

昆山市 2026-2027 学年第一学期高二数学期中考试模拟试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3 + a_9 = 6$ ，则 a_6 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 直线 l 过点 $A(1,0)$ ， $B(0,\sqrt{3})$ ，则 l 的倾斜角为 ()

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2}{3}\pi$

3. 已知一个等差数列的项数为奇数，其中所有奇数项的和为 290，所有偶数项的和为 261. 则此数列的项数为 ()

- A. 10 B. 19 C. 21 D. 29

4. 直线 l 与直线 $l_1: x-3y=0$ 及直线 $l_2: x+y-4=0$ 相交于同一点，且 $(1,1)$ 为 l 的一个方向向量，则 l 在 y 轴上的截距为 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ ，则 a_{2025} 的值为 ()

- A. -2 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

6. 已知点 $A(-1,9)$ ， $B(5,1)$ ，点 C 在 x 轴上， $\triangle ABC$ 是直角三角形，这样的三角形的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 64，公比为 $\frac{1}{2}$ ，记 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，则当 $T_n > 1$ 时正整数 n 的最大值为 ()

- A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

8. 已知点 P 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上的动点，点 $A(1,0)$ ，则 $\angle OPA$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得相应的分数，有选错的得 0 分。

9. 正实数 a, b, c 不全相等 ()

A. 若 a, b, c 是等差数列, 则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 也是等差数列

B. 若 a, b, c 是等比数列, 则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 也是等比数列

C. 若 a, b, c 是等差数列, 则 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也是等差数列

D. 若 a, b, c 是等比数列, 则 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也是等比数列

10. 已知直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 1 = 0$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 8$ ()

A. 对任意实数 m , 直线 l 恒过定点 $(-1, 2)$

B. 对任意实数 m , 直线 l 与圆 O 相交, 且 l 被圆 O 截得弦的长度最小值是 4

C. 存在实数 m , 使得直线 l 分圆 O 所得弧长之比为 1:3

D. 存在实数 m , 使得圆上有 3 个点到直线 l 的距离为 1

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 其前 n 项和为 S_n , 则 ()

A. $a_6 = 8$

B. $S_n = a_{n+2} - 1$

C. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} = a_{n+1}^2$

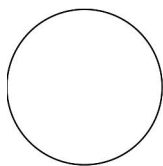
D. $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

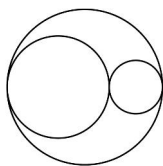
12. 过点 $P(\sqrt{3}, 2)$ 的直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$. 请写出满足要求的一条直线 l 的方程: _____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} + a_n = 4n$, 则 a_{15} 的值为_____.

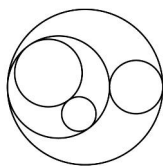
14. 如图, 在一个大圆中放入两个半径之比为 1:2 的小圆, 使得两小圆外切, 且它们均内切于大圆, 且三个切点共线, 记为一次操作. 之后的每次操作, 都在前一次放入的较大的圆中进行上述操作, 现有一个半径为 1 的大圆, 则 4 次操作后图中最小的圆的半径为_____, n 次操作后图中所有圆的面积总和为_____.



第1次操作前



第1次操作后



第2次操作后

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(5,1)$, $B(7,-3)$, $C(2,-8)$.

(1) 求 AB 边上的中线所在直线的方程;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程.

16. 已知圆 $C_1: (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 3$.

(1) 判断并证明圆 C_1 , 圆 C_2 的位置关系;

(2) 若两圆 O_1 与 O_2 相交于 A , B 两点, 满足 $O_1A \perp O_2A$, 则称圆 O_1 与圆 O_2 正交. 现有动圆 M 与圆 C_1 , 圆 C_2 均正交, 自 $N(3,0)$ 引动圆 M 的切线. 求证: 切线长是定值.

17. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = 2a_n - 2$. 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $b_1 = 1$,

$$b_2 = 2, \quad T_n = \frac{n(1+b_n)}{2}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项是由 n 个 1 构成的 n 位数, 如: $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, ... 数列 $\{b_n\}$ 的

第 n 项是由 1 或 2 构成的所有 n 位数的和, 如: $b_1 = 1 + 2 = 3$, $b_2 = 11 + 12 + 21 + 22 = 66$,

$$b_3 = 111 + 112 + 121 + 122 + 211 + 212 + 221 + 222 = 1332, \dots$$

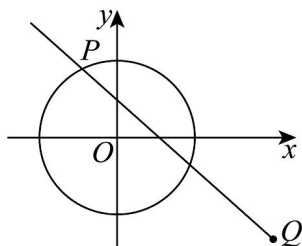
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 S_n ;

(2) 试求出 b_4 , 并直接写出数列 $\{b_n\}$ 的一个通项公式 (无需说明理由);

(3) 求满足不等式 $b_n > 100a_n$ 的正整数 n 的最小值. (参考数据: $\lg 2 \approx 0.30$, $\lg 3 \approx 0.48$)

19. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 点 P 是圆 C 上一动点, 点 A 是平面直角坐标系中一点, 动点 Q 满足

$$\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}.$$



- (1) 若 $\lambda = 2$, 点 A 的坐标为 $(1,1)$, 求动点 Q 的轨迹方程;
- (2) 若 $\lambda = \frac{3}{2}$, 点 A 为圆 $E: (x+4)^2 + (y+4)^2 = 9$ 上的动点. 试问: 是否存在定点 T 恒在动点 Q 的轨迹上? 若存在, 求出定点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 若 $\lambda_n = n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 记 S_n 为动点 Q 在 $\lambda = \lambda_n$ 时轨迹的面积, 求满足 $\frac{\pi}{S_1} + \frac{\pi}{S_2} + \cdots + \frac{\pi}{S_n} < t$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立的最小正整数 t .

昆山市 2026-2027 学年第一学期高二数学期中考试模拟试题解析

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3 + a_9 = 6$ ，则 a_6 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】由等差数列等差中项的性质直接求解即可。

【详解】在等差数列中， $a_3 + a_9 = 2a_6 = 6 \Rightarrow a_6 = 3$ 。

故选：C。

2. 直线 l 过点 $A(1,0)$ ， $B(0,\sqrt{3})$ ，则 l 的倾斜角为 ()

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2}{3}\pi$

【答案】D

【解析】

【分析】求出直线 l 的斜率，再由斜率的定义即可得到倾斜角。

【详解】因为直线 l 过点 $A(1,0)$ ， $B(0,\sqrt{3})$ ，所以直线 l 的斜率 $k = \frac{\sqrt{3}-0}{0-1} = -\sqrt{3}$ ，

设直线 l 的倾斜角 θ ，则 $\tan \theta = -\sqrt{3}$ ，又 $0 \leq \theta < \pi$ ，所以 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ，

所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{2}{3}\pi$ 。

故选：D。

3. 已知一个等差数列的项数为奇数，其中所有奇数项的和为 290，所有偶数项的和为 261. 则此数列的项数为 ()

- A. 10 B. 19 C. 21 D. 29

【答案】B

【解析】

【分析】设项数为 $2n-1$ ，则 $a_n = S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = 29$ ，再利用等差中项的性质和等差数列的求和公式化简

$S_{2n-1} = S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = 551 = (2n-1)a_n$ ，然后计算可得.

【详解】设项数为 $2n-1$,

则 $a_n = S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = 29$,

$$S_{2n-1} = S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = 551 = (2n-1)a_n \Rightarrow 2n-1 = \frac{551}{29} = 19.$$

$\therefore$ 此数列共有 19 项.

故选: B

4. 直线 l 与直线 $l_1: x-3y=0$ 及直线 $l_2: x+y-4=0$ 相交于同一点, 且 $(1,1)$ 为 l 的一个方向向量, 则 l 在 y 轴上的截距为 ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可得交点 $(3,1)$, 再由方向向量可得直线斜率, 接着求出直线方程即可.

【详解】联立方程 $\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, 直线 l 过点 $(3,1)$,

又 $(1,1)$ 为直线的方向向量, 则直线斜率为 1,

直线 $l: y = x - 2$, 当 $x = 0$, $y = -2$, 即 l 在 y 轴上的截距为 -2.

故选: A

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 则 a_{2025} 的值为 ()

A. -2

B. -1

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意, 求得 $a_1, a_2, a_3, \dots$, 得到数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列, 结合 $a_{2025} = a_{675 \times 3} = a_3$, 即可求解.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$,

可得 $a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 - 2 = -1$, $a_4 = 1 + 1 = 2$, ...,

可得数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列, 所以 $a_{2025} = a_{675 \times 3} = a_3 = -1$.

故选: B.

6. 已知点 $A(-1, 9)$, $B(5, 1)$, 点 C 在 x 轴上, $\triangle ABC$ 是直角三角形, 这样的三角形的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】设点 C 的坐标, 讨论当 A, B, C 分别为直角时的情况, 求得点 C 的坐标, 得满足题意的三角形共有 3 个.

【详解】设 $C(x, 0)$. 显然直线 AB, BC, AC 斜率都存在.

若 A 为直角, 则 $k_{AB} \cdot k_{AC} = -1$, 所以 $\frac{1-9}{5-(-1)} \times \frac{0-9}{x+1} = -1$, 解得 $x = -13$;

若 B 为直角, 则 $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$, 所以 $\frac{1-9}{5-(-1)} \times \frac{0-1}{x-5} = -1$, 解得 $x = \frac{11}{3}$;

若 C 为直角, 则 $k_{BC} \cdot k_{AC} = -1$, 所以 $\frac{-1}{x-5} \times \frac{-9}{x+1} = -1$, 解得 $x = 2$.

故有三个满足要求的直角三角形.

故选: C

方法二: 若 A 为直角, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (6, -8) \cdot (x+1, -9) = 6x + 78 = 0$, 解得 $x = -13$;

若 B 为直角, 则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6, 8) \cdot (x-5, -1) = -6x + 22 = 0$, 解得 $x = \frac{11}{3}$;

若 C 为直角, 则 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-1-x, 9) \cdot (5-x, 1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$, 解得 $x = 2$.

故有三个满足要求的直角三角形.

故选: C

方法三: 当 A, B 为直角顶点时, 显然有两个这样的直角三角形;

若 C 为直角顶点, $\because AB$ 中点 $D(2, 5)$, $AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (9-1)^2} = 10$, 则 $CD = \frac{1}{2} AB = 5$, 而点 D

到 x 距离为 5, $\therefore$ 此时有唯一点 $C(2, 0)$, 符合要求.

故有三个满足要求的直角三角形.

故选: C

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 64, 公比为 $\frac{1}{2}$, 记 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 则当 $T_n > 1$ 时正整数 n 的最大值为 ()

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

【答案】A

【解析】

【分析】利用等比数列的通项公式求出 a_n , 再结合数列的单调性分析 $T_n > 1$ 时正整数 n 的取值.

【详解】由题意 $a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7}$, $\therefore a_6 = 2$, $a_7 = 1$, $a_8 = \frac{1}{2}$

$$T_{11} = a_6^{11} > 1, \quad T_{12} = (a_6 \cdot a_7)^6 = 2^6 > 1, \quad T_{13} = a_7^{13} = 1,$$

$\therefore$ 当 $T_n > 1$ 时正整数 n 的最大值为 12.

故选 A.

8. 已知点 P 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上的动点, 点 $A(1, 0)$, 则 $\angle OPA$ 的最大值是 ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】B

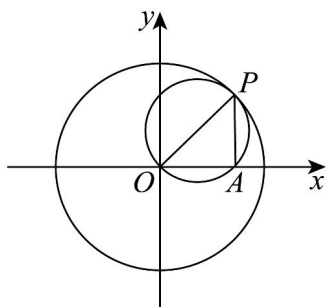
【解析】

【分析】法一根据几何意义并结合正弦定理直接求解; 法二 $AP = x \in [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, 再根据余弦定理

并结合基本不等式得 $\cos \angle OPA = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{2}x} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 即可求解; 法三设 $\angle OAP = \theta \in [0, \pi]$, 则

$\sin \angle OPA = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 结合 $\angle OPA$ 为锐角, 即可得到 $\angle OPA$ 的最大值即可.

【详解】法一: 如图, 设过 O, P, A 三点的圆的半径为 R ,



则 $\frac{OA}{\sin \angle OPA} = 2R$, 又 $OA = 1 < OP = \sqrt{2}$,

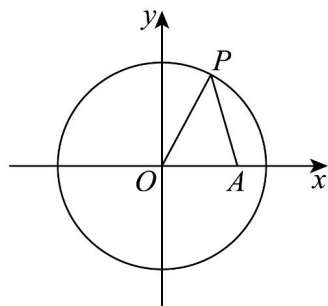
所以 $\angle OPA < \angle OAP$ ，则 $\angle OPA$ 是锐角，可得 $R = \frac{1}{2\sin \angle OPA}$ ，

故 $\angle OPA$ 取最大， $\sin \angle OPA$ 最大，

则 $OP = 2R$ 时， R 取得最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，此时 $\sin \angle OPA = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

而 $\angle OPA$ 是锐角，此时 $\angle OPA = \frac{\pi}{4}$ ，

法二：如图，结合圆的性质设 $AP = x \in [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$ ，



则由余弦定理得 $\cos \angle OPA = \frac{2+x^2-1}{2 \times \sqrt{2} \times x} = \frac{x^2+1}{2\sqrt{2}x}$ ，

由基本不等式得 $\frac{x^2+1}{2\sqrt{2}x} = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

当且仅当 $\frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x}$ ，即 $x=1$ 时取等，

故 $\angle OPA \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ，则 $\angle OPA$ 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$ ；

法三：设 $\angle OAP = \theta \in [0, \pi]$ ，由正弦定理得 $\frac{OA}{\sin \angle OPA} = \frac{OP}{\sin \theta}$ ，

即 $\frac{1}{\sin \angle OPA} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta}$ ，则 $\sin \angle OPA = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

因为 $OA < OP$ ，所以 $\angle OPA < \angle OAP$ ，

故 $\angle OPA$ 为锐角，得到 $\angle OPA$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$ 。

故选：B。

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得相应的分数，有选错的得 0 分。

9. 正实数 a, b, c 不全相等 ()

A. 若 a, b, c 是等差数列, 则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 也是等差数列

B. 若 a, b, c 是等比数列, 则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 也是等比数列

C. 若 a, b, c 是等差数列, 则 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也是等差数列

D. 若 a, b, c 是等比数列, 则 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也是等比数列

【答案】BD

【解析】

【分析】利用赋值法可判断 AC; 利用等比中项法可判断 BD.

【详解】对于 A, 取 $a=1, b=2, c=3$, 则 $\frac{1}{a}=1, \frac{1}{b}=\frac{1}{2}, \frac{1}{c}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}-1 \neq \frac{1}{3}-\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 不成等差数列, 故 A 错误;

对于 B, 若 a, b, c 是等比数列, 则 $b^2=ac$, 所以 $\frac{1}{a} \times \frac{1}{c} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2$,

所以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 是等比数列, 故 B 正确;

对于 C, 取 $a=1, b=2, c=3$, 则 $\sqrt{a}=1, \sqrt{b}=\sqrt{2}, \sqrt{c}=\sqrt{3}$,

又 $\sqrt{2}-1 \neq \sqrt{3}-\sqrt{2}$, 故 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 不是等差数列, 故 C 错误;

对于 D, 若 a, b, c 是等比数列, 则 $b^2=ac$,

又 $\sqrt{c} \times \sqrt{a} = \sqrt{ac} = \sqrt{b^2} = (\sqrt{b})^2$, 所以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 是等比数列, 故 D 正确.

故选: BD.

10. 已知直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 1 = 0$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 8$ ()

A. 对任意实数 m , 直线 l 恒过定点 $(-1, 2)$

B. 对任意实数 m , 直线 l 与圆 O 相交, 且 l 被圆 O 截得弦的长度最小值是 4

C. 存在实数 m , 使得直线 l 分圆 O 所得弧长之比为 1:3

D. 存在实数 m , 使得圆上有 3 个点到直线 l 的距离为 1

【答案】ACD

【解析】

【分析】将直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 1 = 0$ 化为 $m(2x+y) + x + y - 1 = 0$ ，即可求出直线 l 恒过的定点，判断 A；判断直线过的定点在圆内，结合圆的结合性质以及弦长公式可判断 B；由题意可确定劣弧所对圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ ，求出此时弦长，结合 B 的分析可判断 C；由题意可得圆心到直线 l 距离为 $2\sqrt{2}-1$ ，结合圆心 O 到直线 l 的距离 $d \leq OC$ ，比较大小，即可判断 D。

【详解】直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 1 = 0$ 即 $m(2x+y) + x + y - 1 = 0$ ，

$$\text{令 } \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases},$$

所以直线 l 过定点 $(-1, 2)$ ，故 A 正确；

$\because (-1)^2 + 2^2 < 8$ ，故定点 $(-1, 2)$ 在圆 O 内， $\therefore$ 直线 l 与圆 O 相交，

设 $C(-1, 2)$ ，由圆的几何性质，当直线 l 与 OC 垂直时，弦长最小，

$OC = \sqrt{5}$ ，则最小弦长为 $2\sqrt{8 - (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{3}$ ，故 B 错误

对于 C，若直线 l 分圆 O 所得弧长之比为 1:3，则劣弧所对圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ ，

此时弦长为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$ ，而 $2\sqrt{3} < 4 < 4\sqrt{2}$ ，故这样的直线是存在的，

$\therefore$ 存在实数 m 满足条件，故 C 正确

对于 D，圆 O 半径为 $2\sqrt{2}$ ，若圆上有 3 个点到直线 l 的距离为 1，

则圆心到直线 l 距离为 $2\sqrt{2}-1$ ， $\because$ 圆心 O 到直线 l 的距离 $d \leq OC$ ，

而 $2\sqrt{2}-1 < OC = \sqrt{5}$ ， $\therefore$ 存在实数 m 满足条件，故 D 正确

故选：ACD。

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，其前 n 项和为 S_n ，则 ()

A. $a_6 = 8$

B. $S_n = a_{n+2} - 1$

C. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} = a_{n+1}^2$

D. $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于 A，根据递推式计算即可；对于 B，由题可得 $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ ，再根据

$S_n = (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$ 即可推导；对于 C，可举例判断；对于

D, 由题知 $a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$, $a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_na_{n+1}$, 再利用累加法即可求解.

【详解】 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, 故 A 正确;

对于 B, 由 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \Rightarrow a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, $\therefore S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1, \text{ 故 B 正确}$$

对于 C, 当 $n = 2$ 时, $a_1a_2 + a_2a_3 = 3$, 而 $a_3^2 = 4$, $\therefore a_1a_2 + a_2a_3 \neq a_3^2$, 故 C 错误.

因为 $a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$, $\therefore a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n+2} - a_na_{n+1}$,

即 $a_2^2 = a_2a_3 - a_1a_2$, $a_3^2 = a_3a_4 - a_2a_3$, $\dots$, $a_n^2 = a_na_{n+1} - a_{n-1}a_n$

累加得 $a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = a_na_{n+1} - a_1a_2 = a_na_{n+1} - a_1^2$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_na_{n+1}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选: ABD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 过点 $P(\sqrt{3}, 2)$ 的直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$. 请写出满足要求的一条直线 l 的方程: _____.

【答案】 $x - 4\sqrt{3}y + 7\sqrt{3} = 0$ 或 $x = \sqrt{3}$. (写出其中一个即可)

【解析】

【分析】讨论直线的斜率是否存在, 斜率存在时, 设出直线方程, 结合弦长公式即可求出直线斜率, 即可得答案.

【详解】由题意知过点 $P(\sqrt{3}, 2)$ 的直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点,

当直线 l 的斜率不存在时, 直线方程为 $x = \sqrt{3}$, 代入 $x^2 + y^2 = 4$ 中,

可得 $y = \pm 1$, 即 A, B 坐标为 $(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)$, 此时 $|AB| = 2$, 符合题意;

当直线 l 的斜率存在时, 设方程为 $y - 2 = k(x - \sqrt{3})$, 即 $kx - y - \sqrt{3}k + 2 = 0$,

设圆心 O 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|-\sqrt{3}k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}}$,

由 $|AB| = 2$, 圆的半径 $r = 2$ 可得 $2 = 2\sqrt{r^2 - d^2}$, 即 $2 = 2\sqrt{4 - d^2}$, 解得 $d = \sqrt{3}$,

故 $\frac{|-\sqrt{3}k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{3}$, 解得 $k = \frac{1}{4\sqrt{3}}$,

故直线 l 的方程为 $\frac{1}{4\sqrt{3}}x - y - \sqrt{3} \times \frac{1}{4\sqrt{3}} + 2 = 0$, 即 $x - 4\sqrt{3}y + 7\sqrt{3} = 0$,

故答案为: $x - 4\sqrt{3}y + 7\sqrt{3} = 0$ 或 $x = \sqrt{3}$. (写出其中一个即可)

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} + a_n = 4n$, 则 a_{15} 的值为_____.

【答案】29

【解析】

【分析】由已知可得 $a_{n+2} - a_n = 4$, 可得 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列, 可求得 a_{15} .

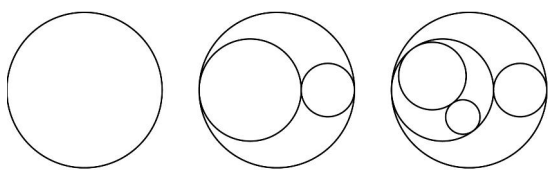
【详解】由 $a_{n+1} + a_n = 4n$, 可得 $a_{n+2} + a_{n+1} = 4n + 4$, 两式相减 $a_{n+2} - a_n = 4$,

$\therefore \{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1, 公差为 4 的等差数列,

$$\therefore a_{15} = a_{2 \times 8 - 1} = a_{2 \times 1 - 1} + (8-1)d = 1 + 28 = 29.$$

故答案为: 29.

14. 如图, 在一个大圆中放入两个半径之比为 1:2 的小圆, 使得两小圆外切, 且它们均内切于大圆, 且三个切点共线, 记为一次操作. 之后的每次操作, 都在前一次放入的较大的圆中进行上述操作, 现有一个半径为 1 的大圆, 则 4 次操作后图最小的圆的半径为_____, n 次操作后图中所有圆的面积总和为_____.



第1次操作前

第1次操作后

第2次操作后

【答案】 ①. $\frac{8}{81}$ ②. $\pi \left(2 - \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} \right)$

【解析】

【分析】由题意可知小圆半径是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 等比数列; 大圆半径是首项为 $\frac{2}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 等比数列, 结合等比数列前 n 项和公式计算即可求解.

【详解】 n 次操作后, 小圆的半径依次为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$,

大圆的半径依次为 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

所以小圆半径是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 等比数列,

大圆半径是首项为 $\frac{2}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 等比数列,

4 次操作后图中最小的圆的半径为 $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$;

n 次操作后, 小圆面积和为:

$$\pi \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)^2 \right] = \frac{\pi}{9} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)} \right] = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\pi}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right),$$

大圆面积和为:

$$\pi \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right] = \pi \cdot \frac{\frac{4}{9} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4\pi}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right)$$

所以大圆与小圆面积和为 $\frac{\pi}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right) + \frac{4\pi}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right) = \pi \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right)$,

则所有圆的面积总和为 $\pi \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right) + \pi = \pi \left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right)$.

故答案为: $\frac{8}{81}; \pi \left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right)$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(5,1)$, $B(7,-3)$, $C(2,-8)$.

(1) 求 AB 边上的中线所在直线的方程;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程.

【答案】 (1) $7x - 4y - 46 = 0$

(2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

【解析】

【分析】 (1) 先求出 AB 边的中点坐标, 再根据直线两点间的斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 得到中线斜率, 使用

点斜式写出直线方程；(2) 设圆的一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$)，代入顶点坐标即可求出外接圆的方程。

【详解】(1) 线段 AB 中点为 $D(6, -1)$ ，则 AB 边中线的斜率为 $k = \frac{-1+8}{6-2} = \frac{7}{4}$ ，
所以 AB 边上的中线所在直线方程为 $y+8 = \frac{7}{4}(x-2)$ 化简得 $7x-4y-46=0$ ，

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，代入三点坐标得，

$$\begin{cases} 5^2 + 1^2 + 5D + E + F = 0 \\ 7^2 + (-3)^2 + 7D - 3E + F = 0 \\ 2^2 + (-8)^2 + 2D - 8E + F = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} D = -4 \\ E = 6 \\ F = -12 \end{cases},$$

即 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ，

即 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ 。

16. 已知圆 $C_1: (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 1$ ，圆 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 3$ 。

(1) 判断并证明圆 C_1 ，圆 C_2 的位置关系；

(2) 若两圆 O_1 与 O_2 相交于 A ， B 两点，满足 $O_1A \perp O_2A$ ，则称圆 O_1 与圆 O_2 正交。现有动圆 M 与圆 C_1 ，圆 C_2 均正交，自 $N(3,0)$ 引动圆 M 的切线。求证：切线长是定值。

【答案】(1)

两圆内含。

证明：因为圆 C_1 圆心 $(\sqrt{2}, 0)$ ，半径 $r_1 = 1$ ，圆 C_2 圆心 $(2, 0)$ ，半径 $r_2 = \sqrt{3}$ ，

圆心距 $C_1C_2 = 2 - \sqrt{2} < \sqrt{3} - 1$ ，所以两圆内含。

(2)

证明：设动圆 M 圆心 $M(x_0, y_0)$ ，半径为 R ，动圆 M 与圆 C_1 交于 A ， B 两点，由题意有 $C_1A \perp MA$ ，

所以 $MA^2 + C_1A^2 = MC_1^2$ ，即 $R^2 + 1 = MC_1^2$ ，

动圆 M 与圆 C_2 交于 C ， D 两点，

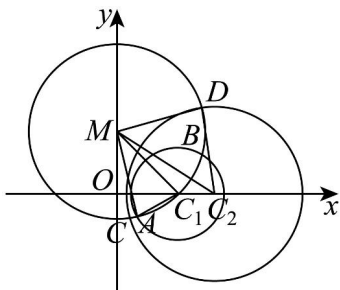
同理可得 $MD^2 + C_2D^2 = MC_2^2$ ，即 $R^2 + 3 = MC_2^2$ ，故 $MC_2^2 - MC_1^2 = 2$ ，

则有 $(x_0 - 2)^2 + y_0^2 - (x_0 - \sqrt{2})^2 - y_0^2 = 2$ 整理得 $x_0 = 0$ ，即圆心 $M(0, y_0)$ ，

所以半径 $R = \sqrt{y_0^2 + 1}$,

自 $N(3,0)$ 引动圆 M 的切线, 切线长 $l = \sqrt{MN^2 - R^2} = \sqrt{3^2 + y_0^2 - R^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

所以切线长是定值 $2\sqrt{2}$.



【解析】

【分析】(1) 求出圆心距即可判断两圆的位置关系.

(2) 设出动圆 M 的圆心和半径, 根据“两圆正交”的定义, 分别列出动圆 M 与圆 C_1 , 圆 C_2 正交的方程;

联立方程, 消去半径 R , 推导出圆心 M 的轨迹方程; 利用切线长公式, 结合圆心轨迹方程, 计算从 $N(3,0)$ 引动圆 M 的切线, 即可证明其为定值.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

17. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = 2a_n - 2$. 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $b_1 = 1$,

$$b_2 = 2, \quad T_n = \frac{n(1+b_n)}{2}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

【答案】(1) $a_n = 2^n$, $b_n = n$

(2) $R_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

【解析】

【分析】(1) 利用 a_n , S_n 的关系可求得 a_n ; $b_n = T_n - T_{n-1}$ ($n \geq 2$), 可得 $(n-1)b_{n+1} + 1 = nb_n$ 递推关系,

进而可得 $b_{n+1} + b_{n-1} = 2b_n$ ($n \geq 2$), 可求通项公式;

(2) 利用错位相减法可求得 R_n .

【小问 1 详解】

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} \Rightarrow a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2), \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 2$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, $\therefore a_n = 2^n$

$$\text{由 } T_n = \frac{n(1+b_n)}{2} \text{ 得 } b_n = T_n - T_{n-1} = \frac{n(1+b_n)}{2} - \frac{(n-1)(1+b_{n-1})}{2} (n \geq 2),$$

$$\text{整理得 } (n-2)b_n + 1 = (n-1)b_{n-1} (n \geq 2) \text{ ①, } \therefore (n-1)b_{n+1} + 1 = nb_n \text{ ②}$$

$$\text{②-①得 } (n-1)b_{n+1} + (n-1)b_{n-1} = 2(n-1)b_n (n \geq 2), \text{ 即 } b_{n+1} + b_{n-1} = 2b_n (n \geq 2)$$

即数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $\because b_1 = 1, b_2 = 2, \therefore d = 1, \therefore b_n = b_1 + (n-1)d = n$

【小问 2 详解】

$$a_n b_n = n \cdot 2^n$$

$$\therefore R_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n,$$

$$\therefore 2R_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{两式相减 } R_n = -(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) + n \cdot 2^{n+1} = 2 - 2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2,$$

即数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 $R_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项是由 n 个 1 构成的 n 位数, 如: $a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, \dots$ 数列 $\{b_n\}$ 的

第 n 项是由 1 或 2 构成的所有 n 位数的和, 如: $b_1 = 1 + 2 = 3, b_2 = 11 + 12 + 21 + 22 = 66,$

$$b_3 = 111 + 112 + 121 + 122 + 211 + 212 + 221 + 222 = 1332, \dots$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 S_n ;

(2) 试求出 b_4 , 并直接写出数列 $\{b_n\}$ 的一个通项公式 (无需说明理由);

(3) 求满足不等式 $b_n > 100a_n$ 的正整数 n 的最小值. (参考数据: $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$)

【答案】(1) $a_n = \frac{10^n - 1}{9}, S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81};$

(2) $26664, b_n = \frac{20^n - 2^n}{6}$

(3) 7

【解析】

【分析】(1) 依题意可得 $a_{n+1} - a_n = 10^n = \frac{10^{n+1} - 10^n}{9}$, 从而得到 $a_{n+1} - \frac{10^{n+1}}{9} = a_n - \frac{10^n}{9}$, 即可求出 $\{a_n\}$

的通项公式, 再由分组求和法计算可得;

(2) 依题意 b_n 是由 2^n 个 n 位数相加, 其个位上的数字和为 $(1+2) \times 2^{n-1}$,

十位上的数字和为 $(1+2) \times 2^{n-1}$, $\dots$, 第 n 位上的数字和为 $(1+2) \times 2^{n-1}$, 即可求出 b_4 , 再由

$b_{n+1} = (1+2) \times 2^n \times 10^n + 2b_n$, 求出 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(3) 由 (1) (2) 可得 $\frac{2^{n-1}}{3} > \frac{100}{9}$, 再结合指数函数的性质计算可得.

【小问 1 详解】

依题意 $a_{n+1} - a_n = 10^n = \frac{10^{n+1} - 10^n}{9}$,

所以 $a_{n+1} - \frac{10^{n+1}}{9} = a_n - \frac{10^n}{9}$, 又 $a_1 - \frac{10}{9} = -\frac{1}{9}$,

所以数列 $\left\{a_n - \frac{10^n}{9}\right\}$ 为常数列, $\therefore a_n - \frac{10^n}{9} = -\frac{1}{9}$,

$$\therefore a_n = \frac{10^n - 1}{9},$$

$$S_n = \frac{10^1 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \dots + \frac{10^n - 1}{9} = \frac{1}{9} (10^1 - 1 + 10^2 - 1 + \dots + 10^n - 1)$$

$$= \frac{1}{9} (10^1 + 10^2 + \dots + 10^n) - \frac{1}{9} n$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{10^1 (1 - 10^n)}{1 - 10} - \frac{1}{9} n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81};$$

【小问 2 详解】

依题意 b_n 是由 2^n 个 n 位数相加, 其个位上的数字和为 $(1+2) \times 2^{n-1}$,

十位上的数字和为 $(1+2) \times 2^{n-1}$, $\dots$, 第 n 位上的数字和为 $(1+2) \times 2^{n-1}$,

又 $b_1 = 1+2 = 3$, $b_2 = (1+2) \times 2^1 \times 10^1 + 2 \times 3 = 66$, $b_3 = (1+2) \times 2^2 \times 10^2 + 2 \times 66 = 1332$,

所以 $b_4 = (1+2) \times 8 \times 10^3 + 2b_3 = 24000 + 2664 = 26664$,

$$b_{n+1} = (1+2) \times 2^n \times 10^n + 2b_n = 2b_n + 3 \times 20^n = 2b_n + \frac{1}{6} \times 20^{n+1} - \frac{1}{3} \times 20^n,$$

$$\text{所以 } b_{n+1} - \frac{1}{6} \times 20^{n+1} = 2 \left(b_n - \frac{1}{6} \times 20^n \right), \text{ 又 } b_1 - \frac{1}{6} \times 20^1 = -\frac{2}{6},$$

所以 $\left\{ b_n - \frac{1}{6} \times 20^n \right\}$ 是以 $-\frac{2}{6}$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } b_n - \frac{1}{6} \times 20^n = \left(b_1 - \frac{1}{6} \times 20^1 \right) \times 2^{n-1} = -\frac{2^n}{6}, \text{ 即 } b_n = \frac{20^n - 2^n}{6};$$

【小问 3 详解】

$$\text{由 } \frac{20^n - 2^n}{6} > \frac{100(10^n - 1)}{9}, \text{ 即 } \frac{2^{n-1}(10^n - 1)}{3} > \frac{100(10^n - 1)}{9}, \because 10^n - 1 > 0,$$

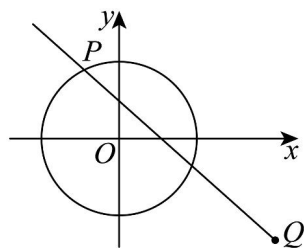
$$\text{即 } \frac{2^{n-1}}{3} > \frac{100}{9}, \text{ 所以 } 2^n > \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3},$$

$$\text{又 } y = 2^x \text{ 在定义域上单调递增, 且 } 2^7 = 128 > 66\frac{2}{3}, 2^6 = 64 < 66\frac{2}{3},$$

所以 n 的最小值为 7.

19. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 点 P 是圆 C 上一动点, 点 A 是平面直角坐标系中一点, 动点 Q 满足

$$\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}.$$



(1) 若 $\lambda = 2$, 点 A 的坐标为 $(1, 1)$, 求动点 Q 的轨迹方程;

(2) 若 $\lambda = \frac{3}{2}$, 点 A 为圆 $E: (x+4)^2 + (y+4)^2 = 9$ 上的动点. 试问: 是否存在定点 T 恒在动点 Q 的轨迹上? 若存在, 求出定点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若 $\lambda_n = n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 记 S_n 为动点 Q 在 $\lambda = \lambda_n$ 时轨迹的面积, 求满足 $\frac{\pi}{S_1} + \frac{\pi}{S_2} + \cdots + \frac{\pi}{S_n} < t$ 对任意

$n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立的最小正整数 t .

【答案】(1) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

(2) 存在, $T(2,2)$

(3) 2

【解析】

【分析】(1) 设 $Q(x, y)$, 再根据 $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$, 得到 $P\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$ 代入圆 C 即可求轨迹方程;

(2) 设 $A(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, 则 $P\left(\frac{2x+x_0}{3}, \frac{2y+y_0}{3}\right)$, 再代入得到 Q 的轨迹方程即可证明;

(3) 设 $A(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, 则 $P\left(\frac{x+(n-1)x_0}{n}, \frac{y+(n-1)y_0}{n}\right)$, 进而得到 Q 的轨迹方程且

$S_n = n^2\pi$, 再根据 $\frac{\pi}{S_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ 进行放缩求和即可.

【小问 1 详解】

$\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$, 设 $Q(x, y)$, 则 $P\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$

P 代入圆 C 得: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, 即 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

即动点 Q 的轨迹方程为: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$;

【小问 2 详解】

$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$, 设 $A(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, 则 $P\left(\frac{2x+x_0}{3}, \frac{2y+y_0}{3}\right)$

A, P 分别在圆 E 和圆 C 上, 则 $\begin{cases} (x_0+4)^2 + (y_0+4)^2 = 9 \\ (2x+x_0)^2 + (2y+y_0)^2 = 9 \end{cases}$

整理可得 Q 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 + (x-2)x_0 + (y-2)y_0 - 8 = 0$.

显然恒过定点 $(2,2)$, 故 $T(2,2)$;

【小问 3 详解】

$\lambda = \lambda_n = n$ 时, $\overrightarrow{AQ} = n\overrightarrow{AP}$, 设 $A(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, 则 $P\left(\frac{x+(n-1)x_0}{n}, \frac{y+(n-1)y_0}{n}\right)$

$$P \text{ 代入圆 } C \text{ 得: } \frac{[x+(n-1)x_0]^2}{n^2} + \frac{[y+(n-1)y_0]^2}{n^2} = 1$$

即 Q 的轨迹方程为: $[x+(n-1)x_0]^2 + [y+(n-1)y_0]^2 = n^2$, 则 $S_n = n^2\pi$

$$\frac{\pi}{S_n} = \frac{1}{n^2}, \text{ 则 } \frac{\pi}{S_1} = 1, \text{ 故 } \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{S_i} \geq 1$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } \frac{\pi}{S_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \text{ 故 } \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{S_i} < 1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

所以 $1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{S_i} < 2$, 因此最小正整数 t 的值为 2.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872