泥路面紧急刹车时，制动距离s（单位：m）与刹车前的行驶速度v（单位：m/s）之间的关系近似满足$v^2 = 19.6s$. 现有一辆汽车在该路面行驶时突发状况，紧急刹车后测得制动距离$s = 60\text{m}$，求这辆汽车刹车前的行驶速度大约是多少？

【答案】(1)>

(2)这辆汽车刹车前的行驶速度大约是 34.3m/s

【分析】（1）由表中数据得到$35^2 = 1225$，结合无理数比较大小的方法求解即可；

（2）先由题中数据求出$v = \sqrt{1176}$，再由表中数据估算出$v = \sqrt{1176} \approx 34.3\text{m/s}$ 即可.

【详解】（1）解：由表中数据可知，$35^2 = 1225$，

$\because \left(\sqrt{1227}\right)^2 = 1227 > 1225$，

$\therefore \sqrt{1227} > \sqrt{1225} = 35$；

（2）解：根据公式$v^2 = 19.6s$，代入制动距离$s = 60\text{m}$，

得$v^2 = 19.6 \times 60 = 1176$，

则$v = \sqrt{1176}$或$v = -\sqrt{1176}$（负值，舍去），

结合表格中的数据，可知$(34.3)^2 = 1176.49$，则$v = \sqrt{1176} \approx 34.3\text{m/s}$，

答：这辆汽车刹车前的行驶速度大约是 34.3m/s.

【题型 22　含参平方根与立方根综合】

【例 22】按要求解题

(1)若$\sqrt{x+4}+\sqrt{5y-10}=0$，求$xy$的立方根；

(2)若$\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{3x-5}=0$，求$1-\sqrt{x}$的值.

【答案】(1)-2

(2)-1

【分析】（1）利用算术平方根的非负性求出 x、y 的值，再计算xy的立方根即可；

（2）利用立方根的性质求出 x 的值，进而代入 $1-\sqrt{x}$计算即可.

【详解】（1）解：根据题意可得$x+4=0,5y-10=0$，

解得$x=-4,y=2$，

$\therefore xy=-4\times2=-8$，

$\because\sqrt[3]{-8}=-2$；

$\therefore xy$的立方根为-2；

（2）解：$\because\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{3x-5}=0$，

$\therefore\sqrt[3]{1-2x}=-\sqrt[3]{3x-5}$，

$\therefore1-2x=-3x+5$，

解得$x=4$，

$\therefore1-\sqrt{x}$

$=1-\sqrt{4}$

$=1-2$

$=-1$.

【变式 22-1】已知a是 27 的立方根，b是$\frac{1}{9}$的平方根与$-\frac{1}{8}$的立方根的和，c是$a+6b$的平方.

(1)直接写出a，b的值，并比较a，b，$a-b$的大小.

(2)求c的所有可能值.

【答案】(1)$a=3$，$b=-\frac{1}{6}$或$-\frac{5}{6}$；$a-b>a>b$；

(2)$c=4$

【分析】本题考查了立方根、平方根的定义以及实数大小比较，关键是根据平方根的双值性求出b的所有可能值，再分别计算$a-b$和$a+6b$，从而比较大小和求c的值.

（1）先根据立方根的定义求出a，再根据平方根和立方根的定义求出b的所有可能值，然后计算$a-b$，最

后根据正数大于负数，以及正数之间的大小比较规则比较a，b，$a-b$的大小．

（2）先根据b的不同取值分别计算$a+6b$的值，再对结果进行平方，得到c的所有可能值．

【详解】（1）解：∵a是 27 的立方根，

∴$a=\sqrt[3]{27}=3$．

∵$\frac{1}{9}$的平方根是$\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{8}$的立方根是$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$，

∴当取$\frac{1}{3}$时，$b=\frac{1}{3}+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6}$；当取$-\frac{1}{3}$时，$b=-\frac{1}{3}+(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{6}$．

∴$b=-\frac{1}{6}$或$-\frac{5}{6}$．

当$b=-\frac{1}{6}$时，$a-b=3-(-\frac{1}{6})=\frac{19}{6}$，

∵$\frac{19}{6}>3>-\frac{1}{6}$，

∴$a-b>a>b$；

当$b=-\frac{5}{6}$时，$a-b=3-(-\frac{5}{6})=\frac{23}{6}$，

∵$\frac{23}{6}>3>-\frac{5}{6}$，

∴$a-b>a>b$；

综上，$a-b>a>b$；

（2）解：当$b=-\frac{1}{6}$时，$a+6b=3+6\times(-\frac{1}{6})=2$，

∴$c=2^2=4$；

当$b=-\frac{5}{6}$时，$a+6b=3+6\times(-\frac{5}{6})=-2$，

∴$c=(-2)^2=4$；

故c只有一个值为 4．

【变式 22-2】已知$a=\sqrt[m-1]{2m-2}$是 $2m-2$ 的算术平方根，$b=\sqrt[n+2]{n-28}$是$n-28$ 的立方根．

(1)求 a，b 的值．

(2)化简：$\sqrt{a-b-4}-\sqrt[3]{b-a+4}$．

【答案】(1)$a=2$，$b=-3$

(2)2

【分析】本题主要考查了求一个数的算术平方根和立方根，代数求值，解题的关键是掌握算术平方根和立方根的定义．

（1）根据算术平方根和立方根的定义，列出方程求出m,n的值，再求 a，b 的值即可；

（2）将 a，b 的值代入式子求值即可．

【详解】（1）解：根据$a=\sqrt[m-1]{2m-2}$是 $2m-2$ 的算术平方根得，$m-1=2$，

解得$m=3$，

$\therefore a=\sqrt{4}=2$；

根据$b=\sqrt[n+2]{n-28}$是$n-28$ 的立方根得，$n+2=3$，

解得$n=1$，

$\therefore b=\sqrt[3]{-27}=-3$；

（2）解：将$a=2$，$b=-3$ 代入$\sqrt{a-b-4}-\sqrt[3]{b-a+4}$得，

$\sqrt{a-b-4}-\sqrt[3]{b-a+4}=\sqrt{2+3-4}-\sqrt[3]{-3-2+4}=1+1=2$．

【变式 22-3】已知 $5a+2$ 的立方根是 3，$3a+b-1$ 的算术平方根是 4，c是$\sqrt{13}$的整数部分，一个正数的两个平方根分别是$d+3$ 和 $2d-15$，求 $3a+b+c-d$的平方根．

【答案】±4

【分析】根据立方根、算术平方根、无理数的估算、平方根的定义，先求出 a、b、c、d 的值，然后代入代数式求值，再计算平方根即可．

【详解】解：根据题意，

$\because 5a+2=3^3=27$，

$\therefore a=5$，

$\because 3a+b-1=4^2=16$，即 $3\times5+b-1=16$，

$\therefore b=2$，

$\because \sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$，

$\therefore 3<\sqrt{13}<4$，

$\therefore c=3$，

$\because d+3+2d-15=0$，

$\therefore d=4$，

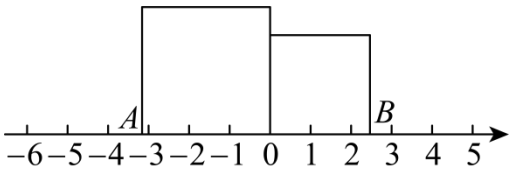
$\therefore 3a+b+c-d=3\times5+2+3-4=16$，

$\therefore 3a+b+c-d$的平方根为：±4．

【点睛】本题考查了平方根、算术平方根、立方根的性质，解决本题的关键是利用性质求出 a、b、c、d 值，然后再求 $3a+b+c-d$的平方根，特别是最终求值，是本题的易错点．题目整体较难，适合课后培优训练．

【题型 23　实数与数轴综合探究】

【例 23】如图，将面积分别为 10 和 6 的正方形纸片的一条边落在数轴上，一个顶点与原点重合，其另一个顶点分别在数轴上的点 A 和点 B 处.



(1)点 A 表示的数为_____；点 B 表示的数为_____.

(2)请你阅读以下材料，并完成作答：

$\because \sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$，$\therefore 2<\sqrt{5}<3$.

$\therefore \sqrt{5}$的整数部分为 2，小数部分为$\sqrt{5}-2$.

根据以上材料可得点 B 所表示数的整数部分为_____，小数部分为_____.

(3)记 $5+\sqrt{6}$的整数部分是 x，小数部分是 y，求 x 和 y 的值.

【答案】(1)$-\sqrt{10}$；$\sqrt{6}$.

(2)2；$\sqrt{6}-2$

(3)$x=7$，$y=\sqrt{6}-2$.

【分析】本题考查了算术平方根、数轴上的点与实数的对应关系、无理数的整数部分与小数部分的求解，解题的关键是利用正方形面积求边长，再结合夹逼法确定无理数的整数部分与小数部分.

（1）由正方形面积求边长，再根据数轴上点的位置确定表示的数；

（2）用夹逼法估算$\sqrt{6}$的范围，确定其整数部分与小数部分；

（3）用夹逼法估算$\sqrt{6}$的范围，进而确定 $5+\sqrt{6}$的整数部分与小数部分.

【详解】（1）解：$\because$ 面积为 10 的正方形边长为$\sqrt{10}$，点 A 在原点左侧，

$\therefore$ 点 A 表示的数为$-\sqrt{10}$.

$\because$ 面积为 6 的正方形边长为$\sqrt{6}$，点 B 在原点右侧，

$\therefore$ 点 B 表示的数为$\sqrt{6}$.

（2）解：$\because$ $\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$，

$\therefore 2<\sqrt{6}<3$，

$\therefore$ $\sqrt{6}$的整数部分为 2，小数部分为$\sqrt{6}-2$.

（3）解：$\because 2<\sqrt{6}<3$，

$\therefore 5+2<5+\sqrt{6}<5+3$，

即 $7<5+\sqrt{6}<8$，

∴ $5+\sqrt{6}$的整数部分$x=7$，

小数部分$y=5+\sqrt{6}-7=\sqrt{6}-2$.

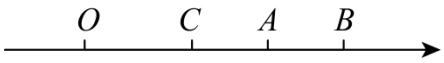
∴ $x=7$，$y=\sqrt{6}-2$.

【变式 23-1】对于实数a，我们规定：用符号$[\sqrt{a}]$表示不大于$\sqrt{a}$的最大整数，称$[\sqrt{a}]$为a的根整数，例如：$[\sqrt{9}]=3$，$[\sqrt{10}]=3$.

(1)计算：$[\sqrt{4}]=$_____；$[\sqrt{37}]=$_____；

(2)若$[\sqrt{x}]=1$，写出所有满足题意的x的整数值_____；

(3)如图所示，数轴上表示 1 和$\sqrt{2}$的对应点分别为A、B，点A是BC的中点，O为原点，设C点表示的数为x，试求$[|x-1|+1-2\sqrt{2}]$的值.



(4)①请你计算$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]-[\sqrt{4}]+[\sqrt{5}]-[\sqrt{6}]+[\sqrt{7}]-[\sqrt{8}]$；

②请你观察①，思考并计算$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]-[\sqrt{4}]+\cdots-[\sqrt{2024}]+[\sqrt{2025}]$，直接写出答案_____.

【答案】(1)2；6

(2)1 或 2 或 3

(3)$[|x-1|+1-2\sqrt{2}]$的值为-2

(4)①-1；②23

【分析】（1）先估算$\sqrt{4}$和$\sqrt{37}$的大小，再由新定义可得结果；

（2）根据定义可知 $0<x<4$，可得满足题意的 x 的整数值；

（3）根据数轴上两点的距离得到点 C 表示的数，代入求出$|x-1|+1-2\sqrt{2}$的值，再根据题中新定义即可得结果；

（4）①同（1）逐项化简，然后求解即可；

②由①归纳规律，然后求解即可.

【详解】（1）解：∵$\sqrt{4}=2$，

∴$[\sqrt{4}]=2$；

∵$36<37<49$，

∴$6<\sqrt{37}<7$，

∴$[\sqrt{37}]=6$.

（2）解：∵$[\sqrt{x}]=1$，$0<\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$，且$x$为整数，

∴$x=1$ 或$x=2$ 或$x=3$.

（3）解：∵点 A 表示 1，点 B 表示$\sqrt{2}$，点A是BC的中点，

∴点 C 表示的数为$x=2-\sqrt{2}$，

∴$|x-1|+1-2\sqrt{2}$

$=\left|2-\sqrt{2}-1\right|+1-2\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}-1+1-2\sqrt{2}$

$=-\sqrt{2}$，

∵$1<\sqrt{2}<2$，

∴$-2<-\sqrt{2}<-1$，

∴$[-\sqrt{2}]=-2$，即$[|x-1|+1-2\sqrt{2}]$的值为-2.

（4）解：①$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]-[\sqrt{4}]+[\sqrt{5}]-[\sqrt{6}]+[\sqrt{7}]-[\sqrt{8}]$

$=1-1+1-2+2-2+2-2$

$=-1$；

②由①得$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]=1-1+1=1$，

$-[\sqrt{4}]+[\sqrt{5}]-[\sqrt{6}]+[\sqrt{7}]-[\sqrt{8}]=-2+2-2+2-2=-2$，

$[\sqrt{9}]-[\sqrt{10}]+[\sqrt{11}]-[\sqrt{12}]+[\sqrt{13}]-[\sqrt{14}]+[\sqrt{15}]=3-3+3-3+3-3+3=3$，

…；

∵$44^2=1936$，$45^2=2025$，

∴$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]-[\sqrt{4}]+\cdots-[\sqrt{2024}]+[\sqrt{2025}]$

$=1-2+3-4+5-6+\cdots+43-44+45$

$=(1-2)+(3-4)+\cdots+(43-44)+45$

$=(-1)\times 22+45$

$=23$.

【变式 23-2】综合与实践

阅读：

我国古代数学注重“数”与“形”的结合，有理数的乘方是从“数”的角度刻画重复乘法的简洁形式，而借助图形（如正方形、正方体等）能更直观理解乘方的意义．例如，2^3既表示 $2\times2\times2$，也可对应“棱长为 2 的正方体的体积”；$(-2)^2$表示$(-2)\times(-2)$，也能对应“边长为 2 的正方形的面积（负号可理解为方向的抽象）”.

理解：

（1）已知$a=-3$，计算a^2和a^3的值；并在数轴上分别表示出 a、a^2、a^3对应的点（提示：先确定各数的符

号与绝对值）

（2）观察$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，…，写出2^n（n为正整数）的末位数字的规律，再求2^{2025}的末位数字．

应用：

（3）若一个数的平方等于它本身，这个数是_____；若一个数的立方等于它本身，这个数是_____．

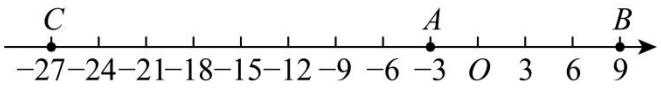
（4）已知$|x-2|+(y+1)^2=0$，求x^y的值，并说明该值在数轴上的位置特征．

拓展：

（5）当n为正整数时，探究$(-1)^n+(-1)^{n+1}$的值；并思考：是否存在整数x，使得$|x+3|+(x-1)^4=0$？若存在，求x的值；若不存在，说明理由．

【答案】（1）$a^2=9$，$a^3=-27$，

a用点A、a^2用点B、a^3用点C表示．



（2）规律为周期为4（2、4、8、6循环），末位数字是2；

（3）0或1；0或1或-1；

（4）$x^y=\frac{1}{2}$；$\frac{1}{2}$是正数，在原点右侧，且距离原点$\frac{1}{2}$个单位长度处；

（5）$(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$；

不存在，理由如下：

∵$|x+3|\geq 0$，$(x-1)^4\geq 0$，

∴当$|x+3|+(x-1)^4=0$时，

$|x+3|=0$且$(x-1)^4=0$，

解得：$x=-3$且$x=1$，

∵$3\neq 1$，

∴x的值不存在．

【分析】此题考查了数轴和实数、绝对值和偶次方的非负性、末位数字的特征，熟练运用这些性质是关键．

（1）按乘方公式计算，并表示在数轴上即可；

（2）通过观察已知数的个位数字，找到规律，再利用规律求2^{2025}的末位数字即可；

（3）设未知数列方程再解即可；

（4）根据绝对值和偶次方的非负性计算即可；

（5）根据 n 为正整数时，n 和$n+1$ 是两个连续的自然数求值即可；根据绝对值和偶次方的非负性计算，判断 x 的值是否存在即可．

【详解】解：（1）∵ $a=-3$，

∴ $a^2=(-3)^2=9$，

$a^3=(-3)^3=-27$，

∵$-3<0$，$|-3|=3$，

∴-3 在数轴上原点左侧 3 个单位处；

∵ $9>0$，$|9|=9$，

∴ 9 在数轴上原点右侧 9 个单位处；

∵$-27<0$，$|-27|=27$，

∴-27 在原点左侧 27 个单位处．

（2）∵ $2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，

$2^5=32$，$2^6=64$，$2^7=128$，$2^8=256$，…，

周期为 4（2、4、8、6 循环），

∵ $2025\div4=506\ldots1$，余数为 1，对应周期的第一个数，

故2^{2025}的末位数字是 2；

（3）设数 x 的平方等于它本身，即：

$x^2=x$，

解得：$x=1$ 或$x=0$，

故答案为：0 或 1；

设数 y 的立方等于它本身，即：

$y^3=y$，

解得：$y=0$ 或$y=1$ 或$y=-1$，

故答案为：0 或 1 或-1；

（4）∵ $|x-2|+(y+1)^2=0$，

∴ $x-2=0$ 且$y+1=0$，

解得：$x=2$，$y=-1$，

∴ $x^y=2^{-1}=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{1}{2}$是正数，在原点右侧，且距离原点$\frac{1}{2}$个单位长度处；

（5）∵ n为正整数，

∴ n和$n+1$ 是两个连续的正整数即：（一奇数一偶数）

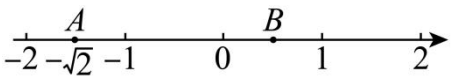
∴当$(-1)^n=1$ 时，$(-1)^{n+1}=-1$，此时$(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$；

当$(-1)^n=-1$ 时，$(-1)^{n+1}=1$，此时$(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$；

综上，当 n 为正整数时，$(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$；

不存在整数 x，使得$|x+3|+(x-1)^4=0$，

【变式 23-3】如图，一只蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬了 2 个单位长度到达点 B，点 A 表示$-\sqrt{2}$，设点 B 所表示的数为 m.



(1)$m=$_____.

(2)求$|m+1|+|m-1|$的值；

(3)在数轴上还有 C、D 两点分别表示实数 c 和 d，且有$|2c+6|$与$\sqrt{d-4}$互为相反数，求 $2c+3d$的平方根.

【答案】(1)$-\sqrt{2}+2$

(2)2

(3)$\pm\sqrt{6}$

【分析】（1）根据两点间的距离公式计算即可；

（2）由（1）可得$m+1>0$、$m-1<0$，再利用绝对值的性质化简绝对值号，最后合并同类项即可解答；

（3）根据绝对值和算术平方根的非负性质求出c、d的值，再代入 $2c+3d$，进而求其平方根即可.

【详解】（1）解：∵蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬了 2 个单位长度到达点B，点A表示$-\sqrt{2}$

∴点B表示$-\sqrt{2}+2$

∴$m=-\sqrt{2}+2$.

故答案为：$-\sqrt{2}+2$.

（2）解：∵$m=-\sqrt{2}+2$

∴$m+1=-\sqrt{2}+2+1=-\sqrt{2}+3>0$，$m-1=-\sqrt{2}+2-1=-\sqrt{2}+1<0$

∴$|m+1|+|m-1|$

$=m+1-(m-1)$

$=m+1-m+1$

$=2$.

（3）解：∵$|2c+6|$与$\sqrt{d-4}$互为相反数

$\therefore |2c+6|+\sqrt{d-4}=0$

$\therefore 2c+6=0$，$d-4=0$

$\therefore c=-3$，$d=4$

$\therefore 2c+3d=2\times(-3)+3\times 4=6$

$\therefore \pm\sqrt{2c+3d}=\pm\sqrt{6}$，

即 $2c+3d$的平方根是$\pm\sqrt{6}$.

【点睛】本题主要考查了实数与数轴、绝对值的性质、相反数的性质、非负数的性质、求一个数的平方根等知识点，掌握并灵活运用相关性质是解题的关键.

【题型 24　立方根的应用】

【例 24】将一个正方体铁块完全浸入圆柱形玻璃杯的水中，水位升高了 3cm．已知玻璃杯内部的底面半径为 9cm，则正方体的棱长为_____cm．（π取 3，结果取整数）

【答案】9

【分析】根据题意可知，水位升高部分的圆柱体体积等于正方体的体积，根据圆柱和正方体的体积公式列方程，再利用立方根的意义求解，最后对结果取整数即可.

【详解】解：设正方体的棱长为$x$cm，

由题意得，$\pi\times 9^2\times 3=x^3$，

将$\pi=3$ 代入，

可得：$x^3=3\times 81\times 3=729$，

$\because 9^3=729$，

$\therefore x=9$，

∴正方体的棱长为 9cm.

【变式 24-1】有两个正方体水箱，已知第一个正方体水箱的棱长是 6dm，第二个正方体水箱的体积比第一个水箱的体积的 3 倍还多 $81dm^3$，则第二个水箱的表面积为_____dm^2.

【答案】486

【分析】先根据正方体的体积公式求出第一个正方体水箱的体积，进而得到第二个正方体水箱的体积，根据立方根的定义即可求出第二个水箱的棱长，进而根据正方体的表面积公式即可求解.

【详解】解：第一个正方体水箱的体积为$6^3=216(dm^3)$，

∴第二个正方体水箱的体积为 $3\times 216+81=729(dm^3)$，

∴第二个正方体水箱的棱长为$\sqrt[3]{729}=9(dm)$，

∴第二个水箱的表面积为$9^2\times 6=486(dm^2)$.

【变式 24-2】（24-25 七年级下·河南商丘·阶段检测）如图 1 为一种球形容器（注：球的体积计算公式为$\frac{4}{3}\pi R^3$），它受力均匀，承载能力强，且制作材料较为节省，在运输各种气体、液体、液化气时很受欢迎，图 2 为其示意图．现要生产两种容积分别为$\frac{9\pi}{2}\text{m}^3$和$\frac{256\pi}{81}\text{m}^3$的球形容器，则这两种容器的半径差（容器的厚度可忽略）为（　）



图1

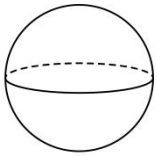


图2

A．$\frac{1}{6}\text{m}$　　B．$\frac{2}{3}\text{m}$　　C．$\frac{3}{2}\text{m}$　　D．$\frac{17}{6}\text{m}$

【答案】A

【分析】本题主要考查了立方根的应用，设一种球形容器的半径为R_1，另一种球形容器的半径为R_2，根据球的体积计算公式分别计算出R_1和R_2，然后相减即可得出答案．

【详解】解：设一种球形容器的半径为R_1，则$\frac{4}{3}\pi {R_1}^3=\frac{9\pi}{2}$，解得：$R_1=\frac{3}{2}$

另一种球形容器的半径为R_2，则$\frac{4}{3}\pi {R_2}^3=\frac{256\pi}{81}$，解得：$R_2=\frac{4}{3}$

则这两种容器的半径差为：$\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}\text{m}$，

故选：A

【变式 24-3】据说，我国著名数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：求 59319 的立方根，华罗庚脱口而出：39．你知道他是怎么快速准确地计算出来的吗？请研究解决下列问题：

(1)已知$x^3=10648$，且x为整数．

∵ $1000=10^3<10648<100^3=1000000$，

∴ $10<x<100$，x一定是一个两位数；

∵ 10648 的个位数字是 8，

∴ x的个位数字一定是_____；

划去 10648 后面的三位 648 得 10，

∵ $8=2^3<10<3^3=27$，

∴ x的十位数字一定是_____；

∴ $x=$_____．

(2)在软件研发过程中，小明需要处理一个由体素（即体积像素）构成的三维正方体模型，已知该原始模

型的体素总数为 140608．为了优化计算性能，需将该模型进行等比例缩小，使其体素总数变为原始模型体素的$\frac{1}{8}$，求缩小后该正方体模型的边长．

【答案】(1)2，2，22

(2)26

【分析】（1）根据立方数的个位数字规律和数的大小范围来逐步推导．

（2）根据题意，先计算出缩小后模型的体素总数，然后利用（1）中学习的方法求其立方根，即可得到缩小后正方体模型的边长．

【详解】（1）解：已知$x^3=10648$，且x为整数．

$\because 1000=10^3<10648<100^3=1000000$，

$\therefore 10<x<100$，x一定是一个两位数；

$\because 10648$ 的个位数字是 8，

$\therefore x$的个位数字一定是 2；

划去 10648 后面的三位 648 得 10，

$\because 8=2^3<10<3^3=27$，

$\therefore x$的十位数字一定是 2；

$\therefore x=22$．

（2）解：缩小后模型的体素总数为 $140608\times\frac{1}{8}=17576$，

设缩小后正方体模型的边长为a，

所以$a^3=17576$，

因为$10^3=1000<17576<100^3=1000000$，

所以a是一个两位数，

因为$6^3=216$，个位数字是 6，

所以a的个位数字一定是 6，

划去 17576 后面的三位 576 得 17，

因为 $8=2^3<17<3^3=27$，

所以a的十位数字一定是 2，

所以$a=26$．

答：缩小后该正方体模型的边长为 26．

【题型 25　实数中的规律探究问题】

【例 25】（24-25 七年级下·重庆渝北·期末）求 59319 的立方根，解答如下：

①∵ $\sqrt[3]{1000}=10,\sqrt[3]{1000000}=100$，又∵ $1000<59319<1000000$，∴ $10<\sqrt[3]{59319}<100$，∴能确定 59319 的立方根是个两位数．

②59319 的个位数是 9，又∵ $9^3=729$，∴能确定 59319 的立方根的个位数是 9．

③划去 59319 后面的三位 319 得到数 59，而 $\sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{59}<\sqrt[3]{64}$，则 $3<\sqrt[3]{59}<4$，可得 $30<\sqrt[3]{59319}<40$，由此能确定 59319 的立方根的十位数是 3，因此 59319 的立方根是 39．根据以上步骤求出 314432 的立方根是_____．

【答案】68

【分析】本题考查立方根，根据题意所给方法确定 314432 的立方根是个两位数，再确定个位、十位上的数，即可解答．

【详解】解：∵ $\sqrt[3]{1000}=10,\sqrt[3]{1000000}=100$，

又∵ $1000<314432<1000000$，

∴ $10<\sqrt[3]{314432}<100$，

∴能确定 314432 的立方根是个两位数．

314432 的个位数是 2，

又∵ $8^3=512$，

∴能确定 314432 的立方根的个位数是 8．

划去 314432 后面的三位 432 得到数 314，而 $\sqrt[3]{216}<\sqrt[3]{314}<\sqrt[3]{343}$，则 $6<\sqrt[3]{314}<7$，

可得 $60<\sqrt[3]{314432}<70$，由此能确定 314432 的立方根的十位数是 6，

因此 314432 的立方根是 68，

故答案为 68．

【变式 25-1】（24-25 七年级下·湖北十堰·期中）若 $x=\sqrt[3]{314}$，$y=\sqrt[3]{0.314}$则 x 与 y 的数量关系是：_____．

【答案】$x=10y$

【分析】本题考查了立方根的应用，可得 $y=\sqrt[3]{\frac{314}{1000}}=\frac{1}{10}\sqrt[3]{314}$，即可求解；会用立方根进行求解是解题的关键．

【详解】解：$y=\sqrt[3]{\frac{314}{1000}}$

$=\frac{1}{10}\sqrt[3]{314}$

$=\frac{1}{10}x$，

$\therefore x=10y$，

故答案为：$x=10y$.

【变式 25-2】已知$\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$；$\sqrt{2-\frac{2}{5}}=2\times\sqrt{\frac{2}{5}}$；$\sqrt{3-\frac{3}{10}}=3\times\sqrt{\frac{3}{10}}$；$\sqrt{4-\frac{4}{17}}=4\times\sqrt{\frac{4}{17}}$；……；按此规律，若$\sqrt{a-\frac{6}{b}}=a\cdot\sqrt{\frac{6}{b}}$（$a$，$b$为正整数），则$(6a-b)^{2026}$的值为（　　）

A．1　　B．-1　　C．2026　　D．-2026

【答案】A

【分析】先观察已知等式总结 a 和 b 的变化规律，再求出a,b的值，代入式子计算即可.

【详解】解：观察已知等式可得规律：对于正整数n，有$\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$，

对比$\sqrt{a-\frac{6}{b}}=a\cdot\sqrt{\frac{6}{b}}$，可得$a=6$，$b=a^2+1$，

$\because a=6$，

$\therefore b=6^2+1=37$，

$\therefore 6a-b=6\times6-37=-1$，

$\therefore(6a-b)^{2026}=(-1)^{2026}=1$.

【变式 25-3】任何实数m，可用$[m]$表示不超过m的最大整数，如$[5]=5$，$[\pi]=2$，现对 35 进行如下操作：$35\xrightarrow{\text{第一次}}[\sqrt{35}]=5\xrightarrow{\text{第二次}[\sqrt{5}]}=2\xrightarrow{\text{第二次}[\sqrt{2}]}=1$，这样对 35 只需进行 3 次操作后变为 1．那么对 520 需进行_____次操作后变为 1.

【答案】4

【分析】本题考查取整函数与算术平方根的运算．按照题目定义的操作规则，对 520 连续进行取平方根后向下取整的操作，直至结果为 1，统计操作次数即可.

【详解】由于$22^2<520<23^2$，$\therefore 22<\sqrt{520}<23$

故第 1 次操作：$[\sqrt{520}]=22$，

同理，第 2 次操作：$[\sqrt{22}]=4$，

第 3 次操作：$[\sqrt{4}]=[2]=2$，

第 4 次操作：$[\sqrt{2}]=[1.414\ldots]=1$，

∴对 520 进行 4 次操作后变为 1.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872