

昆山市 2026-2027 学年第一学期高一数学期中考试模拟试题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

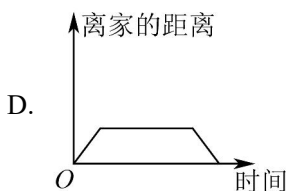
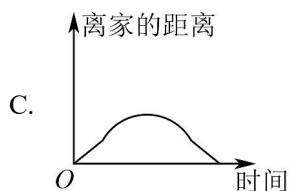
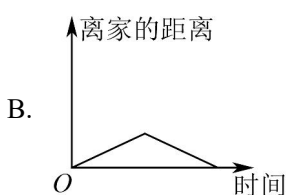
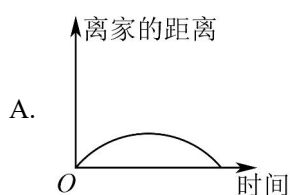
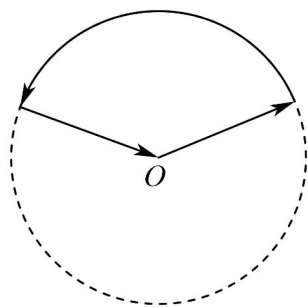
1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | 3 \leq x \leq 6\}$, $B = \{4, 5, 7, 8\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{4, 5\}$ B. $\{3, 7, 8\}$ C. $\{3, 6, 7, 8\}$ D. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

2. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x + |x| < 0$ B. $\exists x \notin \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x + |x| < 0$ D. $\forall x \notin \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$

3. 某同学晚饭后计划出门散步，用圆心 O 表示该同学家的位置（如图所示）. 若该同学从家里出发，沿箭头所指的扇形实线路径以一定的速率散步，则离家的距离与散步时间之间的函数图象可能是 ()



4. 函数 $y = \frac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$ 的定义域为 ()

- A. $[4, +\infty)$ B. $[4, 5) \cup (5, +\infty)$
C. $(-\infty, -5) \cup (-5, 4]$ D. $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, +\infty)$

5. 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = a + 4b$, 则 $a + b$ 的最小值为 ()
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 16
6. 设 k 为实数, 命题 p : 不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立, 则 “ $-3 < k < 0$ ” 是 “ p 为真命题” 的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x(x+4), & x \geq 0, \\ x(4-x), & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = |f(x)| + 1$, 若 $g(t-1) > 6$, 则实数 t 的取值范围为 ()
- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 2)$ C. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
8. 已知 m, n 均为正数, 且 $m \neq n$, 设 $a = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2}}$, $b = \frac{m+n}{2}$, $c = \sqrt{mn}$, 则下列关系中不可能成立的是 ()
- A. $|a-2| < |b-2| < |c-2|$ B. $|c-2| < |b-2| < |a-2|$
C. $|b-2| < |c-2| < |a-2|$ D. $|a-2| < |c-2| < |b-2|$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题为真命题的是 ()
- A. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$ B. 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$
C. 若 $a < b < 0$, 则 $b^2 < ab < a^2$ D. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
10. 下列说法正确的是 ()
- A. “ $A \subseteq B$ ” 是 “ $A \cup B = B$ ” 的充要条件
B. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$
C. 若函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则 $f(f(x))$ 也为 $\mathbf{R}$ 上的减函数
D. 若函数 $f(x+1)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

11. 已知函数 $f(x) = x + 1$, $g(x) = (x + 1)^2$, $x \in \mathbf{R}$. 用 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 表示 $f(x)$, $g(x)$

中的较大者, 记为 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 设 $h(x) = \begin{cases} M(x), & x \leq 0, \\ -x + 1, & x > 0, \end{cases}$ 则 ()

A. $h(-2) = 1$

B. 若函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上单调递减, 则 $a \geq 0$

C. 方程 $h(x) = \frac{1}{4}$ 的所有实数根之和为 $-\frac{3}{2}$

D. 若当 $x \in [m, n]$ 时, $h(x)$ 的取值范围为 $[-2, 1]$, 则 $n - m$ 的最大值为 5

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$, 则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 若对任意的 $x \in [a, a + 1]$, 都有 $x^2 + x - 2 \leq 0$, 则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若关于 x 的不等式 $x + \frac{a^2}{x} \geq 3a$ 的解集为 $(0, x_1] \cup [x_2, +\infty)$, 其中 $a > 1$, 则 $\frac{\sqrt{5}}{5}(x_2 - x_1) + \frac{a+1}{x_1 x_2 - 1}$ 的最

小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, 集合 $B = \{x | m - 1 \leq x \leq m + 3\}$.

(1) 当 $m = 2$ 时, 求 $A \cup B$, $A \cap (\complement_U B)$;

(2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (b, +\infty)$ ($b > 1$), 求不等式 $\frac{ax+1}{bx-1} > 2$ 的解集;

(2) 记函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式.

17. 某公司生产某种产品的固定成本为 20000 元, 每生产一件产品需增加投入 100 元. 已知总收入 R (单位:

元) 关于月产量 x (单位: 件) 满足函数: $R(x) = \begin{cases} 400x - \frac{1}{2}x^2, & 0 < x \leq 400 \\ 80000, & x > 400 \end{cases}$, 总收入=利润+总成本.

(1) 将利润 P (单位: 元) 表示为月产量 x 的函数;

(2) 在企业经营的财务分析中, 产品的单位利润是一个重要指标, 用来评估单个产品的盈利效率, 以便控制成本, 制定定价策略. 试计算当月产量为何值时, 产品的单位利润最大? 最大单位利润为多少元?

(单位利润=利润÷月产量)

18. 已知函数 $f(x) = \frac{x-m}{x^2+1}$ 是定义域上的奇函数.

- (1) 求实数 m 的值;
- (2) 判断 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的单调性并说明理由;
- (3) 若正数 a, b 满足 $f(a) = f(2b)$, 且 $a \neq 2b$, 求 $f(a+b)$ 的取值范围.

19. 对于函数 $f(x)$, 若在区间 I 内存在实数 x_0 , 满足 $f\left(\frac{1}{x_0}\right) = -f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的“局部倒负函数”.

- (1) 判断函数 $h(x) = x-1$ 是否为 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”;
- (2) 设函数 $m(x) = \begin{cases} x+1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{kx}{1-x}, & x > 1, \end{cases}$ 是否存在实数 k , 使得 $m(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”.

若存在, 请求出 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由;

- (3) 对任意的 $x, y \in [0, +\infty)$, 都有 $f(x+y) = f(y) + x(x+2y-a)$, 且 $f(1) = 1$. 若函数 $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”, 求实数 a 的取值范围.

昆山市 2026-2027 学年第一学期高一数学期中考试模拟试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | 3 \leq x \leq 6\}$, $B = \{4, 5, 7, 8\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{4, 5\}$ B. $\{3, 7, 8\}$ C. $\{3, 6, 7, 8\}$ D. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

【答案】A

【解析】

【分析】列举法表示集合 A , 再根据集合的交运算求解.

【详解】因为 $A = \{x \in \mathbf{Z} | 3 \leq x \leq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 7, 8\}$,

所以 $A \cap B = \{4, 5\}$.

故选: A

2. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x + |x| < 0$ B. $\exists x \notin \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x + |x| < 0$ D. $\forall x \notin \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$

【答案】C

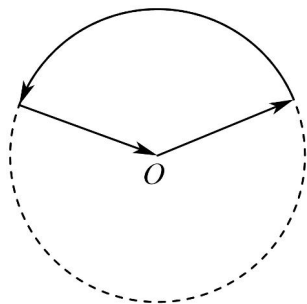
【解析】

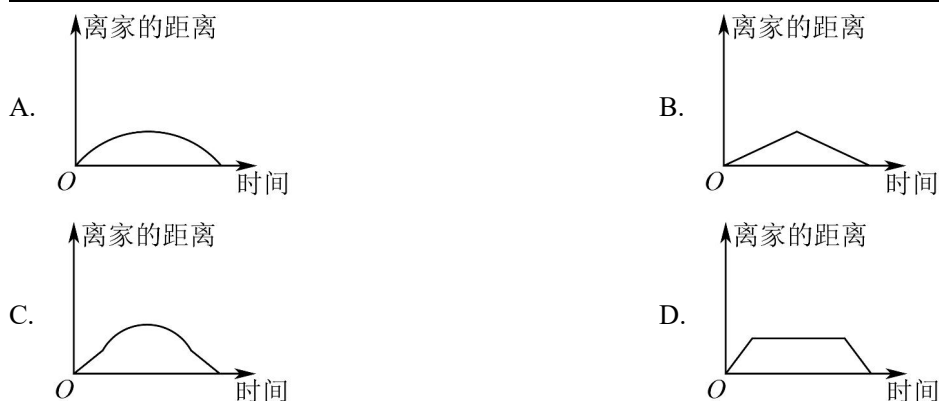
【分析】根据存在量词的命题的否定为全称量词命题即可得解;

【详解】命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$ ”的否定是, $\forall x \in \mathbf{R}, x + |x| < 0$,

故选: C

3. 某同学晚饭后计划出门散步, 用圆心 O 表示该同学家的位置 (如图所示). 若该同学从家里出发, 沿箭头所指的扇形实线路径以一定的速率散步, 则离家的距离与散步时间之间的函数图象可能是 ()





【答案】D

【解析】

【分析】根据给定的扇形，结合该同学的速度一定，离家距离的变化情况判断即可得结论.

【详解】由题意可知，该同学速度一定，从家出发时在一定时间内离家距离均匀增加，到达扇形的弧上时，离家距离不变，最后一段沿扇形的半径往家的方向走时，离家距离均匀减小，只有 D 选项符合题意，ABC 均不符合题意.

故选：D.

4. 函数 $y = \frac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$ 的定义域为 ()

A. $[4, +\infty)$

B. $[4, 5) \cup (5, +\infty)$

C. $(-\infty, -5) \cup (-5, 4]$

D. $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式被开方数非负及分式分母不为零可列不等式组，进而求解即可.

【详解】由 $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ |x|-5 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \geq 4$ 且 $x \neq 5$ ，所以函数 $y = \frac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$ 的定义域为 $[4, 5) \cup (5, +\infty)$.

故选：B.

5. 若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $ab = a + 4b$ ，则 $a + b$ 的最小值为 ()

A. 8

B. 9

C. 10

D. 16

【答案】B

【解析】

【分析】应用常数代换结合基本不等式计算求解.

【详解】因为 $ab = a + 4b$ ，所以 $1 = \frac{1}{b} + \frac{4}{a}$ ，

$$\text{则 } a+b = (a+b)\left(\frac{1}{b} + \frac{4}{a}\right) = \frac{a}{b} + 4 + 1 + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{4b}{a}} + 5 = 9,$$

当且仅当 $a=6, b=3$ 时， $a+b$ 取最小值 9.

故选：B.

6. 设 k 为实数，命题 P ：不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立，则 “ $-3 < k < 0$ ” 是 “ P 为真命题” 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立，按照 $k=0$ 和 $k \neq 0$ 讨论求解，

当 $k \neq 0$ 时， $\begin{cases} k < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ，计算求出 k 的范围，利用充分条件和必要条件的定义得到结论.

【详解】不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立，

当 $k=0$ 时，不等式转化为 $-\frac{3}{8} < 0$ ，满足题意；

当 $k \neq 0$ 时， $\therefore$ 不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立，

$$\therefore \begin{cases} k < 0 \\ \Delta = k^2 - 4 \times 2k \left(-\frac{3}{8}\right) < 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} k < 0 \\ \Delta = k^2 + 3k < 0 \end{cases}, \therefore -3 < k < 0,$$

综上可知，不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立，则 $-3 < k \leq 0$ ；

则 “ $-3 < k < 0$ ” 是 “ P 为真命题” 的充分不必要条件.

故选：A.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x(x+4), & x \geq 0, \\ x(4-x), & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = |f(x)| + 1$ ，若 $g(t-1) > 6$ ，则实数 t 的取值范围为

()

A. $(-\infty, 0)$

B. $(0, 2)$

C. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

D. $(2, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】要解决这个问题，我们需要先分析函数 $f(x)$ 的性质，再根据 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的关系，求解 $g(t-1) > 6$ 时实数 t 的取值范围。

【详解】当 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ，则 $f(-x) = -x(4 - (-x)) = -x(x+4) = -f(x)$ ，

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，则 $f(-x) = -x(-x+4) = x(x-4) = -x(4-x) = -f(x)$ ，

当 $x = 0$ 时， $f(0) = 0 \times (0+4) = 0$ ，因此， $f(x)$ 是奇函数，

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x(x+4) = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$ ，是一个开口向上，

对称轴为 $x = -2$ 的二次函数，在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 也单调递增，因此 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

已知 $g(x) = |f(x)| + 1$ ，则 $g(t-1) > 6$ 可转化为 $|f(t-1)| + 1 > 6$ ，即 $|f(t-1)| > 5$ ，

因此 $f(t-1) > 5$ 或 $f(t-1) < -5$ ，又 $f(1) = 5$ ， $f(-1) = -5$

即 $f(t-1) > 5 = f(1)$ 或 $f(t-1) < -5 = f(-1)$ ，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $t-1 > 1$ 或 $t-1 < -1$ ，解得 $t > 2$ 或 $t < 0$ ，

综上，实数 t 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ，

故选：C

8. 已知 m, n 均为正数，且 $m \neq n$ ，设 $a = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2}}$ ， $b = \frac{m+n}{2}$ ， $c = \sqrt{mn}$ ，则下列关系中不可能成立

的是 ()

A. $|a-2| < |b-2| < |c-2|$

B. $|c-2| < |b-2| < |a-2|$

C. $|b-2| < |c-2| < |a-2|$

D. $|a-2| < |c-2| < |b-2|$

【答案】D

【解析】

【分析】利用基本不等式可得 $a > b > c$ ，再按 $a > b > c \geq 2$ ， $2 \geq a > b > c > 0$ ， $c < 2 < a$ 分类讨论可判断 ABD，对于 C：利用完全平方方式可得到 $a^2 = 2b^2 - c^2$ ，再令 $c = \frac{1}{2}$ ， $b = 3$ ，可计算出 a ，进而可判断 C。

【详解】已知 m, n 均为正数，且 $m \neq n$ ，

因为 $a^2 - b^2 = \frac{m^2 + n^2}{2} - \frac{(m+n)^2}{4} = \frac{(m-n)^2}{4} > 0$, 即 $a > b$,

由基本不等式可知: $\frac{m+n}{2} > \sqrt{mn}$, 所以 $a > b > c > 0$,

由于 $a > b > c$, 考虑 a, b, c 相对于 2 的位置:

当 $2 \geq a > b > c > 0$ 时, 选项 A 可能成立, 选项 D 不成立;

当 $a > b > c \geq 2$ 时, 选项 B 可能成立, 选项 D 不成立;

当 $c < 2 < a$ 时, 则 $|a-2| = a-2$, $|c-2| = 2-c$,

若选项 D 成立, 则 $|a-2| < |c-2|$ 成立, 即 $a-2 < 2-c$, 此时 $a+c < 4$,

同时 $|c-2| < |b-2|$ 成立, 即 $2-c < |b-2|$,

当 $b \leq 2$, 则 $|b-2| = 2-b$, 要求 $2-c < 2-b$, 即 $b < c$, 但 $b > c$, 矛盾;

当 $b > 2$, 则 $|b-2| = b-2$, 要求 $2-c < b-2$, 即 $b+c > 4$,

由 $a > b > 2$ 得 $a+c > b+c > 4$, 与 $a+c < 4$ 矛盾;

故选项 D 在所有情况下均不可能成立.

对于 C, 由 $a = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2}}$, $b = \frac{m+n}{2}$, $c = \sqrt{mn}$ 得:

$$b^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4} = \frac{2a^2 + 2c^2}{4},$$

所以 $a^2 = 2b^2 - c^2$, 令 $c = \frac{1}{2}, b = 3$ 得 $a^2 = 2 \times 9 - \frac{1}{4} > 16$, 故此时 $a > 4$

$$|a-2| > 4-2=2, |b-2| = 3-2=1, |c-2| = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

故: $|b-2| < |c-2| < |a-2|$, 故选项 C 可能成立.

故选: D

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$

B. 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$

C. 若 $a < b < 0$, 则 $b^2 < ab < a^2$

D. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

【答案】BC

【解析】

【分析】利用不等式的性质即可判断 BC，举反例即可判断 AD

【详解】对于 A, 若 $a > b > 0$, $c = 0$, 则 $ac^2 = bc^2$, 故 A 错误;

对于 B, 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) > 0$, 即 $a^2 > b^2$, 故 B 正确;

对于 C, 若 $a < b < 0$, 两边同乘以 a 得 $ab < a^2$, 两边同乘以 b 得 $b^2 < ab$,

则 $b^2 < ab < a^2$, 故 C 正确;

对于 D, $a = -2, b = -1$ 满足 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{b} = -1$ 得不到 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 D 错误

故选: BC

10. 下列说法正确的是 ()

A. “ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cup B = B$ ”的充要条件

B. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$

C. 若函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则 $f(f(x))$ 也为 $\mathbf{R}$ 上的减函数

D. 若函数 $f(x+1)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用集合的关系与交集的意义可判断 A; 利用交集的意义可判断 B; 利用复合函数的单调性可判断 C; 利用函数图像的变换可判断 D.

【详解】对于 A, 由 $A \subseteq B$, 可得 $A \cup B = B$, 所以“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cup B = B$ ”的充分条件,

由 $A \cup B = B$, 可得 $A \subseteq B$, 所以“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cup B = B$ ”的必要条件,

所以“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cup B = B$ ”的充要条件, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 所以集合 A, B 必有公共元素, 故 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$, 故 B 正确;

对于 C, 因为函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则由复合函数的单调性可知 $f(f(x))$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故 C 错误;

对于 D, 若函数 $f(x+1)$ 为偶函数, 则函数图像关于直线 $x=0$ 对称,

又函数 $f(x+1)$ 是函数 $f(x)$ 图像向左移动一个单位而得到的,

故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 D 正确.

故选: ABD.

11. 已知函数 $f(x)=x+1$, $g(x)=(x+1)^2$, $x \in \mathbf{R}$. 用 $M(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 表示 $f(x)$, $g(x)$

中的较大者, 记为 $M(x)=\max\{f(x), g(x)\}$, 设 $h(x)=\begin{cases} M(x), & x \leq 0, \\ -x+1, & x > 0, \end{cases}$ 则 ()

A. $h(-2)=1$

B. 若函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上单调递减, 则 $a \geq 0$

C. 方程 $h(x)=\frac{1}{4}$ 的所有实数根之和为 $-\frac{3}{2}$

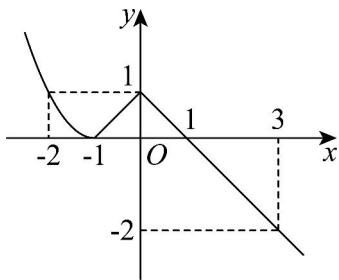
D. 若当 $x \in [m, n]$ 时, $h(x)$ 的取值范围为 $[-2, 1]$, 则 $n-m$ 的最大值为 5

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意作出 $h(x)$ 的函数图像, 根据图像即可判断 AB, 分别求出方程 $h(x)=\frac{1}{4}$ 的实数根, 即可判断 C, 根据图像先求 $h(x)=-2$ 的根, 再求 $h(x)=1$ 的根, 即可判断 D.

【详解】根据题意作出 $h(x)$ 的函数图像:



由图可知, $h(-2)=g(-2)=(-2+1)^2=1$, 故 A 正确;

由函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上单调递减, 所以 $a \leq -1$, 故 B 错误;

若方程 $h(x)=\frac{1}{4}$, 所以当 $x \leq -1$ 时, $h(x)=g(x)=(x+1)^2=\frac{1}{4}$, 解得 $x_1=-\frac{3}{2}$,

当 $-1 < x \leq 0$ 时, $h(x)=f(x)=x+1=\frac{1}{4} \Rightarrow x_2=-\frac{3}{4}$,

当 $x > 0$ 时, $h(x)=-x+1=\frac{1}{4} \Rightarrow x_3=\frac{3}{4}$,

所以 $x_1+x_2+x_3=-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$, 故 C 正确;

由 $h(x) = -2$, 所以 $h(x) = -x + 1 = -2 \Rightarrow x = 3$,

由 $h(x) = 1$, 所以 $h(x) = (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x = -2$,

所以当 $x \in [m, n]$ 时, $h(x)$ 的取值范围为 $[-2, 1]$, 所以 $m = -2, n = 3$,

所以 $n - m = 3 + 2 = 5$, 则 $n - m$ 的最大值为 5, 故 D 正确;

故选: ACD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$, 则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】

【分析】待定系数法求出 $y = f(x)$ 的解析式即可.

【详解】设幂函数 $f(x) = x^k$, 其中 k 为常数,

函数图象经过点 $(2, \sqrt{2})$,

因此, 有: $2^k = \sqrt{2}$,

解得: $k = \frac{1}{2}$.

所以, 幂函数为 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

故 $f(4) = 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$.

故答案为: 2

13. 若对任意的 $x \in [a, a+1]$, 都有 $x^2 + x - 2 \leq 0$, 则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $[-2, 0]$;

【解析】

【分析】由于 $x^2 + x - 2 \leq 0$ 的解集为 $[-2, 1]$, 可得 $[a, a+1] \subset [-2, 1]$, 列出不等式即可求解.

【详解】由于 $x^2 + x - 2 \leq 0$ 的解集为 $[-2, 1]$, 则 $[a, a+1] \subset [-2, 1]$, 所以 $\begin{cases} a \geq -2 \\ a+1 \leq 1 \end{cases}$, 解得:

$-2 \leq a \leq 0$,

所以实数 a 的取值范围为 $[-2, 0]$;

故答案为: $[-2, 0]$

14. 若关于 x 的不等式 $x + \frac{a^2}{x} \geq 3a$ 的解集为 $(0, x_1] \cup [x_2, +\infty)$, 其中 $a > 1$, 则 $\frac{\sqrt{5}}{5}(x_2 - x_1) + \frac{a+1}{x_1x_2-1}$ 的最小值是_____.

【答案】3.

【解析】

【分析】由题可得 x_1, x_2 为方程 $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ 的根, 结合根与系数关系可得 $x_2 - x_1 = \sqrt{5}a$, $x_1x_2 = a^2$, 代入化简, 结合基本不等式即可求解.

【详解】不等式 $x + \frac{a^2}{x} \geq 3a$ 可化为: $\frac{x^2 - 3ax + a^2}{x} \geq 0$, 等价于 $\begin{cases} x(x^2 - 3ax + a^2) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$,

因为关于 x 的不等式 $x + \frac{a^2}{x} \geq 3a$ 的解集为 $(0, x_1] \cup [x_2, +\infty)$,

则 x_1, x_2 为方程 $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ 的根, 所以 $\begin{cases} \Delta = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 > 0 \\ x_1 + x_2 = 3a > 0 \\ x_1x_2 = a^2 \end{cases}$,

因为 $x_1 < x_2$, $a > 1$

则 $x_2 - x_1 = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5}a$,

所以 $\frac{\sqrt{5}}{5}(x_2 - x_1) + \frac{a+1}{x_1x_2-1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{5}a + \frac{a+1}{a^2-1} = a + \frac{1}{a-1}$,

因为 $a-1 > 0$, 则 $a + \frac{1}{a-1} = a-1 + \frac{1}{a-1} + 1 \geq 2\sqrt{(a-1)\left(\frac{1}{a-1}\right)} + 1 = 3$, 当且仅当 $a-1 = \frac{1}{a-1}$ 时, 即

$a=2$ 时去等号,

所以 $\frac{\sqrt{5}}{5}(x_2 - x_1) + \frac{a+1}{x_1x_2-1}$ 的最小值是 3

故答案为: 3

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, 集合 $B = \{x | m-1 \leq x \leq m+3\}$.

(1) 当 $m=2$ 时, 求 $A \cup B$, $A \cap (\complement_U B)$;

(2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $A \cup B = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{x | -2 \leq x < 1\}$.

(2) $(-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$

【解析】

【分析】(1) 利用集合的运算法则计算可得答案;

(2) 由 $A \cap B = \emptyset$ 可得: 集合 B 在 -2 的左侧或在 3 的右侧, 列不等式即可.

【小问 1 详解】

当 $m = 2$ 时, $B = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, 则 $\complement_U B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 5\}$,

所以 $A \cup B = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{x | -2 \leq x < 1\}$.

【小问 2 详解】

因为 $m-1 < m+3$, 所以 $B \neq \emptyset$,

由于 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $m+3 < -2$ 或 $m-1 > 3$,

解得 $m < -5$ 或 $m > 4$.

所以 m 的取值范围是 $(-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$.

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (b, +\infty)$ ($b > 1$), 求不等式 $\frac{ax+1}{bx-1} > 2$ 的解集;

(2) 记函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式.

【答案】(1) $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$

(2) $g(a) = \begin{cases} 3, & a \leq 0 \\ 3 - a^2, & 0 < a < 1 \\ 4 - 2a, & a \geq 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】(1) 由题可得 $1, b$ 是方程 $x^2 - 2ax + 3 = 0$ 的两根, 进而求出 b , 再由分式不等式的解法求解即可;

(2) 讨论 a 的范围, 结合二次函数的单调性求解即可.

【小问 1 详解】

因为不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (b, +\infty)$,

所以 1, b 是方程 $x^2 - 2ax + 3 = 0$ 的两根,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1+b=2a \\ 1 \times b=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}.$$

不等式 $\frac{ax+1}{bx-1} > 2$ 即为 $\frac{2x+1}{3x-1} > 2$, 不等式可化为 $\frac{4x-3}{3x-1} < 0$, 等价于 $(4x-3)(3x-1) < 0$

解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$, 所以不等式 $\frac{ax+1}{bx-1} > 2$ 的解集为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

【小问 2 详解】

因为 $f(x) = x^2 - 2ax + 3 = (x-a)^2 - a^2 + 3$,

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 3$;

当 $0 < a < 1$ 时, 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = 3 - a^2$;

当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 4 - 2a$,

$$\text{所以 } g(a) = \begin{cases} 3, a \leq 0 \\ 3 - a^2, 0 < a < 1 \\ 4 - 2a, a \geq 1 \end{cases}.$$

17. 某公司生产某种产品的固定成本为 20000 元, 每生产一件产品需增加投入 100 元. 已知总收入 R (单位:

$$\text{元}) \text{ 关于月产量 } x \text{ (单位: 件) 满足函数: } R(x) = \begin{cases} 400x - \frac{1}{2}x^2, 0 < x \leq 400 \\ 80000, x > 400 \end{cases}, \text{ 总收入} = \text{利润} + \text{总成本}.$$

(1) 将利润 P (单位: 元) 表示为月产量 x 的函数;

(2) 在企业经营的财务分析中, 产品的单位利润是一个重要指标, 用来评估单个产品的盈利效率, 以便控制成本, 制定定价策略. 试计算当月产量为何值时, 产品的单位利润最大? 最大单位利润为多少元?

(单位利润 = 利润 ÷ 月产量)

$$\text{【答案】(1) } P = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 300x - 20000, 0 < x \leq 400, \\ 60000 - 100x, x > 400. \end{cases}$$

(2) 当月产量为 200 件时, 产品的单位利润最大, 最大单位利润为 100 元.

【解析】

【分析】(1) 分为 $0 < x \leq 400$ 、 $x > 400$ 两种情况, 然后根据“利润 = 总收入 - 总成本”即可得出结果;

(2) 首先可根据 $y = \frac{P}{x}$ 得出 $g(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 300 - \frac{20000}{x}, & 0 < x \leq 400 \\ -100 + \frac{60000}{x}, & x > 400 \end{cases}$, 然后分为 $0 < x \leq 400$ 、

$x > 400$ 两种情况进行讨论, 依次求出最值, 即可得出结果.

【小问 1 详解】

依题设知, 总成本为 $20000 + 100x$ 元,

则 $P = R(x) - 100x - 20000 = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 300x - 20000, & 0 < x \leq 400 \\ 60000 - 100x, & x > 400 \end{cases}$;

【小问 2 详解】

产品的单位利润 $y = \frac{P}{x} = \begin{cases} 300 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{20000}{x}\right), & 0 < x \leq 400, \\ \frac{60000}{x} - 100, & x > 400. \end{cases}$

当 $0 < x \leq 400$ 时, $y = 300 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{20000}{x}\right) \leq 300 - 2\sqrt{\frac{1}{2}x \cdot \frac{20000}{x}} = 100$,

当且仅当 $\frac{1}{2}x = \frac{20000}{x}$ 即 $x = 200$ 时, $y_{\max} = 100$;

当 $x > 400$ 时, $y = \frac{60000}{x} - 100$ 是减函数, 所以 $y < \frac{60000}{400} - 100 = 50$.

所以当月产量为 200 件时, 产品的单位利润最大, 最大单位利润为 100 元.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{x-m}{x^2+1}$ 是定义域上的奇函数.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的单调性并说明理由;

(3) 若正数 a, b 满足 $f(a) = f(2b)$, 且 $a \neq 2b$, 求 $f(a+b)$ 的取值范围.

【答案】(1) $m = 0$

(2)

由 (1) 知 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 理由如下:

任取 $1 \leq x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 1$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + (x_1 - x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} > 0,$$

所以 $f(x_1) > f(x_2)$ ，因此函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减；

$$(3) \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$$

【解析】

【分析】(1) 借助奇函数性质计算即可得；

(2) 借助函数单调性定义，任取 $1 \leq x_1 < x_2$ ，计算 $f(x_1) - f(x_2)$ 正负即可得；

(3) 借助基本不等式计算可得 $a+b$ 范围，再结合函数单调性计算即可得。

【小问 1 详解】

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且是奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

即 $\frac{-x-m}{(-x)^2+1} = -\frac{x-m}{x^2+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $-x-m = -x+m$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

所以 $m=0$ ；

【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

因为 $f(a) = f(2b)$ ，所以 $\frac{a}{a^2+1} = \frac{2b}{(2b)^2+1}$ ，整理得 $(2ab-1)(a-2b)=0$ ，

因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a \neq 2b$ ，所以 $2ab=1$ ，即 $ab = \frac{1}{2}$ ，且 $a \neq 1$ ， $b \neq \frac{1}{2}$ ，

所以 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = \sqrt{2}$ ，当且仅当 $a=b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取等号，

由 $a \neq 1$ ， $b \neq \frac{1}{2}$ ，不能由 $a=1$ ， $b = \frac{1}{2}$ 得到 $a+b = \frac{3}{2}$ ，

但 $a = \frac{1}{2}$ ， $b=1$ 时，也有 $a+b = \frac{3}{2}$ ，所以 $a+b \in [\sqrt{2}, +\infty)$ ，

由 (2) 知 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(a+b) \leq f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2+1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{x^2+1} > 0$,

又 $a+b > 0$, 所以 $f(a+b) > 0$,

所以 $f(a+b)$ 的取值范围为 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$.

19. 对于函数 $f(x)$, 若在区间 I 内存在实数 x_0 , 满足 $f\left(\frac{1}{x_0}\right) = -f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的“局部倒负函数”.

(1) 判断函数 $h(x) = x-1$ 是否为 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”;

(2) 设函数 $m(x) = \begin{cases} x+1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{kx}{1-x}, & x > 1, \end{cases}$ 是否存在实数 k , 使得 $m(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”.

若存在, 请求出 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由;

(3) 对任意的 $x, y \in [0, +\infty)$, 都有 $f(x+y) = f(y) + x(x+2y-a)$, 且 $f(1) = 1$. 若函数 $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 函数 $h(x) = x-1$ 是 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”

(2) 存在, $k \in (0, 1)$

(3) $\left[4+2\sqrt{2}, +\infty\right)$

【解析】

【分析】 (1) 利用 $h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ 求解即可; 另法: 计算 $h\left(\frac{1}{1}\right) = -h(1) = 0$, 可得结论;

(2) 由题意可得存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $m\left(\frac{1}{x_0}\right) = -m(x_0)$, 分 $0 < x_0 < 1$, $x_0 > 1$ 两种情况求解即可得 k 的取值范围;

(3) 利用赋值法求得 $f(x) = x^2 - ax + a$, 进而可得 $\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) - a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + 2a = 0$ 在区间 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 上有解, 利用换元即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1 + \frac{1}{x} - 1 = 0 (x > 0)$, 解得 $x = 1$,

所以区间 $(0, +\infty)$ 内存在实数 $x_0 = 1$, 满足 $h\left(\frac{1}{x_0}\right) = -h(x_0)$,

所以函数 $h(x) = x - 1$ 是 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”.

另法: 因为 $1 \in (0, +\infty)$, 且 $h\left(\frac{1}{1}\right) = -h(1) = 0$, 满足“局部倒负函数”的定义,

所以函数 $h(x) = x - 1$ 是 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”.

【小问 2 详解】

假设存在实数 k , 使得函数 $m(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”.

由“局部倒负函数”的定义知, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $m\left(\frac{1}{x_0}\right) = -m(x_0)$.

因为 $m(1) = 2$, 所以 $x_0 \neq 1$.

当 $0 < x_0 < 1$ 时, $\frac{1}{x_0} > 1$, 则 $m(x_0) + m\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 + 1 + \frac{k \cdot \frac{1}{x_0}}{1 - \frac{1}{x_0}} = 0$, 即 $x_0^2 + k - 1 = 0$ ①,

当 $x_0 > 1$ 时, $0 < \frac{1}{x_0} < 1$, 则 $m(x_0) + m\left(\frac{1}{x_0}\right) = \frac{kx_0}{1 - x_0} + \frac{1}{x_0} + 1 = 0$, 即 $(k - 1)x_0^2 + 1 = 0$ ②.

所以①或②有解, 即 $k = 1 - x_0^2$ 在 $(0, 1)$ 上有解或 $k = 1 - \frac{1}{x_0^2}$ 在 $(1, +\infty)$ 上有解,

当 $x_0 \in (0, 1)$ 时, $0 < 1 - x_0^2 < 1$; 当 $x_0 \in (1, +\infty)$ 时, $0 < 1 - \frac{1}{x_0^2} < 1$, 所以 $0 < k < 1$.

所以存在实数 $k \in (0, 1)$, 使得 $m(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”.

【小问 3 详解】

因为 $\forall x, y \in [0, +\infty)$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x + y) = f(y) + x(x + 2y - a)$.

令 $x = 1, y = 0$, 则 $f(1) = f(0) + 1 - a$, 又 $f(1) = 1$, 所以 $f(0) = a$.

令 $y = 0$, 则 $f(x) = f(0) + x(x - a) = x^2 - ax + a$.

此时 $f(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 - ax - ay + a$,

而 $f(y) + x(x+2y-a) = y^2 - ay + a + x^2 + 2xy - ax = f(x+y)$, 满足条件,

所以 $f(x) = x^2 - ax + a$.

因为 $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的“局部倒负函数”,

所以存在实数 $x_0 \in (0, +\infty)$, 满足 $f\left(\frac{1}{x_0}\right) = -f(x_0)$, 又 $f(1) = 1$, 所以 $x_0 \neq 1$,

所以 $f(x_0) + f\left(\frac{1}{x_0}\right) = (x_0^2 - ax_0 + a) + \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{a}{x_0} + a\right) = 0$.

则 $\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) - a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + 2a = 0$ 在区间 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 上有解.

令 $x_0 + \frac{1}{x_0} = \lambda$, 由于函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\lambda \in (2, +\infty)$, 则上式可化为 $\lambda^2 - a\lambda + 2a - 2 = 0$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上有解,

因为 $a = \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda - 2} = \lambda - 2 + \frac{2}{\lambda - 2} + 4 \geq 2\sqrt{2} + 4$, 当且仅当 $\lambda = 2 + \sqrt{2}$ 时取等号.

所以 $\lambda - 2 + \frac{2}{\lambda - 2} + 4 \in [4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

所以实数 a 的取值范围为 $[4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872