实数的初步认识

【夯实基础】

【题型 1 判断无理数】

【例 1】下列四个实数中，是无理数的是（ ）

A．0 B．$\sqrt{25}$ C． $\sqrt{6}$ D．2

【变式 1-1】请写出一个小于-3 的无理数：_____.（写出一个正确答案即可）

【变式 1-2】在实数：$-\sqrt{7}$，5，$-\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$，$\sqrt[3]{-15}$，$\sqrt{49}$中，负无理数有_____个.

【变式 1-3】有六个数：0.123，$(-1.5)^3$，3.1416，$\frac{22}{7}$，-2π，0.2020020002…（相邻的两个 2 之间依次多一个 0）．若其中无理数的个数为x，非负数的个数为y，则$x+y=$_____.

【题型 2 求一个数的平方根】

【例 2】13 的平方根是_____.

【变式 2-1】一个自然数的一个平方根是 a，则与它相邻的下一个自然数的平方根是（ ）

A．$\pm\sqrt{a+1}$ B．$a+1$ C．a^2+1 D．$\pm\sqrt{a^2+1}$

【变式 2-2】下列各数中，不一定有平方根的是( )

A．x^2+1 B．$|x|+2$ C．$\sqrt{a}+1$ D．$|a|-1$

【变式 2-3】$\sqrt{16}=$（ ）

A．4 B．±4 C．-4 D．±8

【题型 3 求一个数的算术平方根】

【例 3】计算：$\sqrt{2^2}$=_____.

【变式 3-1】$(-2026)^2$的算术平方根是_____.

【变式 3-2】已知$\sqrt{m^2}=6$，且$n=\sqrt{3-m}$，则mn的值为_____.

【变式 3-3】计算$\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}$的结果等于_____.

【题型 4 求一个数的立方根】

【例 4】$|-64|$的立方根是（ ）

A．±8 B．4 C．-4 D．16

【变式 4-1】对于实数a、b，定义运算“※”如下：$a※b=a^2-ab$，则关于 4※6 的结果，下列说法正确的是（　）

A．平方根是 2　　B．算术平方根是 2

C．立方根是 2　　D．立方根是-2

【变式 4-2】已知$\sqrt[3]{0.214}\approx 0.5981$，$\sqrt[3]{2.14}\approx 1.289$，$\sqrt[3]{21.4}\approx 2.776$，则$\sqrt[3]{2140}\approx$（　）

A．27.76　　B．12.89　　C．59.81　　D．5.981

【变式 4-3】若$m=\sqrt[3]{(\pi-3)^3}$，$n=\sqrt{(\pi-4)^2}$，则$m+n$的值为（　）

A．1　　B．-1　　C．7　　D．-7

【题型 5　判断平方根与立方根的性质】

【例 5】下列说法正确的是（　）

A．$\sqrt{9}$的平方根是± 3　　B．8 的立方根是± 2

C．4 的平方根是 2　　D．$-\sqrt{2}$是 2 的平方根

【变式 5-1】下列式子能正确表示并计算“64 的平方根”的是（　）

A．$\sqrt{64}=\pm 8$　　B．$\pm\sqrt{64}=\pm 8$　　C．$\pm\sqrt[3]{64}=\pm 4$　　D．$\sqrt{64}=8$

【变式 5-2】下列命题中，真命题是（　）

A．若一个数的立方等于它本身，则这个数一定是 0

B．若一个数的绝对值等于它本身，则这个数一定是正数

C．若一个数的平方根等于它本身，则这个数是 0 和 1

D．若一个数的立方根等于它本身，则这个数为 0、1、-1

【变式 5-3】如表为嘉琪同学的答卷，她的得分应是（　）

姓名：嘉琪　得分：_____

填空：（每小题 20 分，共 100 分）

①$\sqrt{2}$的倒数是$-\sqrt{2}$；

②$-\sqrt{3}$的绝对值是_$\sqrt{3}$_；

③4 的算术平方根为_2_；

④平方根与立方根相等的数是_0_；

⑤$\sqrt[3]{(-2)^3}=\underline{-2}$.

A．40 分　　B．60 分　　C．80 分　　D．100 分

【题型 6　利用平方根与立方根求值】

【例 6】已知x是 5 的算术平方根，则x^2-13的立方根是（　）

A．-8　　B．-3　　C．-2　　D．2

【变式 6-1】计算$\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3$的结果为_____.

【变式 6-2】若$\sqrt{x-2}=5$，则 x 的立方根是_____

【变式 6-3】已知甲数是$1\frac{7}{9}$的算术平方根，乙数是$3\frac{3}{8}$的立方根，则甲、乙两个数的积是__.

【题型 7　实数的分类】

【例 7】下列说法正确的是（　）

A．有理数是有限小数　　B．无理数是无限小数

C．无限小数是无理数　　D．$\frac{\pi}{3}$是分数

【变式 7-1】下列说法正确的是（　）

A．正实数和负实数统称实数　　B．正数、和负数统称有理数

C．带根号的数和负数统称实数　　D．无理数和有理数统称实数

【变式 7-2】在①$-\frac{5}{2}$，②$\frac{\pi}{3}$，③$\sqrt{2}$，④$-\sqrt{\frac{1}{16}}$，⑤3.14，⑥0，⑦$\sqrt{2}-1$，⑧$\frac{\sqrt{5}}{2}$，⑨$\left|\sqrt{4}-1\right|$，⑩0.12122122（两个 1 之间依次多一个 2）中，请按下列要求填上对应的序号：

整数有_____；

负分数有_____；

正无理数有_____.

【变式 7-3】把下列各数填入相应的集合内：

3.14，$\sqrt{5}$，-7，$\sqrt[3]{-27}$，$\frac{2}{3}$，$\sqrt{16}$，$-\pi$，0.7777…

(1)有理数集合：{　　}

(2)无理数集合：{　　}

(3)正实数集合：{　　}

(4)负实数集合：{　　}

【题型 8　无理数的估算】

【例 8】若n为正整数，且满足$n<\sqrt{13}<n+1$，则n的值为（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【变式 8-1】估计$\sqrt{26}+1$的值在（　　）

A．4 和 5 之间　　B．5 和 6 之间　　C．6 和 7 之间　　D．7 和 8 之间

【变式 8-2】在$\sqrt{40}$与$\sqrt{50}$之间的整数是_____.

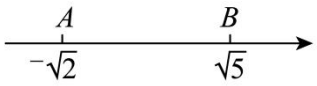
【变式 8-3】规定无理数 m 的整数部分记为$[m]$，小数部分记为$\{m\}$，例如：$[\sqrt{5}]=2$，$\{\sqrt{5}\}=\sqrt{5}-2$.

(1)$[\sqrt{10}]$=_____；$\{\sqrt{26}\}$=_____.

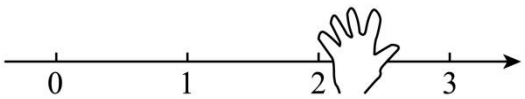
(2)求$\{4+\sqrt{3}\}+\{4-\sqrt{3}\}$的值.

【题型 9　实数与数轴的对应关系】

【例 9】如图，数轴上在点 A，点 B 之间，且表示整数的点有_____个.

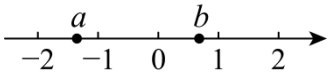


【变式 9-1】如图，数轴上被手掌遮挡住的数可能是（）



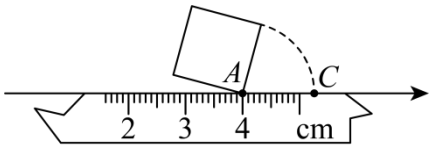
A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{4}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{10}$

【变式 9-2】实数a,b在数轴上的位置如图所示，则化简$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(a+b)^2}$的结果是（　　）



A．$2b$　　B．$-2a$　　C．$2(b-a)$　　D．0

【变式 9-3】将一把刻度尺如图所示放在数轴上（数轴的单位长度是 1cm），数轴上点A对应刻度尺上的“4”，面积为 2cm^2的正方形其中一个顶点落在点C处，以点A为圆心，以正方形边长为半径作圆交数轴于点C．则点C在刻度尺上对应的数为_____.



【题型 10　实数的相反数与绝对值】

【例 10】$-\sqrt{7}$的绝对值是_____；$1-\sqrt[3]{3}$的相反数是_____.

【变式 10-1】下列各组数中，互为相反数的是（　　）

A．2 与$\sqrt[3]{8}$　　B．$\sqrt[3]{-2}$与$-\sqrt[3]{2}$　　C．-2 与$\sqrt[3]{-8}$　　D．$\sqrt[3]{5}$与$\sqrt[3]{-5}$

【变式 10-2】下列关于$-\sqrt{7}$的说法错误的是（　　）

A．$-\sqrt{7}$的绝对值是$\sqrt{7}$　　B．$-\sqrt{7}$的相反数是$\sqrt{7}$

C．$-\sqrt{7}$的倒数是$-\frac{1}{\sqrt{7}}$　　D．$-\sqrt{7}$是有理数

【变式 10-3】已知实数a、b互为倒数，实数c、d互为相反数，实数x的绝对值为$\sqrt{2}$，求$\frac{1}{2}ab+\frac{c+d}{5}+x^2$的值．

【进阶拔高】

【题型 11　平方根与算术平方根的区别】

【例 11】下列说法不正确的是（　）

A．4 的平方根是± 2　　B．-8 的立方根是-2

C．5 没有算术平方根　　D．0 的平方根和立方根都是 0

【变式 11-1】下列关于平方根、算术平方根、立方根的说法，正确的是（　　）

A．算术平方根等于本身的数只有 0

B．平方根等于本身的数是 0 和 1

C．立方根等于本身的数是 0 和± 1

D．负数没有立方根

【变式 11-2】完成下列表格：

被开方数	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
算术平方根											
平方根											

【变式 11-3】如果一个正数的平方根是 m，那么这个数的另一个平方根是_____，这个数的算术平方根是_____，两个平方根的和是____．

【题型 12　已知平方根求这个数】

【例 12】已知一个正数的平方根分别为 $2a-1$ 和$-a+2$，这个正数是_____.

【变式 12-1】若 $3-2a$与$a-1$ 是同一个数的两个不等的平方根，则这个数是（　）

A．2　　B．-2　　C．4　　D．1

【变式 12-2】已知$-2x+1$ 和 $3x-2$ 是实数m的两个不同的平方根.

(1)求x，m的值；

(2)计算 $5x+7m^2$的值.

【变式 12-3】已知 $2a+1$ 的平方根是±3，$5a+2b-2$ 的算术平方根是 6，求 $5a-2b$的平方根.

【题型 13　已知立方根求这个数】

【例 13】如果一个非零实数的立方根等于这个数本身，那么这个数是_____.

【变式 13-1】已知$\sqrt[3]{x-1}=x-1$，则x^2-x的值是_____.

【变式 13-2】已知$a+1$ 的平方根是±3，$b-1$ 的立方根是 2，则$(a-b)^{2025}$的值是（　）

A．0　　B．1　　C．-1　　D．2^{2025}

【变式 13-3】. 已知$x=\sqrt[a+b]{m}$是m的立方根，而$y=\sqrt[3]{b-6}$是x的相反数，且$m=3a-7$，求x与y的平方和的立方根.

【题型 14　利用算术平方根非负性求字母的值】

【例 14】已知实数a,b满足$a=\sqrt{2-b}+\sqrt{b-2}+5$，则$a-b$的值为_____.

【变式 14-1】已知$|a-3|+\sqrt{3+b}=0$，则$\left(\frac{a}{b}\right)^{2027}=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

【变式 14-2】已知$|2020-a|+\sqrt{a-2021}=a$，则2020^2-a的值为_____.

【变式 14-3】设a，b都是实数，且满足$(a+2)^2+\sqrt{2-b}=0$，求式子a^2+2b的算术平方根.

【题型 15　实数的大小比较】

【例 15】比较大小：$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$_____1.（填“>”或“<”）

【变式 15-1】在实数-2.23，$-\sqrt{3}$，$-\sqrt{5}$，3 中，最小的数是（　　）

A．$-\sqrt{5}$　　B．-2.23　　C．$-\sqrt{3}$　　D．3

【变式 15-2】已知a是$(-2)^2$的负平方根，$b=\left|-\sqrt{4^2}\right|$，$c=\sqrt[3]{-64}$，则$a$，$b$，$c$中最大的实数与最小的实数的差是（　　）

A．-2　　B．2　　C．6　　D．8

【变式 15-3】比较下列各组数的大小：

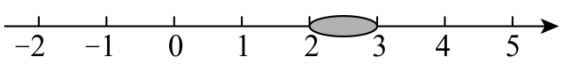
(1)$\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{3}$；　　(2)$-\sqrt[3]{4}$与$-\sqrt[3]{3}$.

【题型 16　实数在数轴上的位置判断】

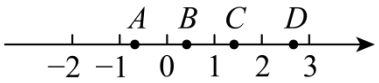
【例 16】如图，3，$\sqrt{11}$在数轴上对应的点分别为C,B，点C是AB的中点，则数轴上点A表示的数是_____.



【变式 16-1】若将$\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{10}$这三个数表示在数轴上，其中能被如图所示的墨迹（阴影）覆盖的数是_



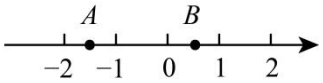
【变式 16-2】如图，在数轴上有 A，B，C，D 四个点，则下列说法正确的是（　　）



A．点 A 表示的数可能是$-\sqrt{3}$　　B．点 B 表示的数可能是$\sqrt{2}$

C．点 C 表示的数可能是$\sqrt{5}$　　D．点 D 表示的数可能是$\sqrt{7}$

【变式 16-3】如图，一只蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬了 2 个单位长度到达点 B，点 A 表示$-\sqrt{2}$，设点 B 所表示的数为 m.



(1)实数 m 的值是_____.

(2)求$|m+1|+|m-1|$的值；

(3)在数轴上还有 C、D 两点分别表示实数 c 和 d，且有$|2c+4|$与$\sqrt{d-4}$互为相反数，求 $2c+3d$的平方根.

【题型 17　平方根与立方根综合求值】

【例 17】已知$a-b$是 27 的立方根，$3a+b-1$ 的算术平方根是 4.

(1)求a与b的值；

(2)求$a+2b$的平方根.

【变式 17-1】已知a的算术平方根是 12.3，b的立方根是-45.6，x的平方根是± 1.23，y的立方根是 456，则x和y分别是（　）

A．$x=\frac{a}{1000}, y=100b$　　B．$x=1000a, y=\frac{b}{1000}$

C．$x=\frac{a}{100}, y=-1000b$　　D．$x=\frac{a}{100}, y=1000b$

【变式 17-2】已知 $2a-1$ 的平方根是± 3，$3a+b-1$ 的立方根是 4，c是算术平方根等于自身的数，则 $a+2b-c^2=$_____.

【变式 17-3】已知一个非负数c的平方根是$2a-3$与$3a-2$，$a+3b-1$的算术平方根是 4.

(1)求a，b，c的值；

(2)求：$a+b+c+1$的立方根.

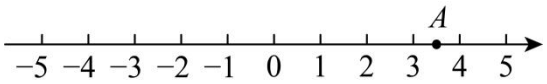
【题型 18　无理数估算与整数部分】

【例 18】阅读下面的文字，解答问题：大家知道$\sqrt{2}$是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此$\sqrt{2}$的小数部分我们不可能全部写出来．将这个数减去其整数部分，差就是小数部分，因为$\sqrt{2}$的整数部分是 1，于是用$\sqrt{2}-1$来表示$\sqrt{2}$的小数部分.

又例如：

$\because \sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$，即$2<\sqrt{7}<3$，

$\therefore \sqrt{7}$的整数部分是 2，小数部分为$\sqrt{7}-2$.



(1)$\sqrt{17}$的整数部分是_____，小数部分是_____；

(2)点A表示的数为无理数，在数轴上的位置如图所示，若其整数部分为m，小数部分为n，则下列对于m，n的说法正确的是_____（填序号即可）；

①m，n均为有理数；②$1<\sqrt{m}<2$；③$3<m-n<4$；④$3<m+n<4$

(3)若m，n分别是$6-\sqrt{5}$的整数部分和小数部分，求$3m-n$的值.

【变式 18-1】已知$\sqrt{13}$的整数部分为a，小数部分为b，则代数式$a-b$的值为（　　）.

A．$6-\sqrt{13}$　　B．$6+\sqrt{13}$　　C．$\sqrt{13}-6$　　D．6

【变式 18-2】若$\sqrt{17}$的整数部分是x，小数部分是y，则$\frac{x+y}{x}$的值为_____.

【变式 18-3】阅读《无理数》课堂实录，解决问题.

数学课上，老师带着大家学习无理数.

老师：大家知道无理数是无限不循环小数，因此一个无理数的小数部分，我们是不可能完全写出来的，那么，有什么方法表示出无理数的小数部分呢？例如：$\sqrt{2}$.

聪聪：我们可以用$\sqrt{2}-1$来表示$\sqrt{2}$的小数部分.

老师：为什么？

聪聪：因为$\sqrt{2}$的整数部分是 1，用这个数减去其整数部分，差就是小数部分.

老师：聪聪真聪明，那么你知道含有无理数的两个数之和的小数部分怎么表示吗？例如$\sqrt{6}+3$.

聪聪：这个还真是不清楚了.

(1)请同学们帮聪聪表示一下$\sqrt{6}+3$的小数部分为_；

(2)请同学们写出一个与$\sqrt{13}$的小数部分相同的无理数，并说明理由；

(3)若a为$\sqrt{11}-2$的小数部分，b为$6-\sqrt{11}$的小数部分，求$a+b$的平方根.

【题型 19　实数的综合运算】

【例 19】计算：$\sqrt{9}-|1-\sqrt{3}|+(-2)^2-\sqrt[3]{-27}$

【变式 19-1】计算：

(1)$\sqrt{3}+\sqrt[3]{8}-\sqrt{(-2)^2}-|1-\sqrt{3}|$；

(2)$\sqrt{0.25}-\sqrt[3]{\frac{19}{27}-1}-(-1)^5$.

【变式 19-2】计算：

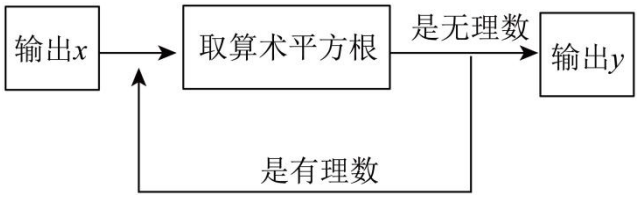
(1)$-2\times\sqrt[3]{-27}+|2-\sqrt{5}|-\sqrt{(-5)^2}$　　(2)$x^2-16=0$；

(3)$(x-2)^3=-125$.

【变式 19-3】计算：$\sqrt{81}+\sqrt[3]{-27}+|1-\sqrt{3}|+(-2)^2$.

【题型 20　程序设计与实数运算】

【例 20】如图，这是一个数值转换器.



(1)当输入 x 的值为 9 时，输出$y=$_____.

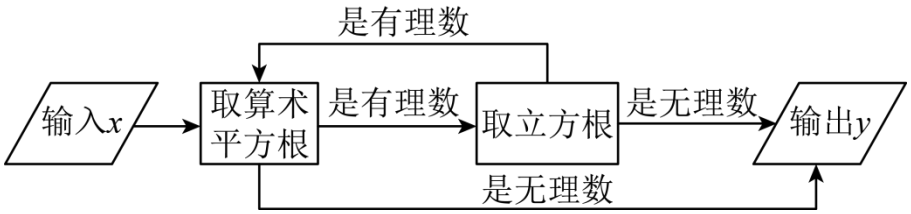
(2)小明输入了下面的三个备选数据中的某一个，转换器在运算时显示“运算无意义”. 请你判断输入 x 的值可能是哪一个数据？并说明理由. 备选数据：4，$\frac{5}{7}$，$-\frac{1}{3}$.

(3)小明输入了某个 x 的值后得到了$\sqrt{2}$，请你写出 2 个不同的 x 值.

【变式 20-1】如图，小雅用计算机设计了一个运算程序图，若输入的x的值为 8 时，输出的结果是_____.

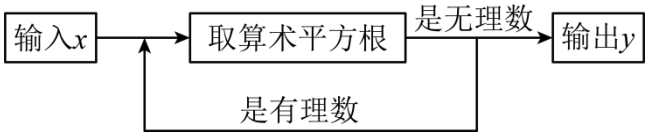


【变式 20-2】在如图所示的运算程序中，若输入x的值是 729，则输出y的值是（　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt[3]{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt[3]{3}$

【变式 20-3】有一个数值转换器．原理如图.



（1）当输入的x为 81 时，输出的y是多少？

（2）是否存在输入有效的x值后，始终输不出y值？如果存在．请写出所有满足要求的x的值；如果不存在，请说明理由；

（3）小明输入数据，在转换器运行程序时，屏幕显示“该操作无法运行”，请你推算输入的数据可能是什么情况？

（4）若输出的y是$\sqrt{5}$，试判断输入的x值是否唯一？若不唯一，请写出其中的两个.

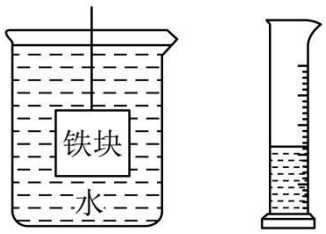
【创新思辨】

【题型 21　算术平方根的应用】

【例 21】小亮有一枚体积为 125cm^3的正方体玉石印章，可以放进一个体积为 180cm^3的长方体木匣中（不考虑木匣的厚度），木匣的宽与印章的棱长相等，木匣的长与高相等，则木匣的长为_____cm．

【变式 21-1】青少年体重指数（BMI）是评价青少年营养状况、肥胖的一种衡量方式．其中体重指数 BMI 计算公式：$\text{BMI}=\frac{G}{h^2}(\text{kg/m}^2)$，其中 G 表示体重(kg)，h 表示身高(m)．已知小红的体重为 45kg，她的 BMI 值为 20，则她的身高是_____ m．

【变式 21-2】如图，在做浮力实验时，小明用一根细线将一个正方体铁块拴住，完全浸入盛满水的圆柱形烧杯中，并用量筒量得溢出水的体积为 45cm^3；然后小明将铁块从烧杯中提起至完全脱离水面，量得烧杯中的水位下降 0.6cm．当$\pi\approx 3$ 时，烧杯内部的底面半径为_____cm．



【变式 21-3】小康为研究汽车紧急制动时的安全刹车距离，整理出如下实验数据：

v	34	34.1	34.2	34.3	34.4	34.5	34.6	34.7	34.8	34.9	35
v^2	1156	1162.81	1169.64	1176.49	1183.36	1190.25	1197.16	1204.09	1211.04	1218.01	1225

根据上述表格内容，完成下列问题．

(1)比较大小：$\sqrt{1227}$_____35；

(2)汽车在干燥水泥路面紧急刹车时，制动距离s（单位：m）与刹车前的行驶速度v（单位：m/s）之间的关系近似满足$v^2=19.6s$．现有一辆汽车在该路面行驶时突发状况，紧急刹车后测得制动距离$s=60\text{m}$，求这辆汽车刹车前的行驶速度大约是多少？

【题型 22　含参平方根与立方根综合】

【例 22】按要求解题

(1)若$\sqrt{x+4}+\sqrt{5y-10}=0$，求$xy$的立方根；

(2)若$\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{3x-5}=0$，求 $1-\sqrt{x}$的值.

【变式 22-1】已知a是 27 的立方根，b是$\frac{1}{9}$的平方根与$-\frac{1}{8}$的立方根的和，c是$a+6b$的平方.

(1)直接写出a，b的值，并比较a，b，$a-b$的大小.

(2)求c的所有可能值.

【变式 22-2】已知$a=\sqrt[m-1]{2m-2}$是 $2m-2$ 的算术平方根，$b=\sqrt[n+2]{n-28}$是$n-28$ 的立方根.

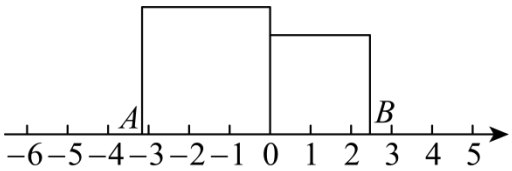
(1)求 a，b 的值.

(2)化简: $\sqrt{a-b-4}-\sqrt[3]{b-a+4}$.

【变式 22-3】已知 $5a+2$ 的立方根是 3，$3a+b-1$ 的算术平方根是 4，c是$\sqrt{13}$的整数部分，一个正数的两个平方根分别是$d+3$ 和 $2d-15$，求 $3a+b+c-d$的平方根.

【题型 23　实数与数轴综合探究】

【例 23】如图，将面积分别为 10 和 6 的正方形纸片的一条边落在数轴上，一个顶点与原点重合，其另一个顶点分别在数轴上的点 A 和点 B 处.



(1)点 A 表示的数为_____；点 B 表示的数为_____.

(2)请你阅读以下材料，并完成作答：

$\because \sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$，$\therefore 2<\sqrt{5}<3$.

$\therefore \sqrt{5}$的整数部分为 2，小数部分为$\sqrt{5}-2$.

根据以上材料可得点 B 所表示数的整数部分为_____，小数部分为_____.

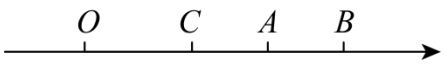
(3)记 $5+\sqrt{6}$的整数部分是 x，小数部分是 y，求 x 和 y 的值.

【变式 23-1】对于实数a，我们规定：用符号$[\sqrt{a}]$表示不大于$\sqrt{a}$的最大整数，称$[\sqrt{a}]$为a的根整数，例如：$[\sqrt{9}]=3$，$[\sqrt{10}]=3$.

(1)计算：$[\sqrt{4}]=$_____；$[\sqrt{37}]=$_____；

(2)若$[\sqrt{x}]=1$，写出所有满足题意的x的整数值_____；

(3)如图所示，数轴上表示 1 和$\sqrt{2}$的对应点分别为A、B，点A是BC的中点，O为原点，设C点表示的数为x，试求$[|x-1|+1-2\sqrt{2}]$的值.



(4)①请你计算$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]-[\sqrt{4}]+[\sqrt{5}]-[\sqrt{6}]+[\sqrt{7}]-[\sqrt{8}]$；

②请你观察①，思考并计算$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]-[\sqrt{4}]+\cdots-[\sqrt{2024}]+[\sqrt{2025}]$，直接写出答案_____

【变式 23-2】综合与实践

阅读：

我国古代数学注重“数”与“形”的结合，有理数的乘方是从“数”的角度刻画重复乘法的简洁形式，而借助图形（如正方形、正方体等）能更直观理解乘方的意义．例如，2^3既表示 $2\times2\times2$，也可对应“棱长为 2 的正方体的体积”；$(-2)^2$表示$(-2)\times(-2)$，也能对应“边长为 2 的正方形的面积（负号可理解为方向的抽象）”．

理解：

（1）已知$a=-3$，计算a^2和a^3的值；并在数轴上分别表示出 a、a^2、a^3对应的点（提示：先确定各数的符号与绝对值）

（2）观察$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，…，写出2^n（n 为正整数）的末位数字的规律，再求2^{2025}的末位数字．

应用：

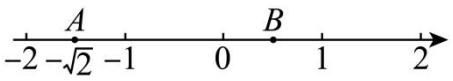
（3）若一个数的平方等于它本身，这个数是_____；若一个数的立方等于它本身，这个数是_____．

（4）已知$|x-2|+(y+1)^2=0$，求x^y的值，并说明该值在数轴上的位置特征．

拓展：

（5）当 n 为正整数时，探究$(-1)^n+(-1)^{n+1}$的值；并思考：是否存在整数 x，使得$|x+3|+(x-1)^4=0$？若存在，求 x 的值；若不存在，说明理由．

【变式 23-3】如图，一只蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬了 2 个单位长度到达点 B，点 A 表示$-\sqrt{2}$，设点 B 所表示的数为 m.



(1)$m=$_____.

(2)求$|m+1|+|m-1|$的值；

(3)在数轴上还有 C、D 两点分别表示实数 c 和 d，且有$|2c+6|$与$\sqrt{d-4}$互为相反数，求 $2c+3d$的平方根.

【题型 24　立方根的应用】

【例 24】将一个正方体铁块完全浸入圆柱形玻璃杯的水中，水位升高了 3cm．已知玻璃杯内部的底面半径为 9cm，则正方体的棱长为_____cm．（π取 3，结果取整数）

【变式 24-1】有两个正方体水箱，已知第一个正方体水箱的棱长是 6dm，第二个正方体水箱的体积比第一个水箱的体积的 3 倍还多 81dm^3，则第二个水箱的表面积为_____dm^2.

【变式 24-2】如图 1 为一种球形容器（注：球的体积计算公式为$\frac{4}{3}\pi R^3$），它受力均匀，承载能力强，且制作材料较为节省，在运输各种气体、液体、液化气时很受欢迎，图 2 为其示意图．现要生产两种容积分别为$\frac{9\pi}{2}\text{m}^3$和$\frac{256\pi}{81}\text{m}^3$的球形容器，则这两种容器的半径差（容器的厚度可忽略）为（　）



图1

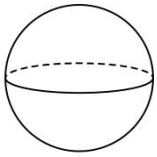


图2

A．$\frac{1}{6}$m　　B．$\frac{2}{3}$m　　C．$\frac{3}{2}$m　　D．$\frac{17}{6}$m

【变式 24-3】据说，我国著名数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：求 59319 的立方根，华罗庚脱口而出：39．你知道他是怎么快速准确地计算出来的吗？请研究解决下列问题：

(1)已知$x^3=10648$，且x为整数．

$\because 1000=10^3<10648<100^3=1000000$，

$\therefore 10<x<100$，x一定是一个两位数；

$\because 10648$ 的个位数字是 8，

$\therefore x$的个位数字一定是_____；

划去 10648 后面的三位 648 得 10，

$\because 8=2^3<10<3^3=27$，

$\therefore x$的十位数字一定是_____；

$\therefore x=$_____．

(2)在软件研发过程中，小明需要处理一个由体素（即体积像素）构成的三维正方体模型，已知该原始模型的体素总数为 140608．为了优化计算性能，需将该模型进行等比例缩小，使其体素总数变为原始模型体素的$\frac{1}{8}$，求缩小后该正方体模型的边长．

【题型 25　实数中的规律探究问题】

【例 25】求 59319 的立方根，解答如下：

①$\because \sqrt[3]{1000}=10,\sqrt[3]{1000000}=100$，又$\because 1000<59319<1000000$，$\therefore 10<\sqrt[3]{59319}<100$，$\therefore$能确定 59319 的立方根是个两位数．

②59319 的个位数是 9，又$\because 9^3=729$，$\therefore$能确定 59319 的立方根的个位数是 9．

③划去 59319 后面的三位 319 得到数 59，而$\sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{59}<\sqrt[3]{64}$，则$3<\sqrt[3]{59}<4$，可得$30<\sqrt[3]{59319}<40$，由此能确定 59319 的立方根的十位数是 3，因此 59319 的立方根是 39．根据以上步骤求出 314432 的立方根是_____．

【变式 25-1】若$x=\sqrt[3]{314}$，$y=\sqrt[3]{0.314}$则x与y的数量关系是：_____.

【变式 25-2】已知$\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$；$\sqrt{2-\frac{2}{5}}=2\times\sqrt{\frac{2}{5}}$；$\sqrt{3-\frac{3}{10}}=3\times\sqrt{\frac{3}{10}}$；$\sqrt{4-\frac{4}{17}}=4\times\sqrt{\frac{4}{17}}$；……；按此规律，若$\sqrt{a-\frac{6}{b}}=a\cdot\sqrt{\frac{6}{b}}$（$a$，$b$为正整数），则$(6a-b)^{2026}$的值为（　　）

A．1　　B．-1　　C．2026　　D．-2026

【变式 25-3】任何实数m，可用$[m]$表示不超过m的最大整数，如$[5]=5$，$[\pi]=2$，现对 35 进行如下操作：$35\xrightarrow{\text{第一次}}[\sqrt{35}]=5\xrightarrow{\text{第二次}[\sqrt{5}]}=2\xrightarrow{\text{第二次}[\sqrt{2}]}=1$，这样对 35 只需进行 3 次操作后变为 1．那么对 520 需进行_____次操作后变为 1．

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872