

昆山市 2026-2027 学年第一学期八年级数学期中考试模拟试题

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.

1. 若三角形的两边长分别为 3 和 6，则这个三角形的第三边长可以是（ ）

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

2. 若分式 $\frac{2}{x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \neq 0$ B. $x = 0$ C. $x \neq 3$ D. $x = 3$

3. 下列从左到右的变形中，属于因式分解的是（ ）

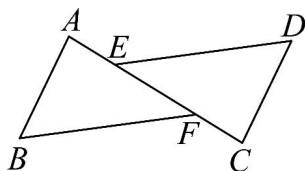
- A. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ B. $x^2 - 2x + 1 = x(x-2) + 1$

- C. $x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ D. $x(x-3) = x^2 - 3x$

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为（ ）

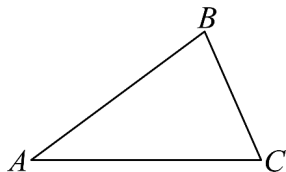
- A. 50° B. 60° C. 65° D. 80°

5. 如图，点 E, F 在 AC 上，且 $AE = CF$ ， $\angle AFB = \angle CED$ ，添加下列一个条件后，仍不能判定 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ 的是（ ）



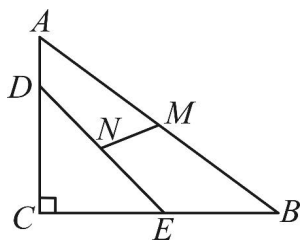
- A. $AB = CD$ B. $\angle B = \angle D$ C. $BF = DE$ D. $AB \parallel CD$

6. 如图，三个居民小区分别坐落在地图中的 $\triangle ABC$ 三个顶点 A, B, C 处，现要建一个牛奶供应站 P ，且该供奶站 P 到三小区 A, B, C 的距离相等，则该供奶站 P 的位置应选在（ ）



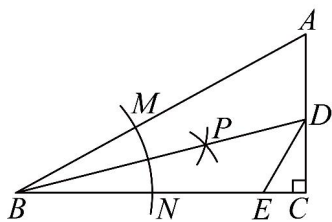
- A. $\triangle ABC$ 三边的垂直平分线的交点 B. $\triangle ABC$ 三个内角平分线的交点
C. $\triangle ABC$ 三条中线的交点 D. $\triangle ABC$ 三条高所在直线的交点

7. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 6$, $BC = 8$, 线段 DE 的两个端点 D 、 E 分别在 AC , BC 上滑动, 且 $DE = 6$, 若点 M 、 N 分别是 AB 、 DE 的中点, 连接 MN , 则 MN 的长度最小值为 ()



- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3

8. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以点 B 为圆心, 适当长为半径作弧, 与 BA , BC 分别交于点 M , N , 再分别以点 M , N 为圆心, 取大于 $\frac{1}{2}MN$ 长为半径作弧, 两弧交于点 P , 作射线 AP 交 AC 于点 D , 点 E 在 BC 上, 连接 DE , 且 $AD = DE$, 若 $AB = 12$, $BE = 9$, 则 CE 的长为 ()



- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{9}{4}$

二、填空题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.

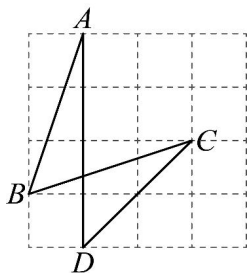
9. 因式分解: $x^2 - 4x + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 若 $m + n = 3$, $mn = -4$, 则 $m^2n + mn^2$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

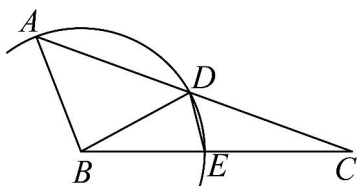
11. 若 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$, 则 $\frac{ab}{a-b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知关于 x 的方程 $\frac{3x}{x-2} + 1 = \frac{m}{x-2}$ 有增根, 则常数 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

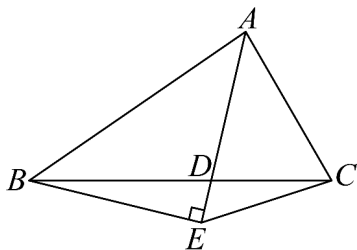
13. 如图, 在 4×4 的正方形网格中, 点 A, B, C, D 均为格点 (小正方形的顶点为格点), 则 $\angle BAD + \angle BCD =$ _____ $^\circ$.



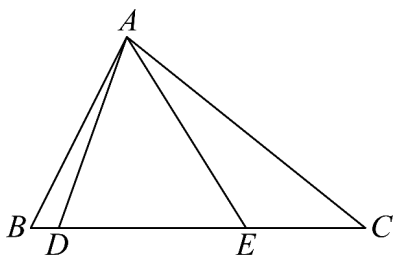
14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 20^\circ$, 以点 B 为圆心, AB 长为半径画弧, 分别交 AC, BC 于点 D, E , 连接 DE , 则 $\angle CDE$ 的度数为 _____ $^\circ$.



15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC < \angle ACB$, AD 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于点 D , 过点 B 作 $BE \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 E , 连接 CE , 若 $\triangle ABE$ 的面积为 25, $\triangle BCE$ 的面积为 11, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.



16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 78^\circ$, 点 D, E 在边 BC 上, 且 $AB = BE$, $AC = CD$, 则 $\angle DAE$ 的度数为 _____ $^\circ$.



三、解答题: 本大题共 11 小题, 共 82 分,

17. 分解因式:

(1) $2x^2 - 8$;

(2) $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3$.

18. 计算：

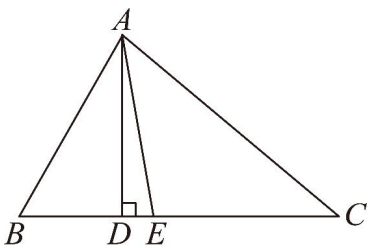
$$(1) \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y};$$

$$(2) \frac{x+1}{x^2-x} \cdot \left(x - \frac{3x-1}{x+1} \right).$$

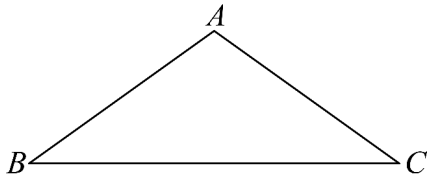
19. 先化简，再求值： $1 - \left(x - 2 - \frac{5}{x+2} \right) \div \frac{x^2 - 6x + 9}{x+2}$ ，其中 $x = 2$ 。

20. 解方程： $\frac{4}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+x} = \frac{2}{x^2-x}$ 。

21. 如图， $\triangle ABC$ 中， AD 是高， AE 是角平分线，且 $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 40^\circ$ 。求 $\angle DAE$ 的度数。



22. 如图，在钝角 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$.

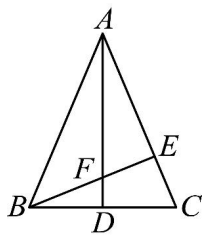


- (1) 尺规作图：在边 BC 上确定一点 D ，使得 $AD = BD$ （保留作图痕迹，标注相应字母，不写作法）；
(2) 在 (1) 的基础上，若 $AC = CD$ ，求 $\angle BAC$ 的度数.

23. 某校积极发展航模特色社团，为了让航模小组能更好地完成无人机的训练、参赛任务，现需购买 A 、 B 两种新款无人机模型，已知 A 型无人机模型的单价比 B 型贵 800 元；用 12000 元购买 A 型无人机模型的数量与用 8000 元购买 B 型无人机模型的数量相同.

- (1) 求 A 型和 B 型无人机模型的单价各是多少元？
(2) 若航模小组购买 A 、 B 两种新款无人机模型共 10 台，共用资金 20000 元，求航模小组购买 A 型无人机模型的数量.

24. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 45^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D , $BE \perp AC$ 于点 E , AD , BE 交于点 F .



- (1) 求证: $\triangle AEF \cong \triangle BEC$;
 (2) 若 $AB + BC = 14$, 求 $\triangle AEF$ 的周长.

25. 如果两个分式 P 与 Q , 满足 $P + Q = k$ (k 为常数), 且 k 为整数 ($k \neq 0$), 则称 P 与 Q 互为“调和分式”, 常数 k 称为“调和值”. 例如: 分式 $P = \frac{x}{x+2}$, $Q = \frac{2}{x+2}$, 由 $P + Q = 1$, 则 P 与 Q 互为“调和分式”, “调和值” $k = 1$.

- (1) 已知三个分式 $A = \frac{x+2}{x-1}$, $B = \frac{x-4}{x-1}$, $C = \frac{1-4x}{x-1}$, 则下列结论中正确的是_____ (填序号).
 ① A 与 B 是调和分式; ② A 与 C 是调和分式; ③ B 与 C 是调和分式.
 (2) 若分式 $M = \frac{3x-2}{2x-3}$, $N = \frac{S}{4x^2-9}$ (S 是整式), M 与 N 互为“调和分式”, 且“调和值” $k = 4$, 求整式 S ;

- (3) 若分式 $\frac{ax+3}{x-1}$ 与 $\frac{2x+b}{x^2-2x+1}$ (a, b 为整数) 互为“调和分式”, 求“调和值” k 的值.

26. 【问题引入】

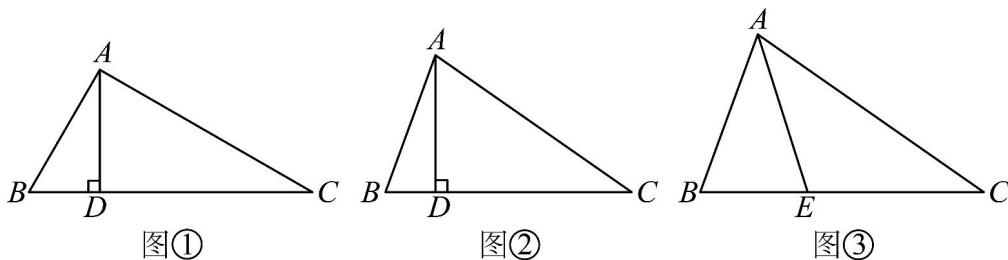
(1) 如图①, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D . 若 $AB = 2$, 则 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$; $CD = \underline{\hspace{2cm}}$.

【类比探究】

(2) 如图②, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 75^\circ$, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D , 且 $BD < CD$, 若 $AB + BD = CD$, 求 $\angle C$ 的度数.

【拓展应用】

(3) 如图③, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, AE 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于点 E . 求证: $AB + BE = AC$.



27. 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, 点 D 是边 BC 上一动点 (点 D 不与点 B 、 C 重合), 连接 AD , 将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 120° 后得到线段 AE , 连接 DE , CE .

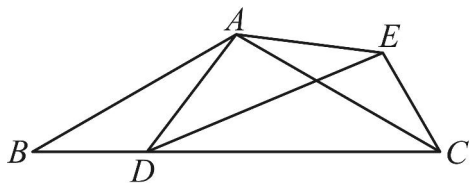


图1

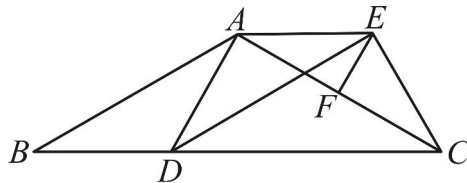
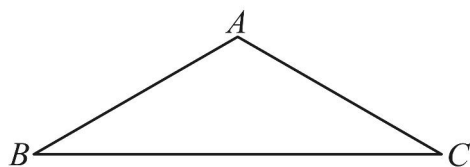


图2



备用图

- (1) 求 $\angle ACE$ 的度数;
- (2) 已知 $BC = 8$, 点 D 在 BC 上运动的过程中, 若 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 求此时 BD 的长;
- (3) 如图 2, 点 F 是 AC 的中点, 连接 EF , 若 $AB = 6$, 则线段 EF 的长度最小值为_____.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案用 2B 铅笔涂在答题卡相应的位置上。

1. 若三角形的两边长分别为 3 和 6，则这个三角形的第三边长可以是（ ）

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】此题主要考查了三角形的三边关系。根据三角形的三边关系“任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边”，求得第三边的取值范围，即可得出结果。

【详解】解：根据三角形的三边关系，得：

第三边的长度 $6-3 < x < 6+3$ ，即 $3 < x < 9$ 。

观察四个选项，B 选项符合题意，

故选：B。

2. 若分式 $\frac{2}{x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \neq 0$ B. $x = 0$ C. $x \neq 3$ D. $x = 3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分式有意义的条件，解题的关键是掌握分式有意义的核心：分母不等于零。

根据分式有意义的条件列出关于 x 的不等式，求解不等式得到 x 的取值范围，再匹配选项得出答案。

【详解】解：分式有意义的条件是分母不为零，对于分式 $\frac{2}{x-3}$ ，需满足分母 $x-3 \neq 0$ ，解得 $x \neq 3$ 。

故选：C。

3. 下列从左到右的变形中，属于因式分解的是（ ）

- A. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ B. $x^2 - 2x + 1 = x(x-2) + 1$
C. $x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ D. $x(x-3) = x^2 - 3x$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查因式分解的理解。根据因式分解的定义“把一个多项式化成几个整式的乘积的形式”，由此即可求解。

【详解】解：A、 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ，是因式分解，该选项符合题意；

B、 $x^2 - 2x + 1 = x(x-2) + 1$ ，不是因式分解，该选项不符合题意；

C、 $x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ ，不是因式分解，该选项不符合题意；

D、 $x(x-3) = x^2 - 3x$ ，不是因式分解，该选项不符合题意；

故选：A。

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为（ ）

- A. 50° B. 60° C. 65° D. 80°

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质与三角形内角和定理，解题的关键是利用等腰三角形两底角相等的性质，结合三角形内角和为 180° 计算顶角。

由 $AB = AC$ 可知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形， $\angle B$ 与 $\angle C$ 为底角且相等；先确定 $\angle C$ 的度数，再根据三角形内角和定理求出 $\angle A$ ，即可。

【详解】解： $\because AB = AC$ ，

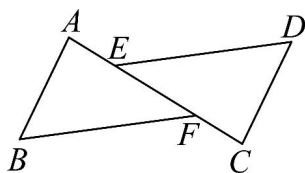
$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形， $\angle B = \angle C$ ，

已知 $\angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle C = 50^\circ$ ，

根据三角形内角和为 180° ，得 $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$ 。

故选：D。

5. 如图，点 E, F 在 AC 上，且 $AE = CF$ ， $\angle AFB = \angle CED$ ，添加下列一个条件后，仍不能判定 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ 的是（ ）



- A. $AB = CD$ B. $\angle B = \angle D$ C. $BF = DE$ D. $AB \parallel CD$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定综合，根据 $AE = CF$ ，得 $AF = CE$ ，再根据 $\angle AFB = \angle CED$ 以及选项添加的条件进行分析，即可作答。

【详解】解：A、 $\because AE = CF$ ， $\therefore AE + EF = CF + EF$ ，即 $AF = CE$ ， $\because \angle AFB = \angle CED$ ， $AB = CD$ ， $\therefore$ 不能判定 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ ，故该选项符合题意；

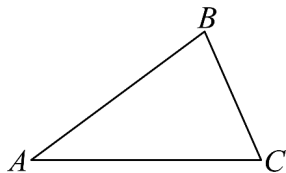
B、 $\because AE = CF$ ， $\therefore AE + EF = CF + EF$ ，即 $AF = CE$ ， $\because \angle AFB = \angle CED$ ， $\angle B = \angle D$ ， $\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ ，故该选项不符合题意；

C、 $\because AE = CF$ ， $\therefore AE + EF = CF + EF$ ，即 $AF = CE$ ， $\because \angle AFB = \angle CED$ ， $BF = DE$ ， $\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ ，故该选项不符合题意；

D、 $\because AE = CF$ ， $\therefore AE + EF = CF + EF$ ，即 $AF = CE$ ， $\because AB \parallel CD$ ， $\therefore \angle BAF = \angle DCE$ ， $\because \angle AFB = \angle CED$ ， $\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ ，故该选项不符合题意；

故选：A

6. 如图，三个居民小区分别坐落在地图中的 $\triangle ABC$ 三个顶点 A, B, C 处，现要建一个牛奶供应站 P ，且该供应站 P 到三小区 A, B, C 的距离相等，则该供应站 P 的位置应选在（ ）



- A. $\triangle ABC$ 三边的垂直平分线的交点 B. $\triangle ABC$ 三个内角平分线的交点
C. $\triangle ABC$ 三条中线的交点 D. $\triangle ABC$ 三条高所在直线的交点

【答案】A

【解析】

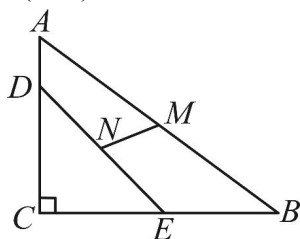
【分析】根据线段的垂直平分线的性质确定 P 点的位置。

【详解】解： $\because$ 点 P 到点 A, B, C 的距离相等，
 $\therefore$ 点 P 为 AB, BC, AC 的垂直平分线的交点。

故选：A。

【点睛】本题考查了三角形的外心：外心到三个顶点的距离相等。也考查了线段垂直平分线的性质。掌握三角形的外心及线段垂直平分线的性质是解题关键。

7. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，线段 DE 的两个端点 D, E 分别在 AC, BC 上滑动，且 $DE = 6$ ，若点 M, N 分别是 AB, DE 的中点，连接 MN ，则 MN 的长度最小值为（ ）



A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边中线的性质，明确 C 、 M 、 N 在同一直线上时，取得最小值是解题的关键。根据三角形斜边中线的性质求得 $CM = \frac{1}{2}AB = 5$ ， $CN = \frac{1}{2}DE = 3$ ，由 C 、 M 、 N 在同一直线上时， MN 取最小值，即可求得 MN 的最小值为 2。

【详解】解：如图所示，连接 CM ， CN ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，

$\because$ 点 M 为斜边 AB 中点，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中， $DE = 6$ ，

$\because$ 点 N 为斜边 DE 中点，

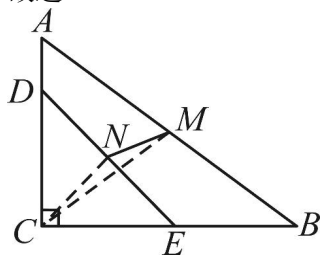
$$\therefore CN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

当 C 、 M 、 N 三点在同一直线上时， MN 取得最小值，

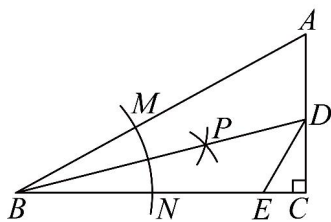
最小值为： $MN = CM - CN = 5 - 3 = 2$ ，

$\therefore MN$ 的最小值为：2。

故选 B。



8. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以点 B 为圆心，适当长为半径作弧，与 BA ， BC 分别交于点 M ， N ，再分别以点 M ， N 为圆心，取大于 $\frac{1}{2}MN$ 长为半径作弧，两弧交于点 P ，作射线 AP 交 AC 于点 D ，点 E 在 BC 上，连接 DE ，且 $AD = DE$ ，若 $AB = 12$ ， $BE = 9$ ，则 CE 的长为（ ）



A. 1

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{9}{4}$

【答案】C

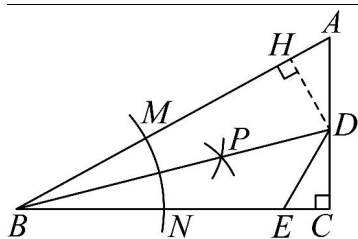
【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质，全等三角形的判定和性质，过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，由角平分线的性质可得 $DH = DC$ ，进而证明 $\text{Rt}\triangle BDH \cong \text{Rt}\triangle BDC$ (HL)，得 $BH = BC$ ，设 $CE = x$ ，则

$BH = BC = 9 + x$ ，得到 $HA = AB - BH = 3 - x$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle ADH \cong \text{Rt}\triangle EDC$ (HL)，得到

$HA = CE$ ，即得 $3 - x = x$ ，解方程即可求解，掌握角平分线的性质及全等三角形的判定和性质是解题的关键。

【详解】解：如图，过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ，



$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore DC \perp BC,$$

由作图可知, BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore DH = DC,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 和 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中,

$$\begin{cases} BD = BD \\ DH = DC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDH \cong \text{Rt}\triangle BDC (\text{HL}),$$

$$\therefore BH = BC,$$

设 $CE = x$, 则 $BH = BC = 9 + x$,

$$\because AB = 12,$$

$$\therefore HA = AB - BH = 12 - (9 + x) = 3 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 和 $\text{Rt}\triangle EDC$ 中,

$$\begin{cases} AD = ED \\ DH = DC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADH \cong \text{Rt}\triangle EDC (\text{HL}),$$

$$\therefore HA = CE,$$

$$\therefore 3 - x = x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2},$$

$$\text{即 } CE = \frac{3}{2},$$

故选: C.

二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 请将答案填在答题卷相应的位置上.

9. 因式分解: $x^2 - 4x + 4 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $(x-2)^2$

【解析】

【详解】解: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$

10. 若 $m+n=3$, $mn=-4$, 则 m^2n+mn^2 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】

-12

【解析】

【分析】此题考查提公因式法的应用, 将代数式进行因式分解后, 利用整体代入法求值.

【详解】 $\because m+n=3$, $mn=-4$,

$$\therefore m^2n+mn^2 = mn(m+n) = (-4) \times 3 = -12$$

故答案为: -12.

11. 若 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$, 则 $\frac{ab}{a-b} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

【分析】 先根据 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$ 的值 $a-b$ 与 ab 的关系，再代入所求代数式进行计算即可。

【详解】 解： $\because \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$,

$\therefore 2ab = b - a$, 即 $a - b = -2ab$,

$\therefore$ 原式 $= \frac{ab}{-2ab} = -\frac{1}{2}$.

故答案为： $-\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查的是分式的加减法，熟知分式的加减法则是解答此题的关键。

12. 已知关于 x 的方程 $\frac{3x}{x-2} + 1 = \frac{m}{x-2}$ 有增根，则常数 m 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的增根，增根问题可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②让最简公分母为 0 确定增根；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值。先去分母可得 $m = 4x - 2$ ，再根据

关于 x 的方程 $\frac{3x}{x-2} + 1 = \frac{m}{x-2}$ 有增根，可得 $x = 2$ ，代入计算即可求解。

【详解】 解： $\frac{3x}{x-2} + 1 = \frac{m}{x-2}$,

去分母得： $3x + x - 2 = m$, 即 $m = 4x - 2$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $\frac{3x}{x-2} + 1 = \frac{m}{x-2}$ 有增根，

$\therefore x - 2 = 0$,

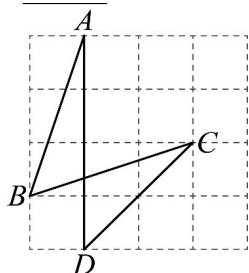
$\therefore x = 2$,

将 $x = 2$ 代入 $m = 4x - 2$,

得 $m = 8 - 2 = 6$,

故答案为： 6.

13. 如图，在 4×4 的正方形网格中，点 A, B, C, D 均为格点（小正方形的顶点为格点），则 $\angle BAD + \angle BCD =$ _____°.

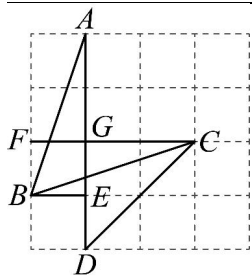


【答案】 45

【解析】

【分析】 此题考查全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，根据格点，得到 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ，推出 $\angle BCF = \angle BAE$ ，由 $\triangle CDG$ 是等腰直角三角形，知 $\angle DCG = 45^\circ$ ，由此求出答案。

【详解】 解： 如图，



$\because AE = CF = 3, BE = BF = 1, \angle AEB = \angle CFB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF,$

$\therefore \angle BCF = \angle BAE,$

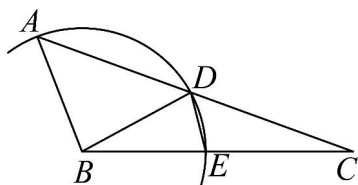
$\because \triangle CDG$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DCG = 45^\circ,$

$\therefore \angle BAE + \angle BCD = \angle BCF + \angle BCD = \angle GCD = 45^\circ,$

故答案为 45° .

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 50^\circ, \angle C = 20^\circ$, 以点 B 为圆心, AB 长为半径画弧, 分别交 AC, BC 于点 D, E , 连接 DE , 则 $\angle CDE$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】 55° ## 55 度

【解析】

【分析】本题考查了三角形内角和定理、等腰三角形的性质, 解题的关键是利用同圆半径相等得出等腰三角形, 逐步推导相关角的度数.

先根据三角形内角和求出 $\angle ABC$ 的度数; 由同圆半径相等得 $BA = BD = BE$, 利用等腰三角形性质求出 $\angle ABD$ 、 $\angle DBE$ 及 $\angle BDE$ 的度数; 结合共线点的角度关系求出 $\angle BDC$, 进而算出 $\angle CDE$ 的度数.

【详解】解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 50^\circ, \angle C = 20^\circ$

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$

$\because$ 以点 B 为圆心, AB 为半径画弧,

$\therefore BA = BD = BE.$

$\therefore \angle BAD = \angle BDA = 50^\circ,$

$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle BAD - \angle BDA = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ,$

$\therefore \angle DBE = \angle ABC - \angle ABD = 110^\circ - 80^\circ = 30^\circ,$

$\because BD = BE,$

$\therefore \angle BDE = \angle BED = \frac{180^\circ - \angle DBE}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$

$\because$ 点 A, D, C 共线,

$\therefore \angle BDA + \angle BDC = 180^\circ.$

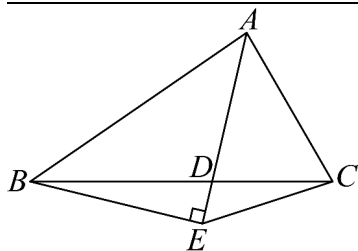
$\therefore \angle BDC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$

$\because \angle BDC = \angle BDE + \angle CDE,$

$\therefore \angle CDE = \angle BDC - \angle BDE = 130^\circ - 75^\circ = 55^\circ.$

故答案为: 55° .

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC < \angle ACB$, AD 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于点 D , 过点 B 作 $BE \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 E , 连接 CE , 若 $\triangle ABE$ 的面积为 25, $\triangle BCE$ 的面积为 11, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

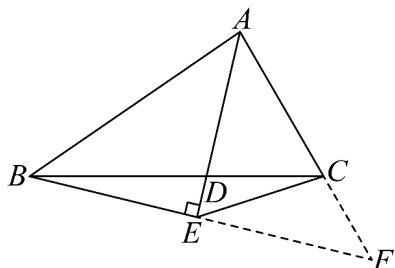


【答案】28

【解析】

【分析】此题考查全等三角形的判定和性质，延长 BE 和 AC 交于点 F ，证明 $\triangle AEB \cong \triangle AEF$ ，推出 $BE = FE$ ，由此得到 $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CEB} = 11$ ， $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle FAE} = 25$ ，进而可得结论。

【详解】解：如图，延长 BE 和 AC 交于点 F ，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$

$$\therefore \angle BAE = \angle FAE = \frac{1}{2} \angle BAC$$

$\because AE \perp BF$,

$$\therefore \angle AEB = \angle AEF = 90^\circ$$

$\because AE = AE$,

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AEF,$$

$$\therefore BE = FE,$$

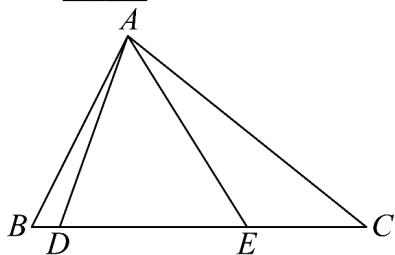
$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CEB} = 11, S_{\triangle ABE} = S_{\triangle FAE} = 25,$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABF} = 50, S_{\triangle BCF} = 22,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF} - S_{\triangle CBF} = 50 - 22 = 28$$

故答案为：28.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 78^\circ$ ，点 D, E 在边 BC 上，且 $AB = BE$ ， $AC = CD$ ，则 $\angle DAE$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】51

【解析】

【分析】利用等边对等角，以及外角的性质，得到 $\angle B + \angle C = 2\angle DAE$ ，即可得解。

【详解】解： $\because AB = BE$ ， $AC = CD$ ，

$$\therefore \angle BEA = \angle BAE, \angle CDA = \angle DAC,$$

$$\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD, \angle BEA = \angle C + \angle EAC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle B + \angle BAD = \angle DAE + \angle EAC, \angle BAE = \angle C + \angle EAC = \angle BAD + \angle DAE,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAD + \angle C + \angle EAC = 2\angle DAE + \angle EAC + \angle BAD,$$

$$\text{即：} \angle B + \angle C = 2\angle DAE,$$

$$\because \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 51^\circ;$$

故答案为: 51° .

【点睛】本题考查等腰三角形的判断和性质, 外角的性质, 以及三角形的内角和定理. 熟练掌握等边对等角, 以及三角形的外角等于与它不相邻的两个内角和, 是解题的关键.

三、解答题: 本大题共 11 小题, 共 82 分, 把解答过程写在答题卡相应的位置上, 解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明.

17. 分解因式:

$$(1) 2x^2 - 8;$$

$$(2) x^3y - 2x^2y^2 + xy^3.$$

【答案】(1) $2(x+2)(x-2)$

$$(2) xy(x-y)^2$$

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解, 掌握综合运用提取公因式和公式法因式分解成为解答本题的关键.

(1) 先提取公因式 2, 然后再运用平方差公式因式分解即可;

(2) 先提取公因式 2, 然后再运用完全平方公式因式分解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x+2)(x-2).$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 = xy(x^2 - 2xy + y^2) = xy(x-y)^2.$$

18. 计算:

$$(1) \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y};$$

$$(2) \frac{x+1}{x^2-x} \cdot \left(x - \frac{3x-1}{x+1}\right).$$

【答案】(1) 2 (2)

$$\frac{x-1}{x}$$

$$x$$

【解析】

【分析】本题考查了分式的加减乘混合运算, 解题的关键是掌握同分母分式减法法则、分式乘法法则, 以及“先括号后乘除”的运算顺序, 运算中注意因式分解与约分简化过程.

(1) 利用同分母分式减法法则, 分子相减、分母不变, 再对分子因式分解后约分;

(2) 先计算括号内的减法, 通分转化为同分母分式运算, 化简后与括号外分式相乘, 通过因式分解约分得出结果.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$= \frac{2x-2y}{x-y}$$

$$= \frac{2(x-y)}{x-y} = 2$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{x+1}{x^2-x} \cdot \left(x - \frac{3x-1}{x+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+1}{x(x-1)} \cdot \left(\frac{x(x+1)}{x+1} - \frac{3x-1}{x+1} \right) \\
&= \frac{x+1}{x(x-1)} \cdot \frac{x^2+x-3x+1}{x+1} \\
&= \frac{x+1}{x(x-1)} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x+1} \\
&= \frac{x+1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+1} = \frac{x-1}{x}
\end{aligned}$$

19. 先化简，再求值： $1 - \left(x - 2 - \frac{5}{x+2} \right) \div \frac{x^2 - 6x + 9}{x+2}$ ，其中 $x = 2$ 。

【答案】 $\frac{6}{3-x}$ ，6

【解析】

【分析】本题考查了分式化简求值，先通分括号，再运算除法，最后运算减法，得 $\frac{6}{3-x}$ ，再把 $x = 2$ 代入进行计算，即可作答。

$$\begin{aligned}
\text{【详解】解：} & 1 - \left(x - 2 - \frac{5}{x+2} \right) \div \frac{x^2 - 6x + 9}{x+2} \\
&= 1 - \frac{(x-2)(x+2) - 5}{x+2} \div \frac{x^2 - 6x + 9}{x+2} \\
&= 1 - \frac{x^2 - 4 - 5}{x+2} \times \frac{x+2}{x^2 - 6x + 9} \\
&= 1 - \frac{x^2 - 9}{x+2} \times \frac{x+2}{(x-3)^2} \\
&= 1 - \frac{(x-3)(x+3)}{x+2} \times \frac{x+2}{(x-3)^2} \\
&= 1 - \frac{x+3}{x-3} \\
&= \frac{x-3-x-3}{x-3} \\
&= \frac{-6}{x-3} \\
&= \frac{6}{3-x},
\end{aligned}$$

把 $x = 2$ 代入 $\frac{6}{3-x}$ ，得 $\frac{6}{3-2} = 6$ 。

20. 解方程： $\frac{4}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+x} = \frac{2}{x^2-x}$ 。

【答案】无解

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，把分式方程转化为整式方程，然后解整式方程，最后检验即可。

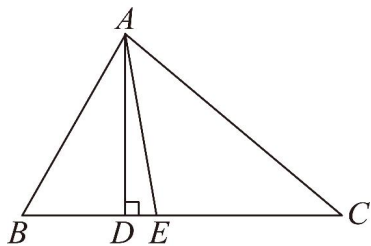
【详解】解：方程两边同乘以 $x(x+1)(x-1)$ ，得 $4x-3(x-1)=2(x+1)$ ，

解得 $x = 1$ ，

检验：当 $x=1$ 时， $x(x+1)(x-1)=0$ ，

$\therefore$ 原方程无解.

21. 如图， $\triangle ABC$ 中， AD 是高， AE 是角平分线，且 $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 40^\circ$. 求 $\angle DAE$ 的度数.



【答案】 10°

【解析】

【分析】本题考查了三角形内角和定理、角平分线的性质以及高的性质，解题的关键是熟练运用这些知识求出相关角的度数.

先根据三角形内角和定理求出 $\angle BAC$ 的度数，再利用角平分线的性质求出 $\angle BAE$ 的度数. 再利用高的性质求出 $\angle BAD$ 的度数，最后通过 $\angle DAE = \angle BAE - \angle BAD$ 求出结果.

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$$\because \angle B = 60^\circ, \angle C = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ.$$

$\because AE$ 是角平分线，

$$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ,$$

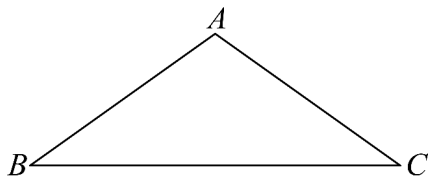
$\because AD$ 是高，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABD$ 中， $\angle BAD = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE - \angle BAD = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ.$$

22. 如图，在钝角 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$.

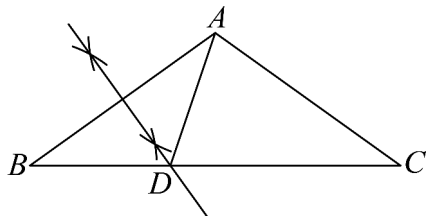


(1) 尺规作图：在边 BC 上确定一点 D ，使得 $AD = BD$ (保留作图痕迹，标注相应字母，不写作法)；

(2) 在 (1) 的基础上，若 $AC = CD$ ，求 $\angle BAC$ 的度数.

【答案】(1)

解：如图，点 D 即为所求；



(2) 108°

【解析】

【分析】此题考查线段垂直平分线的作法，等边对等角，三角形内角和定理，

(1) 作线段 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D 即可；

(2) 根据等边对等角推出 $\angle B = \angle C$ ， $\angle B = \angle BAD$ ， $\angle CAD = \angle CDA = 2\angle B$ ，再根据三角形内角和定理求出答案.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解：∵ $AB = AC$ ，
 ∴ $\angle B = \angle C$ ，
 ∵ $AD = BD$ ，
 ∴ $\angle B = \angle BAD$ ，
 ∴ $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = 2\angle B$ ，
 ∵ $AC = CD$ ，
 ∴ $\angle CAD = \angle CDA = 2\angle B$ ，
 ∵ $\angle ADC + \angle CAD + \angle C = 180^\circ$
 ∴ $5\angle B = 180^\circ$ ，
 ∴ $\angle B = 36^\circ$ ，
 ∴ $\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 108^\circ$ 。

23. 某校积极发展航模特色社团，为了让航模小组能更好地完成无人机的训练、参赛任务，现需购买 A、B 两种新款无人机模型，已知 A 型无人机模型的单价比 B 型贵 800 元；用 12000 元购买 A 型无人机模型的数量与用 8000 元购买 B 型无人机模型的数量相同。

(1) 求 A 型和 B 型无人机模型的单价各是多少元？

(2) 若航模小组购买 A、B 两种新款无人机模型共 10 台，共用资金 20000 元，求航模小组购买 A 型无人机模型的数量。

【答案】(1) A 型无人机模型的单价是 2400 元，B 型无人机模型的单价是 1600 元

(2) 航模小组购买 A 型无人机模型的数量是 5 台

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用，一元一次方程的应用，理解题意，正确列出分式方程和一元一次方程是解此题的关键。

(1) 设 B 型无人机模型的单价是 x 元，则 A 型无人机模型的单价是 $(x + 800)$ 元，根据题意列出分式方程，解方程即可得解；

(2) 设航模小组购买 A 型无人机模型的数量为 y 台，则航模小组购买 B 型无人机模型的数量为 $(10 - y)$ 台，根据题意列出一元一次方程，解方程即可得解。

【小问 1 详解】

解：设 B 型无人机模型的单价是 x 元，则 A 型无人机模型的单价是 $(x + 800)$ 元，

由题意可得： $\frac{12000}{x + 800} = \frac{8000}{x}$ ，

解得： $x = 1600$ ，

经检验， $x = 1600$ 是所列方程的解，且符合题意，

∴ $x + 800 = 1600 + 800 = 2400$ (元)，

故 A 型无人机模型的单价是 2400 元，B 型无人机模型的单价是 1600 元；

【小问 2 详解】

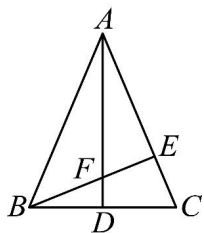
解：设航模小组购买 A 型无人机模型的数量为 y 台，则航模小组购买 B 型无人机模型的数量为 $(10 - y)$ 台，

由题意可得： $2400y + 1600(10 - y) = 20000$ ，

解得： $y = 5$ ，

∴ 航模小组购买 A 型无人机模型的数量是 5 台。

24. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$ 于点 D， $BE \perp AC$ 于点 E，AD，BE 交于点 F。



(1) 求证: $\triangle AEF \cong \triangle BEC$;

(2) 若 $AB + BC = 14$, 求 $\triangle AEF$ 的周长.

【答案】(1)

证明: $\because BE \perp AC, AD \perp BC,$

$$\therefore \angle CBE = \angle DAC = 90^\circ - \angle C,$$

$$\because \angle BAC = 45^\circ, BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore AE = BE,$$

$$\because BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BEC (ASA);$$

(2) 14

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质, 熟练掌握全等三角形的判定是本题的关键.

(1) 先根据角的代换求得 $\angle DAC = \angle EBC$, 再由 “ASA” 可证 $\triangle AEF \cong \triangle BEC$;

(2) 由全等三角形的性质可得 $AF = BC, EF = EC$, 利用三角形周长公式可得答案.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle AEF \cong \triangle BEC,$

$$\therefore AF = BC, EF = EC,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的周长} = AF + AE + EF = BC + AE + EC = BC + AC = 14.$$

25. 如果两个分式 P 与 Q , 满足 $P + Q = k$ (k 为常数), 且 k 为整数 ($k \neq 0$), 则称 P 与 Q 互为 “调和分式”, 常数 k 称为 “调和值”. 例如: 分式 $P = \frac{x}{x+2}, Q = \frac{2}{x+2}$, 由 $P + Q = 1$, 则 P 与 Q 互为 “调和分式”, “调和值” $k = 1$.

(1) 已知三个分式 $A = \frac{x+2}{x-1}, B = \frac{x-4}{x-1}, C = \frac{1-4x}{x-1}$, 则下列结论中正确的是_____ (填序号).

① A 与 B 是调和分式; ② A 与 C 是调和分式; ③ B 与 C 是调和分式.

(2) 若分式 $M = \frac{3x-2}{2x-3}, N = \frac{S}{4x^2-9}$ (S 是整式), M 与 N 互为 “调和分式”, 且 “调和值” $k = 4$,

求整式 S ;

(3) 若分式 $\frac{ax+3}{x-1}$ 与 $\frac{2x+b}{x^2-2x+1}$ (a, b 为整数) 互为 “调和分式”, 求 “调和值” k 的值.

【答案】(1) ①② (2) $S = 10x^2 - 5x - 30$

(3) $k = -5$

【解析】

【分析】本题考查了分式的加法、解一元一次方程、解分式方程, 熟练掌握运算法则并理解题意是解此题的关键.

(1) 计算每对分式的和, 判断是否等于常数整数.

(2) 根据调和分式定义和调和值 $k = 4$, 建立方程求解整式 S .

(3) 根据调和分式定义, 建立方程并比较系数, 求解调和值 k .

【小问 1 详解】

$$\text{解: } A + B = \frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} = 2 \text{ (常数整数),}$$

故 A 与 B 是调和分式, ①正确;

$$A + C = \frac{x+2}{x-1} + \frac{1-4x}{x-1} = \frac{-3x+3}{x-1} = -3 \text{ (常数整数),}$$

故 A 与 C 是调和分式, ②正确;

$$B+C = \frac{x-4}{x-1} + \frac{1-4x}{x-1} = \frac{-3x-3}{x-1} = -3 \cdot \frac{x+1}{x-1} \quad (\text{非常数}),$$

故 B 与 C 不是调和分式, ③错误;

故答案为: ①②.

【小问 2 详解】

解: 根据题意得 $M+N=4$,

$$\text{即 } \frac{3x-2}{2x-3} + \frac{S}{4x^2-9} = 4,$$

去分母得 $(3x-2)(2x+3)+S=4(2x-3)(2x+3)$,

$$\therefore 6x^2+5x-6+S=16x^2-36,$$

$$\therefore S=10x^2-5x-30.$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 根据题意 } \frac{ax+3}{x-1} + \frac{2x+b}{x^2-2x+1} = k,$$

去分母得 $(ax+3)(x-1)+(2x+b)=k(x-1)^2$,

$$\therefore ax^2+(-a+5)x+(b-3)=kx^2-2kx+k,$$

比较系数, 则 $a=k$, $-a+5=-2k$, $b-3=k$,

代入 $a=k$ 到 $-a+5=-2k$ 得: $-k+5=-2k$,

解得: $k=-5$.

26. 【问题引入】

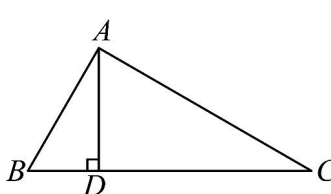
(1) 如图①, $\triangle ABC$ 中, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=30^\circ$, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D . 若 $AB=2$, 则 $BD=$ ____; $CD=$ ____.

【类比探究】

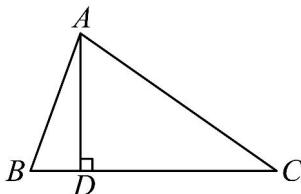
(2) 如图②, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=75^\circ$, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D , 且 $BD < CD$, 若 $AB+BD=CD$, 求 $\angle C$ 的度数.

【拓展应用】

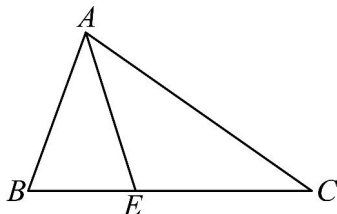
(3) 如图③, $\triangle ABC$ 中, $\angle B=2\angle C$, AE 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于点 E . 求证: $AB+BE=AC$.



图①



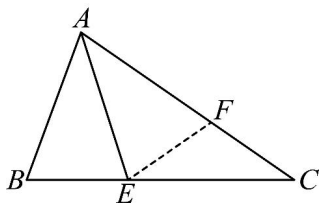
图②



图③

【答案】(1) 1, 3; (2) 35° ;

(3) 如图, 在 AC 上截取 $AF=AB$, 连接 EF ,



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$,

$\because AB = AF, AE = AE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE$,

$\therefore \angle AFE = \angle B, BE = FE$

$\because \angle B = 2\angle C, \angle B = \angle AFE = \angle C + \angle CEF$,

$\therefore \angle C = \angle CEF$,

$$\therefore EF = CF = BE,$$

$$\therefore AB + BE = AF + CF = AC.$$

【解析】

【分析】此题考查三角形内角和定理，直角三角形 30 度角的性质，全等三角形的判定和性质，等边对等角，

(1) 根据三角形内角和定理求出 $\angle BAC = 90^\circ$ ，再利用直角三角形 30 度角的性质求出 BC, BD 即可；

(2) 在 CD 上截取 $DE = BD$ ，连接 AE ，得到 $AB = AE$ ，根据 $AB + BD = CD$ ，推出 $CE = AB = AE$ ，根据等边对等角得到 $\angle B = \angle AEB, \angle C = \angle CAE$ ，利用外角性质推出 $\angle B = 2\angle C$ ，根据三角形内角和求出 $\angle C$ 的度数；

(3) 在 AC 上截取 $AF = AB$ ，连接 EF ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$ ，得到 $\angle AFE = \angle B, BE = FE$ ，由 $\angle B = 2\angle C, \angle B = \angle C + \angle CEF$ ，得到 $\angle C = \angle CEF$ ，推出 $EF = CF = BE$ ，进而得到结论.

【详解】解：(1) $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ, \angle C = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 2,$$

$$\therefore BC = 2AB = 4,$$

$$AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

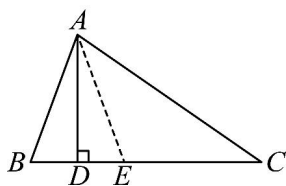
$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 3,$$

故答案为 1, 3;

(2) 在 CD 上截取 $DE = BD$ ，连接 AE ，



$$\therefore AD \perp BC, DB = DE$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore AB + BD = CD, CD = CE + DE,$$

$$\therefore CE = AB = AE,$$

$$\therefore \angle B = \angle AEB, \angle C = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle B = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 35^\circ;$$

(3) 略

27. 如图 1， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC, \angle BAC = 120^\circ$ ，点 D 是边 BC 上一动点（点 D 不与点 B, C 重合），连接 AD ，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 120° 后得到线段 AE ，连接 DE, CE 。

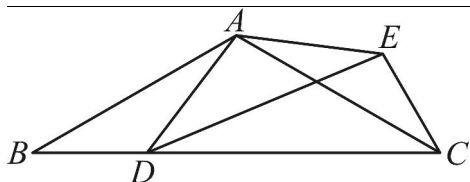


图1

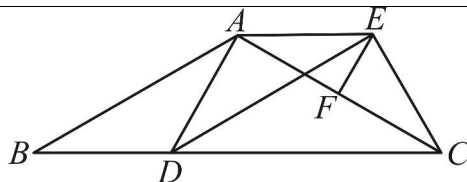
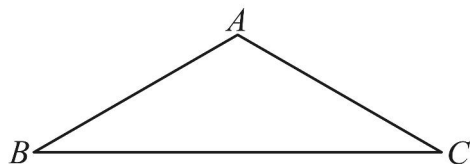


图2



备用图

(1) 求 $\angle ACE$ 的度数;

(2) 已知 $BC = 8$, 点 D 在 BC 上运动的过程中, 若 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 求此时 BD 的长;

(3) 如图 2, 点 F 是 AC 的中点, 连接 EF , 若 $AB = 6$, 则线段 EF 的长度最小值为_____.

【答案】(1) $\angle ACE = 30^\circ$

(2) BD 的长为 $\frac{8}{3}$ 或 $\frac{16}{3}$

(3) $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据旋转可得 $AD = AE$, $\angle ADE = 120^\circ$, 则通过角的转换可得 $\angle BAD = \angle CAE$, 即可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 则 $\angle ACE = \angle B$, 进而即可得解;

(2) 先根据题意求出 $\angle DCE = 60^\circ$, 再过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G , 当 $\triangle CDE$ 是直角三角形时, 可分为两种情况求解, 分别为: 当 $\angle EDC = 90^\circ$ 时和当 $\angle DEC = 90^\circ$ 时, 进行列方程求解即可;

(3) 如图, 取 AB 中点 G , 连接 DG , 由 “SAS” 可证 $\triangle AFE \cong \triangle AGD$, 可得 $GD = EF$, 则当 $GD \perp BC$ 时, GD 有最小值, 进而即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 120° 后得到线段 AE ,

$\therefore AD = AE$, $\angle ADE = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle DAC = 120^\circ$, $\angle DAC + \angle CAE = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS),

$\therefore \angle ACE = \angle B$,

$\because AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$,

$\therefore \angle B = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACE = 30^\circ$;

【小问 2 详解】

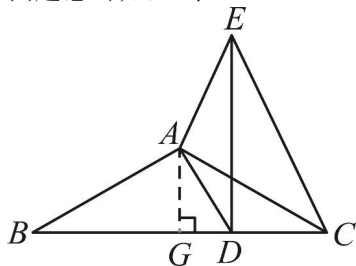
解: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = 30^\circ$,

$\therefore \angle DCE = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$,

过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ,

由题意可知，当 $\angle EDC = 90^\circ$ 时，如下图：



$$\therefore \angle DEC = 90^\circ - \angle ECD = 30^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore BD = CE,$$

$$\therefore \text{设 } BD = CE = x,$$

$$\therefore \text{在含 } 30^\circ \text{ 的 Rt}\triangle EDC \text{ 中, } DC = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore BC = 8,$$

$$\therefore BD + CD = 8,$$

$$\therefore CE + CD = 8,$$

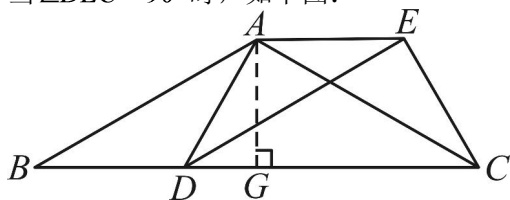
$$\therefore x + \frac{1}{2}x = 8$$

$$\frac{3}{2}x = 8$$

$$\text{解得 } x = \frac{16}{3},$$

$$\therefore BD = \frac{16}{3};$$

当 $\angle DEC = 90^\circ$ 时，如下图：



$$\therefore \angle EDC = 90^\circ - \angle ECD = 30^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore BD = CE,$$

$$\therefore \text{设 } BD = CE = x,$$

$$\therefore \text{在含 } 30^\circ \text{ 的 Rt}\triangle DEC \text{ 中, } DC = 2CE = 2x,$$

$$\therefore BC = 8,$$

$$\therefore BD + CD = 8,$$

$$\therefore CE + CD = 8,$$

$$\therefore x + 2x = 8$$

$$3x = 8$$

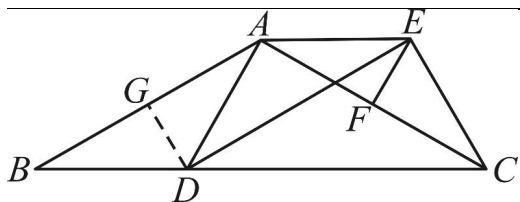
$$\text{解得 } x = \frac{8}{3},$$

$$\therefore BD = \frac{8}{3},$$

综上所述， BD 的长为 $\frac{8}{3}$ 或 $\frac{16}{3}$ ；

【小问 3 详解】

解：如图，取 AB 中点 G ，连接 DG ，



$\because AB = AC = 6$, 点 F 是 AC 中点, 点 G 是 AB 中点,

$\therefore AG = BG = AF = CF = 3$,

$\because \angle BAC = \angle DAE = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$,

$\because AD = AE, AG = AF$,

在 $\triangle AFE$ 和 $\triangle AGD$ 中,

$$\begin{cases} AE = AD \\ \angle CAE = \angle BAD \\ AF = AG \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle AGD$ (SAS),

$\therefore GD = EF$,

$\therefore DG$ 有最小值时, EF 也有最小值,

$\therefore$ 当 $GD \perp BC$ 时, GD 有最小值.

$\because \angle BAC = 120^\circ, AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = 30^\circ, GD \perp BC, BG = 3$,

$$\therefore GD = \frac{3}{2}, BD = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 线段 EF 长度的最小值为 $\frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质、含 30° 的直角三角形的性质、等腰三角形的性质和一元一次方程的应用, 熟知以上知识点并熟练的运用是解决本题的关键.