

昆山市 2026-2027 学年第一学期高三数学期中考试模拟试题

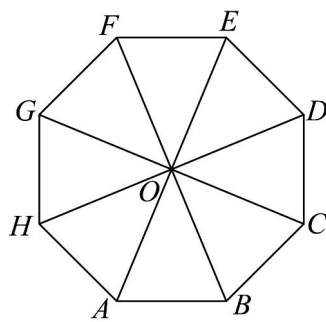
1. 若 $(1-i) + (2+3i) = a+bi$ ($a, b \in R, i$ 是虚数单位), 则 a, b 的值分别等于
- A. 3, -2 B. 3, 2 C. 3, -3 D. -1, 4
2. 一元二次不等式 $2x^2 - x - 1 < 0$ 的解集是 ()
- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$
- C. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ D. $(1, 2)$
3. $f(x)$ 是定义在 $[-6, 6]$ 上的偶函数, 且 $f(3) > f(1)$, 则下列各式中一定成立的是 ()
- A. $f(0) < f(6)$ B. $f(3) > f(2)$
- C. $f(-1) < f(3)$ D. $f(2) > f(6)$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\angle A$ 为锐角” 是 “ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ” 的 ()
- A. 充分必要条件 B. 充分不必要条件
- C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 函数 $y = -2^{-x}$ 与 $y = 2^x$ 的图象 ()
- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
- C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y=x$ 对称
6. 若直线 l 不平行于平面 α , 则下列结论正确的是 ()
- A. 平面 α 内的所有直线都与直线 l 异面 B. 平面 α 内不存在与直线 l 平行的直线
- C. 平面 α 内的所有直线都与直线 l 相交 D. 直线 l 与平面 α 一定有公共点
7. 已知 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\tan \alpha + \tan \beta = 3$, 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为 ()
- A. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

8. 过点 $P(x_0, y_0)$ 作曲线 $y = \ln x$ 的两条切线, 记两切点分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 若两条切线斜率之积为 1, 则 $\frac{y_0 + 1}{x_0}$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 《易经》是中华民族智慧的结晶, 易有太极, 太极生两仪, 两仪生四象, 四象生八卦. 如图所示是八卦模型图以及根据该图抽象得到的正八边形 $ABCDEFGH$, 其中 $|AB| = 1$, O 为正八边形的中心, 则 ()



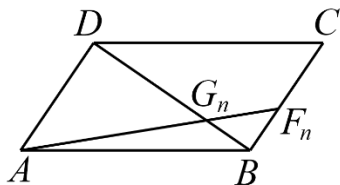
- A. $\angle AOB = 45^\circ$ B. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \sqrt{2} \overrightarrow{AB}$
C. $\overrightarrow{HD} = \sqrt{2} \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 1$

10. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 如星形线、心形线、卵形线等、已知卵形线

$C: x^2 + y - 2\sqrt{y} = 0$, 则 ()

- A. 曲线 C 关于 y 轴对称
B. 曲线 C 上横、纵坐标均是整数的点恰有 4 个
C. 曲线 C 上存在点 P , 使得 P 到点 $(0, 1)$ 的距离小于 1
D. 曲线 C 围成区域的面积大于 4

11. 如图, 已知平面四边形 $ABCD$ 中, $F_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 为边 BC 所在直线上的一系列点, 连接 AF_n 交 BD 于 G_n , 点 $G_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足 $\overrightarrow{G_n F_n} + (a_{n+1} a_n) \overrightarrow{G_n C} = (a_{n+1} - a_n) \overrightarrow{G_n B}$, 其中数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2 的数列, 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, 则下列结论正确的是 ()



- A. $a_{2025} = 2$
 B. $T_{2025} = 1$
 C. $S_{2025} = -\frac{1765}{3}$
 D. 存在实数 k , 使得数列 $\left\{\frac{1}{a_n - k}\right\}$ 为等差数列

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差不为 0. 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为_____.

13. 已知函数 $y = f(x)$ 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin x, & \sin x \leq \cos x \\ \sqrt{2}\cos x, & \sin x > \cos x \end{cases}$ 则函数

$y = f(x) - |\ln x|$ 的零点个数为_____.

14. 已知实数 $\lambda < 0$, 若关于 x 的方程 $2\sin^2 x - (\lambda + 1)\sin x + 1 = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个不同的实数根, 则实数 λ 的取值集合是_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 向量 $\vec{p}_n = (4, -2n-1)$, $\vec{q}_n = (S_n, a_n)$, 有 $\vec{p}_n \cdot \vec{q}_n = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{2}$.

16. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $c \sin B + \sqrt{3} c \cos B = \sqrt{3} a + b$.

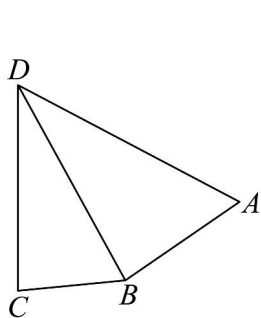
(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且 $AD = DB, CE = 2EA, c = 2$, 求 $\triangle ADE$ 面积的最大值和此时 $\triangle ADE$ 的周长.

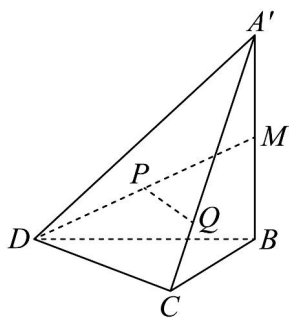
17. 如图①, 平面四边形 $ABCD$ 由两个三角形拼接而成, 其中 $AB \perp BD, BC \perp CD$,

$\angle A = \angle DBC = 60^\circ$, 现以 BD 为轴将 $\triangle ABD$ 向上折起至位置 A' , 连结 $A'C$ 得到如图②的三棱锥

$A'-BCD$, M 是 $A'B$ 的中点, P 是 DM 的中点, Q 在 $A'C$ 上, 且 $A'Q = 3QC$.



图①



图②

(1) 求证: $PQ \parallel$ 平面 BCD ;

(2) 若平面 $A'BC \perp$ 平面 $A'CD$, 求证: $CD \perp A'B$;

(3) 在 (2) 条件下, 若 $A'B = 2$, 求三棱锥 $A'-PMQ$ 的体积.

18. 设函数 $f(x) = x(a + e^x)$ ($a \in \mathbb{R}$), $g(x) = 1 + \ln x$.

- (1) 试求函数 $y = f'(x)$ 的极值;
- (2) 若函数 $y = f(x) + ag(x)$ ($a \in \mathbb{R}$) 在 $(0, +\infty)$ 上存在单调减区间, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 若 $f(x) \geq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

19. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 前 n 项和分别为 A_n, B_n, C_n , 且有 $c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$.

- (1) 若 $a_n = 2n - 1, b_n = 3^n$, 求 c_2 ;
- (2) 若 $A_{2025} = 2026, B_{2025} = \frac{1}{2026}$, 求 C_{2025} ;
- (3) 已知当 $x_n > 0, y_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$, 当且仅当

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ 时 “=” 成立. 若数列 $\{c_n\}$ 为正项数列, 且当 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ 时有 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 1$, 若

$2c_1 = c_2 = 6$, 试比较 $A_n B_n$ 与 n^2 的大小, 并说明理由.

昆山市 2026-2027 学年第一学期高三数学期中考试模拟试题解析

1. 若 $(1-i)+(2+3i)=a+bi$ ($a, b \in R, i$ 是虚数单位), 则 a, b 的值分别等于

- A. 3, -2 B. 3, 2 C. 3, -3 D. -1, 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的加法运算得出 $3+2i=a+bi$, 再根据相等复数的定义, 即可求出 a 和 b 的值.

【详解】解: 由题可知, $(1-i)+(2+3i)=a+bi$,

即 $3+2i=a+bi$, 所以 $a=3, b=2$,

即 a, b 的值分别等于 3, 2.

故选: B.

【点睛】本题考查复数的加法运算和相等复数的定义, 属于基础题.

2. 一元二次不等式 $2x^2-x-1<0$ 的解集是 ()

- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$
C. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ D. $(1, 2)$

【答案】B

【解析】

【分析】把不等式化为 $(x-1)(2x+1)<0$, 求出解集即可.

【详解】解: 不等式 $2x^2-x-1<0$ 可化为

$$(x-1)(2x+1)<0,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} < x < 1,$$

$$\therefore \text{不等式的解集为 } \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

故选: B.

【点睛】本题考查了一元二次不等式的解法与应用问题, 是基础题.

3. $f(x)$ 是定义在 $[-6, 6]$ 上的偶函数, 且 $f(3)>f(1)$, 则下列各式中一定成立的是 ()

- A. $f(0) < f(6)$ B. $f(3) > f(2)$
C. $f(-1) < f(3)$ D. $f(2) > f(6)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据条件，利用偶函数的性质，即可求解.

【详解】因为 $f(x)$ 是定义在 $[-6, 6]$ 上的偶函数，则 $f(-1) = f(1)$,

又 $f(3) > f(1)$ ，则 $f(-1) < f(3)$ ，所以 C 正确，

又由题设条件得不到 $f(x)$ 在 $[-6, 6]$ 的单调性，所以 A、B、D 不一定成立，

故选：C.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $\angle A$ 为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”的（ ）

- A. 充分必要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量的运算及充分必要条件的定义即可判断；

【详解】对于充分性，若 $\angle A$ 为锐角，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 \right] > 0$,

所以 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 > \overrightarrow{BC}^2$ ，即 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ，故充分性正确；

对于必要性，若 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ，两边平方得 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 > \overrightarrow{BC}^2$ ，即 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 > (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$ ，

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ ，又因为 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\angle A$ 为锐角，故必要性也成立.

所以“ $\angle A$ 为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{BC}|$ ”的充分必要条件.

故选：A

5. 函数 $y = -2^{-x}$ 与 $y = 2^x$ 的图象（ ）

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y=x$ 对称

【答案】C

【解析】

【分析】

令 $f(x) = 2^x$, 则 $-f(-x) = -2^{-x}$, 由 $y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 的图象关于原点对称即可得解.

【详解】解: 令 $f(x) = 2^x$, 则 $-f(-x) = -2^{-x}$

$\because y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 的图象关于原点对称,

$\therefore y = -2^{-x}$ 与 $y = 2^x$ 的图象关于原点对称.

故选: C

【点睛】本题考查指数函数的性质, 属于基础题.

6. 若直线 l 不平行于平面 α , 则下列结论正确的是 ()

- A. 平面 α 内的所有直线都与直线 l 异面 B. 平面 α 内不存在与直线 l 平行的直线
C. 平面 α 内的所有直线都与直线 l 相交 D. 直线 l 与平面 α 一定有公共点

【答案】D

【解析】

【分析】根据线面关系, 以及线面平行的判定定理, 判断正确选项即可.

【详解】直线 l 不平行于平面 α , 则可能为直线 $l \subset$ 平面 α , 或直线 l 与平面 α 相交,

所以 A, B, C 错误, D 正确;

故选: D.

7. 已知 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\tan \alpha + \tan \beta = 3$, 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】由条件可得 $\tan(\alpha + \beta) = 1$ 及 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \frac{\pi}{4}$, 展开并立可解得

$\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta$, 然后利用两角差的余弦公式求解.

【详解】 $\because \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\tan \alpha + \tan \beta = 3$,

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1,$$

$$\therefore \tan \alpha \tan \beta = -2, \text{ 即 } \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = -2, \text{ 即 } \sin \alpha \sin \beta = -2 \cos \alpha \cos \beta \text{ ①,}$$

$$\because \cos(\alpha + \beta) = \cos \frac{\pi}{4}, \therefore \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ②,$$

$$\text{联立①②解得 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{6}, \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

故选：A.

8. 过点 $P(x_0, y_0)$ 作曲线 $y = \ln x$ 的两条切线，记两切点分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，若两条切线斜

率之积为1，则 $\frac{y_0 + 1}{x_0}$ 的取值范围是 ()

A. $(0, 1)$

B. $(0, 1]$

C. $[1, +\infty)$

D. $(1, +\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用导数的几何意义表示出切线方程，联立切线方程，求出 x_0 、 y_0 ，再由两条切线的斜率之积为

1得到 $x_1 x_2 = 1$ ，即可用 x_1 的式子表示 x_0 、 y_0 ，代入化简可得 $\frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{1 + x_1^2}{2x_1}$ ，利用基本不等式求解即可

【详解】因为 $y = \ln x (x > 0)$ ，所以 $y' = \frac{1}{x}$ ，则 $y'|_{x=x_1} = \frac{1}{x_1}$ ， $y'|_{x=x_2} = \frac{1}{x_2}$ ，

依题意可知两条切线的方程分别为 $y = \frac{1}{x_1}(x - x_1) + \ln x_1$ ， $y = \frac{1}{x_2}(x - x_2) + \ln x_2$

$$\text{联立两条切线的方程} \begin{cases} y = \frac{1}{x_1}(x - x_1) + \ln x_1 \\ y = \frac{1}{x_2}(x - x_2) + \ln x_2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{x_1 x_2 (\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ 则 } y_0 = \frac{x_2 (\ln x_2 - 1) - x_1 (\ln x_1 - 1)}{x_2 - x_1},$$

因为两条切线的斜率之积为1，所以 $\frac{1}{x_1 x_2} = 1$ ，所以 $x_1 x_2 = 1$ ，则 $x_2 = \frac{1}{x_1}$

$$\text{由 } x_0 = \frac{x_1 x_2 (\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}, y_0 = \frac{x_2 (\ln x_2 - 1) - x_1 (\ln x_1 - 1)}{x_2 - x_1},$$

$$\text{可得 } y_0 + 1 = \frac{x_2(\ln x_2 - 1) - x_1(\ln x_1 - 1)}{x_2 - x_1} + 1 = \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{\frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1}}{\frac{x_1 x_2 (\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}} = \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\frac{1}{x_1} \ln \frac{1}{x_1} - x_1 \ln x_1}{\ln \frac{1}{x_1} - \ln x_1} = \frac{1 + x_1^2}{2x_1} \quad (x_1 > 0)$$

$$\text{所以 } \frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{1 + x_1^2}{2x_1} = \frac{\frac{1}{x_1} + x_1}{2} \geq \frac{2\sqrt{\frac{1}{x_1} \cdot x_1}}{2} = 1,$$

当且仅当 $\frac{1}{x_1} = x_1$, 即 $x_1 = 1$ 时取得最小值, 由因为 $x_1 \neq x_2 = \frac{1}{x_1}$, 所以 $x_1 \neq 1$,

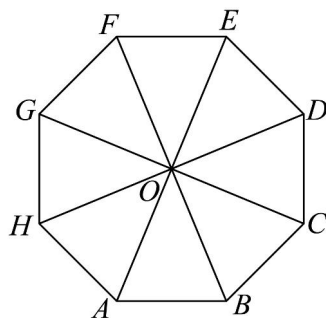
$$\text{则 } \frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{1 + x_1^2}{2x_1} > 1,$$

故选: D

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 《易经》是中华民族智慧的结晶, 易有太极, 太极生两仪, 两仪生四象, 四象生八卦. 如图所示是八卦模型图以及根据该图抽象得到的正八边形 $ABCDEFGH$, 其中 $|AB| = 1$, O 为正八边形的中心, 则

()



A. $\angle AOB = 45^\circ$

B. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \sqrt{2} \overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{HD} = \sqrt{2} \overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 1$

【答案】ACD

【解析】

【分析】先由八个内角相等和为 360° , 得到 $\angle AOB = 45^\circ$, 以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AO}$ 为基底分别表示 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$ 可计算出

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ 的结果，正八边形 $ABCDEFGH$ 判断 $\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{AC}$ 共线，再找到它们的模长关系，利用向量共线定理得到它们的倍数关系；将 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ ，则利用向量数量积运算得到 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 1$ 。

【详解】由题可知 $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ，选项 A 正确；

在正八边形 $ABCDEFGH$ 中， $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AO}$ ；

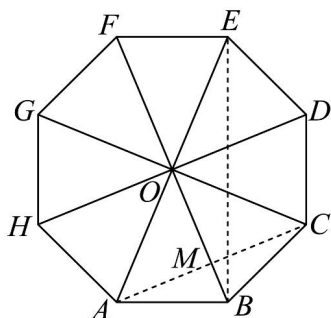
所以 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$ ，所以选项 B 错误；

由题可知在正八边形 $ABCDEFGH$ 中有 $HD \parallel AC$ ，且 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2} = \sqrt{2}|\overrightarrow{OA}|$ ，

$|\overrightarrow{HD}| = 2|\overrightarrow{OA}|$ ，所以 $|\overrightarrow{HD}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{AC}|$ ，所以 $\overrightarrow{HD} = \sqrt{2}\overrightarrow{AC}$ ，选项 C 正确；

连接 EB ，则 $EB \perp AB$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{AB}^2 = 1$ ，选项 D 正确。

故选：ACD



10. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，如星形线、心形线、卵形线等、已知卵形线

$C: x^2 + y - 2\sqrt{y} = 0$ ，则（ ）

- A. 曲线 C 关于 y 轴对称
- B. 曲线 C 上横、纵坐标均是整数的点恰有 4 个
- C. 曲线 C 上存在点 P ，使得 P 到点 $(0,1)$ 的距离小于 1
- D. 曲线 C 围成区域的面积大于 4

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据曲线方程分析曲线的性质，有曲线 C 为封闭曲线，过点 $(0,0), (\pm 1,1), (0,4)$ ，关于 y 轴对称，画出曲线大致图形，结合圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 、四边形 $OABD$ 在曲线 C 内部判断各项的正误。

【详解】由 $x^2 + y - 2\sqrt{y} = 0$ ，则 $x^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 1$ ，对于曲线上任意点 (x,y) ，其关于 y 轴对称点为

$(-x, y)$,

代入 $(-x)^2 + y - 2\sqrt{y} = x^2 + y - 2\sqrt{y} = 0$ 成立, 曲线关于直线 $x = 0$ 对称, A 对;

所以 $x^2 = 1 - (\sqrt{y} - 1)^2 \leq 1$, 所以 $-1 \leq x \leq 1$, 则 $0 \leq \sqrt{y} \leq 2$, 故 $0 \leq y \leq 4$,

$y = 0$ 时 $x = 0$; $y = 1$ 时 $x = \pm 1$; $y = 4$ 时 $x = 0$, 故曲线过点 $(0, 0), (\pm 1, 1), (0, 4)$, 曲线 C 上恰好有 4 个整点, B 对;

对于曲线上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 + (\sqrt{y_0} - 1)^2 = 1$,

当 $y_0 \geq 1$ 时, $y_0 \geq \sqrt{y_0} > 1$, 则 $y_0 - 1 \geq \sqrt{y_0} - 1 > 0$, $\therefore (y_0 - 1)^2 \geq (\sqrt{y_0} - 1)^2 > 0$,

$\therefore x_0^2 + (y_0 - 1)^2 \geq x_0^2 + (\sqrt{y_0} - 1)^2 = 1$, 此时曲线上点在圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 外,

当 $y_0 < 1$ 时, $0 < y_0 < \sqrt{y_0} < 1$, 则 $y_0 - 1 < \sqrt{y_0} - 1 < 0$, $\therefore (y_0 - 1)^2 > (\sqrt{y_0} - 1)^2$,

$\therefore x_0^2 + (y_0 - 1)^2 \geq x_0^2 + (\sqrt{y_0} - 1)^2 = 1$, 此时曲线上点在圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 外,

所以曲线上的所有点均在圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 外, 即曲线 C 上不存在点 P, 使得 P 到点 $(0, 1)$ 的距离小于 1, C 错;

如图, $A(1, 1)$, $B(0, 4)$, $D(-1, 1)$, 四边形 OABD 的面积 $S_{OABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$,

当 $1 > x > 0, y > 1$ 时, 直线 $AB: y = -3x + 4$, 曲线 $C: x^2 + y - 2\sqrt{y} = 0$, 即 $y = -x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} + 2$,

设 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x - 12 (x \in (0, 1))$,

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 17$, 判别式 $\Delta = 12^2 - 3 \times 4 \times 17 = -60 < 0$, $\therefore f'(x) > 0$ 恒成立,

即函数 $f(x)$ 单调递增, 且 $\because f(1) = 1 - 6 + 17 - 12 = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x - 12 < 0$,

$\therefore x(x^3 - 6x^2 + 17x - 12) < 0$, 即 $x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 12x < 0$,

$\therefore 4 - 4x^2 > x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$, 即 $(2\sqrt{1 - x^2})^2 > (x^2 - 3x + 2)^2$,

$\therefore 2\sqrt{1 - x^2} > x^2 - 3x + 2$, 即 $-x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} + 2 > -3x + 4$.

设点 (x_1, y_1) 在直线 AB 上, 点 (x_2, y_2) 在曲线 C 上, 则 $y_2 > y_1$, 即曲线上的点在直线上方,

由对称可知, 当 $-1 < x < 0, y > 1$ 时, 上面的结论依然成立.

当 $1 > x > 0, 1 > y > 0$ 时, 直线 $OA: y = x$, 由 $x^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 1$ 得 $\sqrt{y} - 1 = -\sqrt{1 - x^2}$, 曲线 C 方程等价于 $y = -x^2 + 2\sqrt{y}$, 又等价于 $y = -x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} + 2$,

设函数 $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4 (x \in (0, 1))$, 则 $g'(x) = 3x^2 + 4x + 1 > 0$,

即函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 1 + 2 + 1 - 4 = 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) < 0$, 即 $x^3 + 2x^2 + x - 4 < 0$,

$4 - 4x^2 > x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, 即 $(2\sqrt{1 - x^2})^2 > (-x^2 - x + 2)^2$,

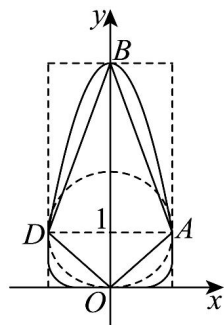
则 $2\sqrt{1 - x^2} > -x^2 - x + 2$, 即 $x > -x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} + 2$.

设点 (x_3, y_3) 在直线 OA 上, 点 (x_4, y_4) 在曲线 C 上, 则 $y_3 > y_4$, 即曲线上的点在直线下方,

由对称可知, 当 $-1 < x < 0, 1 > y > 0$ 时, 上面的结论依然成立.

故四边形 $OABD$ 在曲线 C 内部, 故曲线 C 所围成区域的面积大于 $S_{OABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$, D 对.

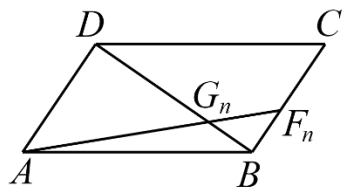
故选: ABD.



11. 如图, 已知平面四边形 $ABCD$ 中, $F_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 为边 BC 所在直线上的一列点, 连接 AF_n 交 BD 于

G_n , 点 $G_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足 $\overrightarrow{G_n F_n} + (a_{n+1} a_n) \overrightarrow{G_n C} = (a_{n+1} - a_n) \overrightarrow{G_n B}$, 其中数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2 的数列, 记

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, T_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, 则下列结论正确的是 ()



A. $a_{2025} = 2$

B. $T_{2025} = 1$

C. $S_{2025} = -\frac{1765}{3}$

D. 存在实数 k ，使得数列 $\left\{\frac{1}{a_n - k}\right\}$ 为等差数列

【答案】AC

【解析】

【分析】因为 $F_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 为边 BC 所在直线上的一列点，得 $-a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 1$ ，由 $a_1 = 2, a_2 = -3, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{3}, a_5 = 2 \cdots$ 得到数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列，由此可判断 ABCD 的正误.

【详解】由 $\overrightarrow{G_n F_n} + (a_{n+1}a_n)\overrightarrow{G_n C} = (a_{n+1} - a_n)\overrightarrow{G_n B}$ ，得 $\overrightarrow{G_n F_n} = -(a_{n+1}a_n)\overrightarrow{G_n C} + (a_{n+1} - a_n)\overrightarrow{G_n B}$

因为 $F_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 为边 BC 所在直线上的一列点，

设 $\overrightarrow{BF_n} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ，则 $\overrightarrow{G_n F_n} = \overrightarrow{G_n B} + \overrightarrow{BF_n} = \overrightarrow{G_n B} + \lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{G_n B} + \lambda(\overrightarrow{G_n C} - \overrightarrow{G_n B}) = (1 - \lambda)\overrightarrow{G_n B} + \lambda\overrightarrow{G_n C}$ ，

所以 $-a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 1$ ，令 $n = 1$ 得 $-a_2a_1 + a_2 - a_1 = 1, \because a_1 = 2, \therefore a_2 = -3$ ，

同理可得 $a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{3}, a_5 = 2, \cdots$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列.

对于 A， $2025 \div 4 = 506 \cdots 1$ ，所以 $a_{2025} = a_1 = 2$ ，故 A 正确；

对于 B， $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 1$ ， $\therefore T_{2025} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{2025} = 2$ ，故 B 错误；

对于 C， $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -\frac{7}{6}$ ， $S_{2025} = -\frac{7}{6} \times 506 + 2 = -\frac{1765}{3}$ ，故 C 正确；

对于 D，因为 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列且不为常数列，故任意实数 k ， $k \neq a_n$ ，数列 $\left\{\frac{1}{a_n - k}\right\}$ 为周期数列，

不可能为等差数列，故 D 错误.

故选：AC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差不为 0. 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为_____.

【答案】-24

【解析】

【分析】设出等差数列的公差，利用等比中项得到关于公差的方程，再利用等差数列的前 n 项和公式进

行求解.

【详解】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$),

由 $a_3^2 = a_2 a_6$, 得 $(1+2d)^2 = (1+d)(1+5d)$,

解得 $d = -2$, 所以 $S_6 = 6 \times 1 + \frac{6 \times 5}{2} \times (-2) = -24$.

故答案为: -24 .

13. 已知函数 $y = f(x)$ 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin x, & \sin x \leq \cos x \\ \sqrt{2}\cos x, & \sin x > \cos x \end{cases}$ 则函数

$y = f(x) - |\ln x|$ 的零点个数为_____.

【答案】4

【解析】

【分析】根据题意, 转化为 $y = f(x)$ 与 $y = |\ln x|$ 图象的交点个数, 作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = |\ln x|$ 的图象, 结合图象, 即可求解.

【详解】令 $f(x) - |\ln x| = 0$, 可得 $f(x) = |\ln x|$,

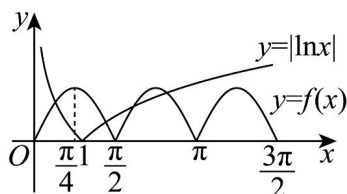
所以函数 $y = f(x) - |\ln x|$ 的零点个数等价于 $y = f(x)$ 与 $y = |\ln x|$ 图象的交点个数,

因为函数 $y = f(x)$ 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin x, & \sin x \leq \cos x \\ \sqrt{2}\cos x, & \sin x > \cos x \end{cases}$,

则 $f(x)_{\max} = 1$, 画出函数 $y = f(x)$ 与 $y = |\ln x|$ 的图象,

如图所示, 由图象可得, 函数 $y = f(x) - |\ln x|$ 的零点个数为 4.

故答案为: 4.



14. 已知实数 $\lambda < 0$, 若关于 x 的方程 $2\sin^2 x - (\lambda + 1)\sin x + 1 = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个不同的实数根, 则实数 λ 的取值集合是_____.

【答案】 $(-\infty, -4) \cup \{-2\sqrt{2} - 1\}$

【解析】

【分析】令 $t = \sin x$ ，设 $2t^2 - (\lambda + 1)t + 1 = 0$ 的两根分别为 t_1, t_2 ，结合正弦函数的图象与性质，转化为 $f(t) = 2t^2 - (\lambda + 1)t + 1, t \in [-1, 1]$ 上的零点问题，结合二次函数的图象与性质，分三种情况讨论，列出不等式组，即可求解。

【详解】由方程 $2\sin^2 x - (\lambda + 1)\sin x + 1 = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个不同的实数根，

令 $t = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ ，可得 $t \in [-1, 1]$ ，

设 $2t^2 - (\lambda + 1)t + 1 = 0$ 的两根分别为 t_1, t_2 ，则 $t_1 t_2 = \frac{1}{2}$ ，所以 t_1, t_2 同号，

结合正弦函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象与性质，

可得 $f(t) = 2t^2 - (\lambda + 1)t + 1, t \in [-1, 1]$ 上的零点有三种情况：

当 $t_1 = t_2$ 时，即 $(\lambda + 1)^2 - 8 = 0$ ，解得 $\lambda = -2\sqrt{2} - 1$ 或 $\lambda = 2\sqrt{2} - 1$ （舍去），

此时 $t_1 = t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，可得 $x = \frac{5\pi}{4}$ 或 $x = \frac{7\pi}{4}$ ，符合题意；

当 $0 < t_1 < 1, t_2 > 2$ 时，则满足 $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 1 > 0 \\ 2 - (\lambda + 1) + 1 < 0 \end{cases}$ ，解得 $\lambda > 2$ （舍去）；

当 $-1 < t_1 < 0, t_2 < -2$ 时，则满足 $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 1 > 0 \\ 2 + (\lambda + 1) + 1 < 0 \end{cases}$ ，解得 $\lambda < -4$ ，

综上所述，实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, -4) \cup \{-2\sqrt{2} - 1\}$ 。

故答案为： $(-\infty, -4) \cup \{-2\sqrt{2} - 1\}$ 。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，向量 $\vec{p}_n = (4, -2n - 1)$ ， $\vec{q}_n = (S_n, a_n)$ ，有 $\vec{p}_n \cdot \vec{q}_n = 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n ，求证： $T_n < \frac{1}{2}$ 。

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$

(2)

$$\text{由 } a_n = 2n-1, \text{ 得 } b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\text{因为 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以 } \frac{1}{2n+1} > 0, \quad 1 - \frac{1}{2n+1} < 1,$$

$$\text{所以 } T_n < \frac{1}{2}.$$

【解析】

【分析】(1) 由向量的数量积得 $4S_n - (2n+1)a_n = 1$, 根据 a_n 与 S_n 的关系得到递推关系, 再由累乘法求出通项公式;

(2) 利用裂项相消法求出数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 再证明.

【小问 1 详解】

$$\text{因为 } \vec{p}_n \cdot \vec{q}_n = 1, \text{ 即: } 4S_n + (-2n-1)a_n = 1 \Rightarrow 4S_n - (2n+1)a_n = 1. \text{ ①}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 4S_1 - 3a_1 = 1,$$

$$\text{又 } S_1 = a_1, \text{ 所以 } a_1 = 1.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 4S_{n-1} - (2n-1)a_{n-1} = 1, \text{ ②}$$

$$\text{由 ①-② 整理得: } 4a_n = (2n+1)a_n - (2n-1)a_{n-1}.$$

$$\text{整理得 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n-3} (n \geq 2),$$

$$\text{由累乘法得: } a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

$$\text{代入比值: } a_n = 1 \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-3} = 2n-1,$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 1 = 2 \times 1 - 1, \text{ 符合上式,}$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2n-1.$$

【小问 2 详解】

略

$$16. \text{ 已知 } a, b, c \text{ 分别是 } \triangle ABC \text{ 三个内角 } A, B, C \text{ 的对边, 且 } c \sin B + \sqrt{3} c \cos B = \sqrt{3} a + b.$$

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且 $AD = DB, CE = 2EA, c = 2$, 求 $\triangle ADE$ 面积的最大值和此时 $\triangle ADE$ 的周长.

【答案】(1) $\frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{1}{6}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据条件, 由正弦定理化边为角, 结合两角和的正弦公式及辅助角公式求解;

(2) 由条件利用三角形面积公式得 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{6}b\sin A$,

解法一: 由 $b = c\cos A = 2\cos A$, 得 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{6}\sin 2A \leq \frac{1}{6}$, 可求得 $\triangle ADE$ 面积的最大值, 由余弦定理得 DE , 可求 $\triangle ADE$ 的周长.

解法二: 由 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{2}$, 得 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{6} \cdot \frac{ab}{2}$, 利用基本不等式求出 $\triangle ADE$ 面积的最大值, 由余弦定理得 DE , 可求 $\triangle ADE$ 的周长.

【小问 1 详解】

$$\because \triangle ABC \text{ 中有 } c\sin B + \sqrt{3}c\cos B = \sqrt{3}a + b,$$

$$\text{由正弦定理得, } \sin C\sin B + \sqrt{3}\sin C\cos B = \sqrt{3}\sin A + \sin B,$$

$$\text{又将 } A = \pi - (B + C) \text{ 代入得, } \sin C\sin B + \sqrt{3}\sin C\cos B = \sqrt{3}\sin(B + C) + \sin B,$$

$$\text{展开得, } \sin C\sin B + \sqrt{3}\sin C\cos B = \sqrt{3}(\sin B \cos C + \cos B \sin C) + \sin B,$$

$$\text{整理得, } (\sin C - \sqrt{3}\cos C)\sin B = \sin B,$$

$$\text{由 } B \in (0, \pi), \sin B \neq 0,$$

$$\text{所以 } \sin C - \sqrt{3}\cos C = 1, \text{ 得 } \frac{1}{2}\sin C - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } C \in (0, \pi) \text{ 知 } -\frac{\pi}{3} < C - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } C - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{故 } C = \frac{\pi}{2}.$$

【小问 2 详解】

$$\because AD = DB, CE = 2EA, c = 2,$$

$$\therefore AD=1, AE=\frac{1}{3}b, S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD \cdot AE \sin A=\frac{1}{6}b \sin A,$$

解法一：由(1)知 $C=\frac{\pi}{2}$, $\therefore b=c \cos A=2 \cos A$,

$$\text{故 } S_{\triangle ADE}=\frac{1}{6}b \sin A=\frac{1}{6} \cdot 2 \sin A \cos A=\frac{1}{6} \sin 2A \leq \frac{1}{6},$$

当且仅当 $A=\frac{\pi}{4}$ 时取等号, 即 $\triangle ADE$ 面积的最大值为 $\frac{1}{6}$.

$$\text{此时 } AD=1, AE=\frac{\sqrt{2}}{3}, A=\frac{\pi}{4},$$

$$\text{由余弦定理得 } DE=\sqrt{AD^2+AE^2-2AD \cdot AE \cdot \cos A}=\sqrt{1+\frac{2}{9}-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 的周长为 } 1+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

解法二：由(1)知 $C=\frac{\pi}{2}$, $\therefore \sin A=\frac{a}{c}=\frac{a}{2}$,

$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{6}b \sin A=\frac{1}{6} \cdot b \cdot \frac{a}{2}=\frac{1}{6} \cdot \frac{ab}{2} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2}=\frac{1}{6},$$

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号.

$$\text{此时 } AD=1, AE=\frac{\sqrt{2}}{3}, A=\frac{\pi}{4},$$

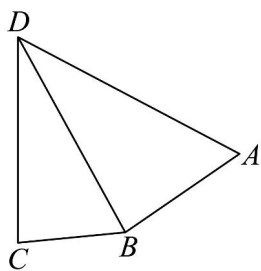
$$\text{由余弦定理得 } DE=\sqrt{AD^2+AE^2-2AD \cdot AE \cdot \cos A}=\sqrt{1+\frac{2}{9}-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 的周长为 } 1+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

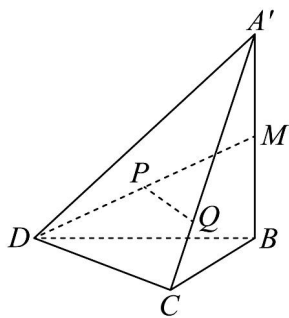
17. 如图①, 平面四边形 $ABCD$ 由两个三角形拼接而成, 其中 $AB \perp BD$, $BC \perp CD$,

$\angle A = \angle DBC = 60^\circ$, 现以 BD 为轴将 $\triangle ABD$ 向上折起至位置 A' , 连结 $A'C$ 得到如图②的三棱锥

$A'-BCD$, M 是 $A'B$ 的中点, P 是 DM 的中点, Q 在 $A'C$ 上, 且 $A'Q=3QC$.



图①



图②

- (1) 求证: $PQ \parallel$ 平面 BCD ;
- (2) 若平面 $A'BC \perp$ 平面 $A'CD$, 求证: $CD \perp A'B$;
- (3) 在 (2) 条件下, 若 $A'B = 2$, 求三棱锥 $A'-PMQ$ 的体积.

【答案】(1)

如图②取 BM 的中点 N , 连结 PN , QN

$\because P$ 是 DM 中点, N 是 BM 中点,

在 $\triangle DBM$ 中, 由中位线定理得 $PN \parallel BD$,

又 $PN \not\subset$ 平面 BCD , $BD \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore PN \parallel$ 平面 BCD .

又 $\because M$ 是 $A'B$ 中点, N 是 BM 中点,

$\therefore A'N = 3NB$, 又 $A'Q = 3QC$, 故在 $\triangle A'BC$ 中, 得 $QN \parallel BC$,

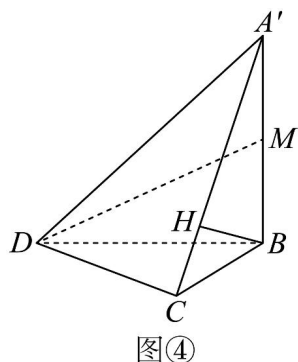
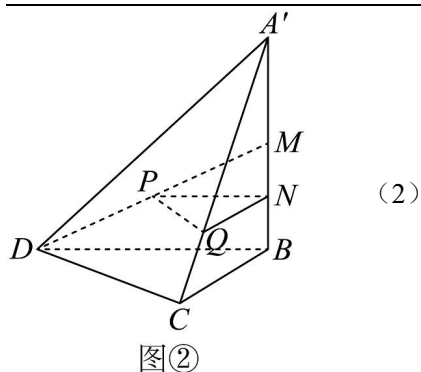
又 $QN \not\subset$ 平面 BCD , $BC \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore QN \parallel$ 平面 BCD

由 $PN \subset$ 平面 PQN , $QN \subset$ 平面 PQN , $PN \cap QN = N$,

$\therefore$ 平面 $PQN \parallel$ 平面 BCD , 又 $PQ \subset$ 平面 PQN ,

$\therefore PQ \parallel$ 平面 BCD .



如图④，在平面 $A'BC$ 中，过 B 作 $BH \perp A'C$ ， H 为垂足，

$\because$ 平面 $A'BC \perp$ 平面 $A'CD$ ， $BH \subset$ 平面 $A'BC$ ， $BH \perp A'C$ ，平面 $A'BC \cap$ 平面 $A'CD = A'C$ ，

$\therefore BH \perp$ 平面 $A'CD$ ，

又 $CD \subset$ 平面 $A'CD$ ， $\therefore BH \perp CD$ ，已知 $CD \perp BC$ ，

又 $BH \subset$ 平面 $A'BC$ ， $BC \subset$ 平面 $A'BC$ ， $BH \cap BC = B$ ，

$\therefore CD \perp$ 平面 $A'BC$ ，又由 $A'B \subset$ 平面 $A'BC$ ，

$\therefore CD \perp A'B$ 。

$$(3) \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

【解析】

【分析】(1) 根据中位线以及比例可证明线线平行，进而可得线面平行以及面面平行，即可根据面面平行的性质求解，

(2) 根据面面垂直的性质得线面垂直，即可根据线线垂直求证 $CD \perp$ 平面 $A'BC$ 得解，

(3) 利用等体积法求解长度，即可由比例以及体积公式求解。

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

由 (2) 知 $A'B \perp DC$, 又已知 $A'B \perp DB$, CD, DB 是面 BCD 内两相交直线,

$\therefore A'B \perp$ 面 BCD , 即 $A'B$ 为三棱锥的 $A'-BCD$ 的高, 设点 C 到面 $A'BD$ 的高为 h ,

则由 $V_{A'-BCD} = V_{C-A'BD}$, $A'B = 2$, $BD = 2\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{3}$, $CD = 3$ 得

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \cdot h, \text{ 解得 } h = \frac{3}{2},$$

又由 $A'Q = 3QC$ 知点 Q 到面 $A'BD$ 的高为 $\frac{3}{4}h = \frac{9}{8}$,

$$\text{又 } S_{\triangle A'PM} = \frac{1}{4} S_{\triangle A'BD} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore V_{A'-PQM} = V_{Q-A'PM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

18. 设函数 $f(x) = x(a + e^x)$ ($a \in \mathbb{R}$), $g(x) = 1 + \ln x$.

(1) 试求函数 $y = f'(x)$ 的极值;

(2) 若函数 $y = f(x) + ag(x)$ ($a \in \mathbb{R}$) 在 $(0, +\infty)$ 上存在单调减区间, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $f(x) \geq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) 极小值 $a - e^{-2}$, 无极大值

(2) $a < 0$

(3) $[-1, +\infty)$

【解析】

【分析】(1) 求得 $f'(x) = a + (x+1)e^x$, 令 $m(x) = f'(x)$, 求得 $m'(x) = (x+2)e^x$, 得出函数 $y = f'(x)$ 的单调性, 进而求得函数的极值;

(2) 由函数 $y = x(a + e^x) + a + a \ln x$, 求得 $y' = \frac{(x+1)}{x}(a + xe^x)$, 结合 $xe^x \in (0, +\infty)$, 分 $a \geq 0$ 和 $a < 0$, 两种情况讨论, 得出函数的单调区间, 即可求解;

(3) 根据题意, 转化为 $a \geq \frac{1 + \ln x}{x} - e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 设 $p(x) = \frac{1 + \ln x}{x} - e^x$, 求得 $p'(x) = -\frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$, 再令 $q(x) = x^2 e^x + \ln x$, 得到 $q'(x) > 0$, 得出 $q(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 根

据零点存在定理知, 存在唯一 $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0}$, 得出 $p(x)$ 得到单调性, 得到

$p(x) \leq p(x_0)$, 再由 $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0}$, 结合对数的运算性质, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 由函数 $f(x) = x(a + e^x)$, 可得 $f'(x) = a + (x+1)e^x$,

令 $m(x) = f'(x) = a + (x+1)e^x$, 可得 $m'(x) = (x+2)e^x$,

当故当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $m'(x) < 0$, 函数 $y = f'(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-2, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$, 函数 $y = f'(x)$ 单调递增,

所以函数 $y = f'(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值 $f'(-2) = a - e^{-2}$, 无极大值.

【小问 2 详解】

解: 因为函数 $f(x) = x(a + e^x) (a \in \mathbb{R})$, $g(x) = 1 + \ln x$,

所以函数 $y = f(x) + ag(x) = x(a + e^x) + a + a \ln x, x \in (0, +\infty)$,

可得 $y' = a + (x+1)e^x + \frac{a}{x} = \frac{(x+1)}{x}(a + xe^x)$,

由 $x > 0$, 可得 $\frac{(x+1)}{x} > 0$, 且 xe^x 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故有 $xe^x \in (0, +\infty)$,

①当 $a \geq 0$ 时, 可得 $y' = \frac{(x+1)}{x}(a + xe^x) > 0$, 函数 $y = f(x) + ag(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故不存在

在单调减区间;

②当 $a < 0$ 时, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$ 且满足 $a + x_0 e^{x_0} = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$, 有 $y' = \frac{(x+1)}{x}(a + xe^x) < 0$, 函数 $y = f(x) + ag(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递减,

当 $x \in (x_0, +\infty)$, 有 $y' = \frac{(x+1)}{x}(a + xe^x) > 0$, 函数 $y = f(x) + ag(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增,

所以当 $a < 0$ 时, 函数 $y = f(x) + ag(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在单调减区间.

【小问 3 详解】

解：由 $f(x) \geq g(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立，即 $x(a + e^x) \geq 1 + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

即 $a \geq \frac{1 + \ln x}{x} - e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

设 $p(x) = \frac{1 + \ln x}{x} - e^x$ ，可得 $p'(x) = -\frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$ ，

记 $q(x) = x^2 e^x + \ln x$ ，则 $q'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0$ ，

所以 $q(x) = x^2 e^x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

因为 $q\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}-2} - 1 < 0, q(1) = e > 0$ ，

根据零点存在定理知，存在唯一 $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ ，有 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$ ，即 $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0}$ ，

且在 $(0, x_0)$ 上有 $q(x) < 0$ ；在 $(x_0, +\infty)$ 上有 $q(x) > 0$ ；

由 $p'(x) = -\frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2} = -\frac{q(x)}{x^2}$ ，当 $x \in (0, x_0)$ 时， $p'(x) > 0$ ；当 $(x_0, +\infty)$ 时， $p'(x) < 0$ ，

所以 $p(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $p(x) \leq p(x_0) = \frac{1 + \ln x_0}{x_0} - e^{x_0}$ ，

对于 $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0}$ 两边取对数得 $x_0 + \ln x_0 = (-\ln x_0) + \ln(-\ln x_0)$ ，

因为函数 $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则有 $x_0 = -\ln x_0$ ，即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ ，

所以 $p(x) \leq p(x_0) = \frac{1 + \ln x_0}{x_0} - e^{x_0} = \frac{1 - x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} = -1$ ，即 $p(x)_{\max} = -1$ 。

所以 $a \geq -1$ ，即 a 的范围是 $[-1, +\infty)$ 。

19. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 前 n 项和分别为 A_n, B_n, C_n ，且有 $c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$ 。

(1) 若 $a_n = 2n - 1, b_n = 3^n$ ，求 c_2 ；

(2) 若 $A_{2025} = 2026, B_{2025} = \frac{1}{2026}$ ，求 C_{2025} ；

(3) 已知当 $x_n > 0, y_n > 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}$, 当且仅当

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ 时 “=” 成立. 若数列 $\{c_n\}$ 为正项数列, 且当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时有 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 1$, 若

$2c_1 = c_2 = 6$, 试比较 $A_n B_n$ 与 n^2 的大小, 并说明理由.

【答案】(1)

45 (2)

1 (3) $A_n B_n > n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 理由如下:

$$\text{由 } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 1 \Rightarrow \frac{c_{n+1}}{c_n^2} = \frac{c_n}{c_{n-1}^2} - \frac{1}{c_n}, c_1 = 3, c_2 = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{c_n} = \frac{c_n}{c_{n-1}^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2},$$

$$\therefore \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} = \frac{1}{c_1} + \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_2^2} + \frac{c_3}{c_2^2} - \frac{c_4}{c_3^2} + \cdots + \frac{c_n}{c_{n-1}^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2} < \frac{1}{3} + \frac{6}{9} = 1,$$

$$\because c_1 = A_1 B_1, n \geq 2 \text{ 时, } c_n = A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1},$$

$$\therefore 1 > \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} = \frac{1^2}{A_1 B_1} + \frac{1^2}{A_2 B_2 - A_1 B_1} + \frac{1^2}{A_3 B_3 - A_2 B_2} + \cdots + \frac{1^2}{A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1}}$$

$$\geq \frac{(1+1+\cdots+1)^2}{A_1 B_1 + A_2 B_2 - A_1 B_1 + A_3 B_3 - A_2 B_2 + \cdots + A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1}}$$

$$= \frac{n^2}{A_1 B_1 + A_2 B_2 - A_1 B_1 + A_3 B_3 - A_2 B_2 + \cdots + A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1}}$$

$$= \frac{n^2}{A_n B_n},$$

$$\therefore A_n B_n > n^2.$$

【解析】

【分析】(1) 由 a_n, b_n 得到 a_1, a_2, b_1, b_2 的值, 然后由 c_n 得到 c_2 ;

(2) 令 $n=1$ 表示出 c_1 , 当 $n \geq 2$ 时, 化简 c_n , 然后由裂项相消法求得 C_{2025} ;

(3) 由 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 1$ 得 $\frac{1}{c_n} = \frac{c_n}{c_{n-1}^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2}$, 然后由裂项相消法化简 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}$ 并求得最大值. 再由 $c_n = A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1}$, 得 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n} = \frac{1^2}{A_1 B_1} + \frac{1^2}{A_2 B_2 - A_1 B_1} + \cdots + \frac{1^2}{A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1}}$, 借助条件给到的结论得 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n} \geq \frac{n^2}{A_n B_n}$, 即可证明.

【小问 1 详解】

$$\because a_n = 2n - 1, b_n = 3^n,$$

$$\therefore a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = 3, b_2 = 9,$$

$$\text{由 } c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n \text{ 得 } c_2 = a_2 B_2 + b_2 A_2 - a_2 b_2$$

$$= a_2 (b_1 + b_2) + b_2 (a_1 + a_2) - a_2 b_2,$$

$$\therefore c_2 = a_2 b_1 + b_2 a_1 + a_2 b_2 = 9 + 9 + 27 = 45.$$

【小问 2 详解】

$$\text{由题意, 当 } n=1 \text{ 时, } c_1 = a_1 B_1 + b_1 A_1 - a_1 b_1 = a_1 b_1 = A_1 B_1;$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$$

$$= (A_n - A_{n-1}) B_n + (B_n - B_{n-1}) A_n - (A_n - A_{n-1})(B_n - B_{n-1})$$

$$= A_n B_n - A_{n-1} B_n + B_n A_n - B_{n-1} A_n - (A_n B_n - A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n + A_{n-1} B_{n-1})$$

$$= A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1},$$

$$\therefore C_{2025} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$$

$$= A_1 B_1 + (A_2 B_2 - A_1 B_1) + (A_3 B_3 - A_2 B_2) + \cdots + (A_{2025} B_{2025} - A_{2024} B_{2024})$$

$$= A_{2025} B_{2025} = 1.$$

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872