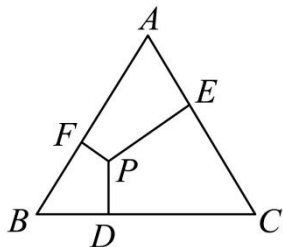


等边三角形常见模型 答案与解析

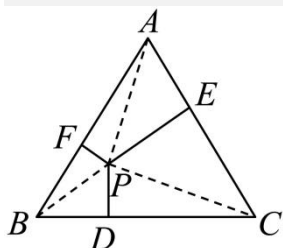
等边三角形中的维维尼亚模型

1. 如图，点 P 在等边三角形 ABC 的内部， $PD \perp BC$ ， $PE \perp AC$ ， $PF \perp AB$ ，垂足分别为 D ， E ， F ，若 $PD + PE + PF = 4$ ，且 $S_{\triangle ABC} = 6$ ，则 $\triangle ABC$ 的边长为_____.



【答案】3

【详解】解：连接 PA ， PB ， PC ，

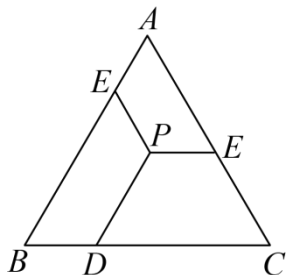


$$\because PD \perp BC, PE \perp AC, PF \perp AB, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}PD \times BC + \frac{1}{2}PE \times AC + \frac{1}{2}PF \times AB = 6.$$

$$\because \triangle ABC \text{ 为等边三角形, } PD + PE + PF = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(PD + PE + PF) \times AB = 6, \text{ 解得 } AB = 3, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 的边长为 } 3. \text{ 故答案为: } 3$$

2. 如图， P 是三角形内一点， $PD \parallel AB$ ， $PE \parallel BC$ ， $PF \parallel AC$ ，若 $PD + PE + PF = 6$ ，且 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $\triangle ABC$ 的周长为（ ）



A. 12

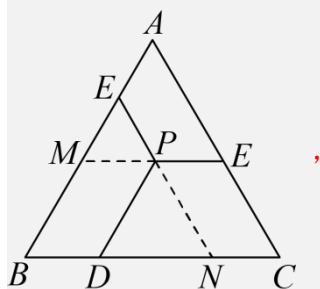
B. 18

C. 24

D. 30

【答案】B

【详解】解：延长 FP 交 BC 于 N ，延长 EP 交 AB 于 M ，



$\therefore PD \parallel AB, PE \parallel BC, PF \parallel AC, \therefore$ 四边形 $PMBD$, 四边形 $PNCE$ 是平行四边形,

$$\therefore CN = PE, \quad BD = PM,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$, $\therefore \angle PDN = \angle B = 60^\circ$, $\angle PND = \angle C = 60^\circ$,

$\therefore \angle DPN = 180^\circ - \angle PDN - \angle PND = 60^\circ$, $\therefore \triangle PDN$ 是等边三角形, 同理: $\triangle PFM$ 是等边三角形,

$$\therefore PD = DN, PF = MP, \therefore PF = BD, \therefore BC = BD + DN + CN = PF + PD + PE = 6,$$

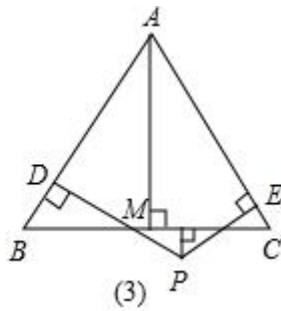
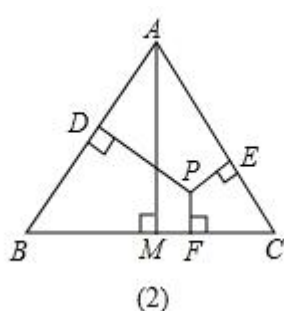
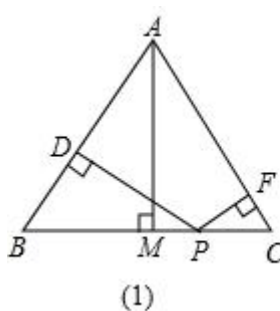
$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6 \times 3 = 18$ ，故选：B.

3. 已知等边 $\triangle ABC$ 和点 P , 设点 P 到 $\triangle ABC$ 三边的 AB 、 AC 、 BC 的距离分别是 h_1 , h_2 , h_3 , $\triangle ABC$ 的高为 h , 请你探索以下问题:

(1) 若点 P 在一边 BC 上 (图 (1)), 此时 $h_3=0$, 问 h_1 、 h_2 与 h 之间有怎样的数量关系? 请说明理由;

(2) 若当点 P 在 $\triangle ABC$ 内 (图 (2)), 此时 h_1 、 h_2 、 h_3 与 h 之间有怎样的数量关系? 请说明理由;

(3) 若点 P 在 $\triangle ABC$ 外 (图 (3)), 此时 h_1 、 h_2 、 h_3 与 h 之间有怎样的数量关系____. (请直接写出你的猜想, 不需要说明理由.)

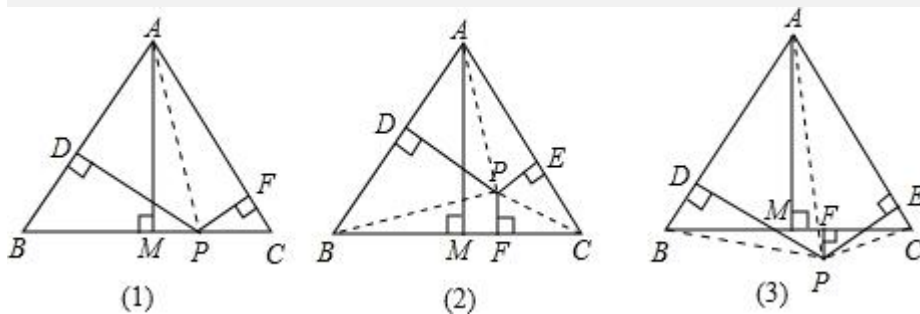


【答案】 (1) $h=h_1+h_2$, 理由见解析; (2) $h=h_1+h_2+h_3$, 理由见解析; (3) $h=h_1+h_2-h_3$

【详解】(1) $h=h_1+h_2$, 理由如下: 连接 AP , 则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}$

$$\therefore \frac{1}{2}BC \cdot AM = \frac{1}{2}AB \cdot PD + \frac{1}{2}AC \cdot PF \text{ 即 } \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot h_1 + \frac{1}{2}AC \cdot h_2$$

又 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形 $\therefore BC=AB=AC$, $\therefore h=h_1+h_2$.



(2) $h = h_1 + h_2 + h_3$, 理由如下: 连接 AP 、 BP 、 CP , 则 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle ACP}$

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} AB \cdot PD + \frac{1}{2} AC \cdot PF + \frac{1}{2} BC \cdot PE \quad \text{即} \quad \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot h_1 + \frac{1}{2} AC \cdot h_2 + \frac{1}{2} BC \cdot h_3$$

又 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore BC = AB = AC$. $\therefore h = h_1 + h_2 + h_3$.

(3) $h = h_1 + h_2 - h_3$.

当点 P 在 $\triangle ABC$ 外时, 结论 $h_1 + h_2 + h_3 = h$ 不成立. 此时, 它们的关系是 $h_1 + h_2 - h_3 = h$.

理由如下: 连接 PB , PC , PA ; 由三角形的面积公式得: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} - S_{\triangle PBC}$,

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} AB \cdot PD + \frac{1}{2} AC \cdot PE - \frac{1}{2} BC \cdot PF,$$

$\because AB = BC = AC$, $\therefore h_1 + h_2 - h_3 = h$, 即 $h_1 + h_2 - h_3 = h$.

4. 已知, 在等边三角形 ABC 中, AD 为 BC 边上的高.

操作发现: (1) 如图 1, 过点 D 分别作 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E, F . 请直接写出 $DE + DF$ 和

AD 的数量关系; (2) 如图 2, 若点 P 为 AD 上任意一点 (不与 A, D 重合), 过点 P 作 $PE \perp AB$,

$PF \perp AC$, 垂足分别为 E, F . 判断 $PD + PE + PF$ 和 AD 的数量关系, 并说明理由;

拓广探索: (3) 如图 3, 点 P 为等边三角形 ABC 内任意一点, 过点 P 作 $PH \perp BC$, $PE \perp AB$,

$PF \perp AC$, 垂足分别为 H, E, F , 探究 $PH + PE + PF$ 和 AD 的数量关系, 并说明理由.

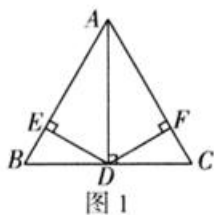


图 1

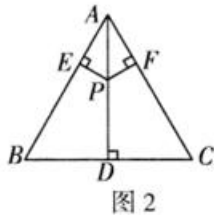


图 2

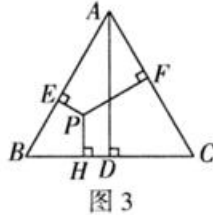


图 3

【答案】 (1) $DE + DF = AD$, 理由见解析; (2) $PD + PE + PF = AD$, 理由见解析; (3)

$PH + PE + PF = AD$, 理由见解析.

【详解】 (1) $DE + DF = AD$. 根据三角形的面积公式: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$ 即:

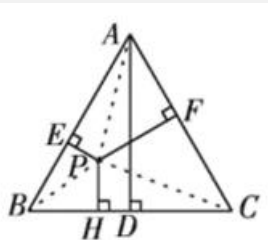
$$\frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, 即: $AB = AC = BC$, $\therefore DE + DF = AD$.

(2) $PD + PE + PF = AD$ 理由如下: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形 $\therefore \angle BAC = 60^\circ$

$\because AD$ 为 BC 边上的高 $\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$

又 $\because PE \perp AB, PF \perp AC, \therefore PE = PF = \frac{1}{2}AP \therefore PD + PE + PF = PD + AP = AD$



(3) $PH + PE + PF = AD$ 理由如下: 如图, 连接 PA, PB, PC ,

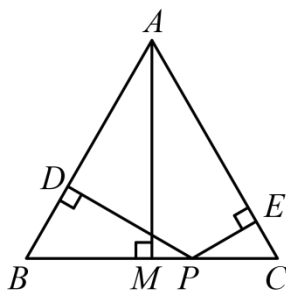
$\because \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore BC = AB = AC$ $\because AD$ 为 BC 边上的高, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD$

$\because PH \perp BC, PE \perp AB, PF \perp AC$, 垂足分别为 H, E, F ,

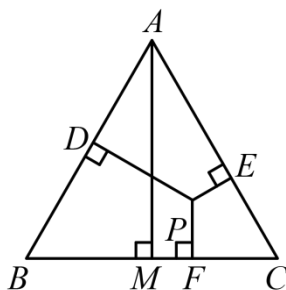
$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCP} + S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}BC \times PH + \frac{1}{2}AB \times PE + \frac{1}{2}AC \times PF = \frac{1}{2}BC \times (PH + PE + PF)$

$\therefore \frac{1}{2}BC \times AD = \frac{1}{2}BC \times (PH + PE + PF) \therefore PH + PE + PF = AD$

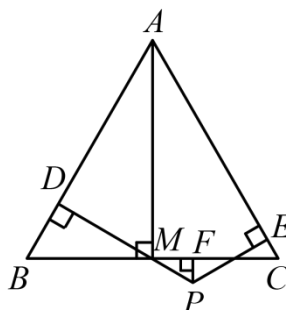
5. 数学中常常利用面积相等来证明其他的线段相等, 这种方法被称为“面积法”. 已知等边 $\triangle ABC$, 点 P 是平面上任意一点, 设点 P 到 $\triangle ABC$ 边 AB 、 AC 边的距离分别为 PD 、 PE , $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 AM . 回答以下问题:



(1)



(2)



(3)

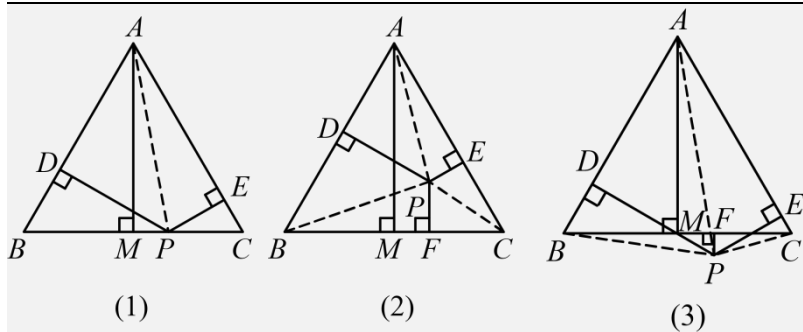
(1)如图 (1), 若点 P 在三角形的 BC 边上, PD 、 PE 、 AM 存在怎样的数量关系? 请给出证明过程.

(2)如图 (2), 当点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 已知 $AM = 10$, 求 $PD + PE + PF$ 的值.

(3)如图 (3), 当点 P 在 $\triangle ABC$ 外, 请直接写出 AM 与 PD 、 PF 、 PE 的数量关系, 不用证明.

【答案】 (1) $PD + PE = AM$, 证明见解析 (2) 10 (3) $PD + PE - PF = AM$

【详解】 (1) 解: $PD + PE = AM$, 证明如下: 连结 PA , 如图 (1) 所示:



设 $AB = m$ ， $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore AB = AC = BC = m$ ，

$\because PD \perp AB$ 于点 D ， $PE \perp AC$ 于点 E ， $AM \perp BC$ 于点 M ，

$$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}mPD, S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}mPE, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}mAM,$$

$$\because S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} = S_{\triangle ABC}, \therefore \frac{1}{2}mPD + \frac{1}{2}mPE = \frac{1}{2}mAM, \therefore PD + PE = AM;$$

(2) 解：连结 PA 、 PB 、 PC ，如图 (2) 所示：

设 $AB = m$ ， $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore AB = AC = BC = m$ ，

$\because PD \perp AB$ 于点 D ， $PE \perp AC$ 于点 E ， $PF \perp BC$ 于点 F ， $AM \perp BC$ 于点 M ，

$$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}mPD, S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}mPE, S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2}mPF, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}mAM,$$

$$\because S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BPC} = S_{\triangle ABC}, \therefore \frac{1}{2}mPD + \frac{1}{2}mPE + \frac{1}{2}mPF = \frac{1}{2}mAM, \therefore PD + PE + PF = AM,$$

$\because AM = 10$ ， $\therefore PD + PE + PF = 10$ ， $\therefore PD + PE + PF$ 的值为 10；

(3) 解： $PD + PE - PF = AM$ ，理由如下：连结 PA 、 PB 、 PC ，如图 (3) 所示：

设 $AB = m$ ， $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore AB = AC = BC = m$ ，

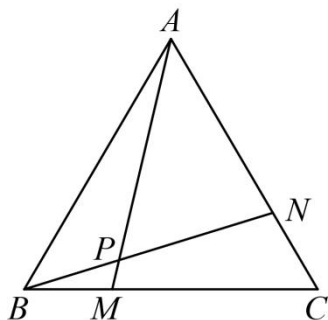
$\because PD \perp AB$ 于点 D ， $PE \perp AC$ 于点 E ， $PF \perp BC$ 于点 F ， $AM \perp BC$ 于点 M ，

$$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}mPD, S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}mPE, S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2}mPF, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}mAM,$$

$$\because S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC} - S_{\triangle BPC} = S_{\triangle ABC}, \therefore \frac{1}{2}mPD + \frac{1}{2}mPE - \frac{1}{2}mPF = \frac{1}{2}mAM, \therefore PD + PE - PF = AM.$$

等边截等长模型（定角模型）

6. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，且 $BM = CN$ ， AM 与 BN 相交于点 P ，则 $\angle APN$ ().



A. 等于 70° B. 等于 60° C. 等于 50°

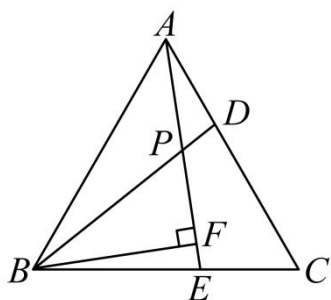
D. 大小不确定

【答案】B**【详解】** $\because$ 等边 $\triangle ABC$, $\therefore BC = CA = AB, \angle BCN = \angle CAB = \angle ABC = 60^\circ$,

$$\because \begin{cases} AB = BC \\ \angle ABM = \angle BCN, \therefore \triangle ABM \cong \triangle BCN (SAS), \therefore \angle BAM = \angle CBN, \\ BM = CN \end{cases}$$

 $\therefore \angle APN = \angle ABP + \angle BAM, \therefore \angle APN = \angle ABP + \angle CBN = \angle ABM = 60^\circ$, 故选 B.

7. 如图, $\triangle ABC$ 为等边三角形, D 、 E 分别是 AC 、 BC 上的点, 且 $AD = CE$, AE 与 BD 相交于点 P , $BF \perp AE$ 于点 F . 若 $BP = 8$, 则 PF 的长为 ()



A. 3

B. 4

C. 5

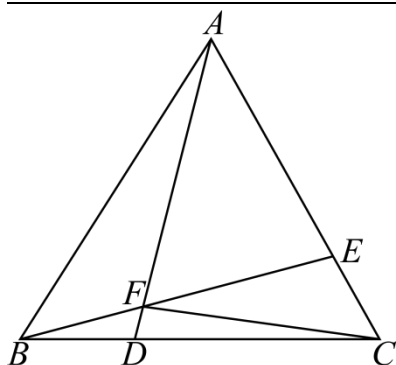
D. 6

【答案】B**【详解】** $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB = AC, \therefore \angle BAC = \angle C$.

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle CAE \text{ 中, } \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle C = 60^\circ, \therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE (SAS). \\ AD = CE \end{cases}$$

 $\therefore \angle ABD = \angle CAE, \therefore \angle APD = \angle ABP + \angle PAB = \angle BAC = 60^\circ, \therefore \angle BPF = \angle APD = 60^\circ$. $\because \angle BFP = 90^\circ, \angle BPF = 60^\circ, \therefore \angle PBF = 30^\circ, \therefore PF = \frac{1}{2} BP = \frac{1}{2} \times 8 = 4$. 故选: B.

8. 如图, 点 D 、 E 分别在等边三角形 ABC 的边 BC 、 AC 上, $CD = 2BD$, $AE = 2CE$, 连接 AD , BE 交于点 F , 连接 CF , 以下结论: ① $AD = BE$; ② $\angle AFE = 60^\circ$; ③ $\triangle AFC$ 的面积是 $\triangle AFB$ 面积的 2 倍; ④ $AD \perp CF$; 一定正确的有 () 个.



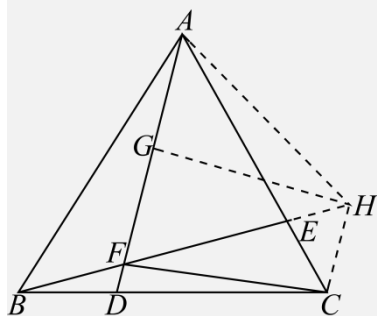
A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

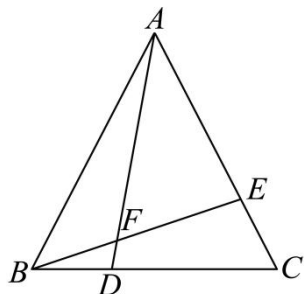
【答案】A

【详解】 $\because AC = AB = BC$, $\therefore \angle BAC = \angle ACD = \angle ABC = 60^\circ$, $\because CD = 2BD$, $AE = 2CE$, $\therefore BD = \frac{1}{3}BC$, $CE = \frac{1}{3}AC$, $\therefore BD = CE$, 且 $\angle ABC = \angle ACB$, $AB = AC$, $\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE$ (SAS) $\therefore AD = BE$, $\angle BAD = \angle CBE$, 故①正确. $\because \angle AFE = \angle ABF + \angle BAD$, $\therefore \angle AFE = \angle ABF + \angle CBE = 60^\circ$, 故②正确. $\because CD = 2BD$, $\therefore S_{\triangle ACD} = 2S_{\triangle ABD}$, $S_{\triangle CDF} = 2S_{\triangle BDF}$, $\therefore S_{\triangle ACD} - S_{\triangle CDF} = 2(S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BDF})$, $\therefore S_{\triangle AFC} = 2S_{\triangle ABF}$, 故③正确.如图, 延长 FE 至 H , 使 $FH = FA$, 连接 CH , AH , 过点 H 作 $GH \perp AF$ 于 G , $\because AF = FH$, $\angle AFH = 60^\circ$, $\therefore \triangle AFH$ 是等边三角形, $\therefore AF = FH = AH$, $\angle FAH = \angle AFH = \angle AHF = 60^\circ$, $\therefore \angle BAC = \angle FAH$, $\angle FHC = \angle AHC - \angle AHF = 60^\circ$, $\therefore \angle BAF = \angle CAH$, 且 $AB = AC$, $AF = AH$, $\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACH$ (SAS), $\therefore BF = CH$, $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ACH}$, $\angle AFB = \angle AHC = 120^\circ$, 设 $S_{\triangle ABF} = x$, 则 $S_{\triangle AFC} = 2x$, $S_{\triangle ACH} = x$, $\because AE = EC$, $\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{4}{3}x$, $S_{\triangle EFC} = \frac{2}{3}x$, $S_{\triangle AEH} = \frac{2}{3}x$, $S_{\triangle ECH} = \frac{1}{3}x$, $\therefore S_{\triangle AFH} = \frac{2}{3}x$, $S_{\triangle FCH} = x$, $\because \angle AFH = \angle FHC = 60^\circ$, $\therefore AF \parallel CH$, $\because \triangle AFH$ 是等边三角形, $CH \perp AF$, $\therefore S_{\triangle AFG} = x = S_{\triangle CFH}$, $\therefore \frac{1}{2}GF \times CH = \frac{1}{2}CH \times GH$,

$\therefore GF = CH$, $GF \parallel CH$, $\therefore$ 四边形 $GFCH$ 为平行四边形, 且 $GH \perp AF$,

$\therefore$ 四边形 $GFCH$ 是矩形, $\therefore AD \perp CF$, 故④正确. 故选: A.

9. 如图, 点 D 、 E 分别是等边三角形 ABC 边 BC 、 AC 上的点, 且 $BD = CE$, BE 与 AD 交于点 F . 求证: $AD = BE$.

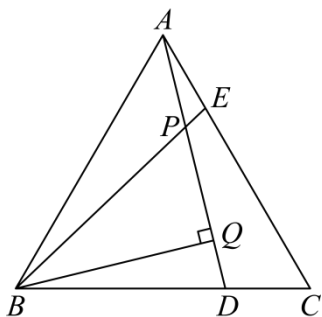


【答案】见解析

【详解】证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB = BC$, $\angle ABD = \angle BCE = 60^\circ$,

又 $BD = CE$, $\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE$ (SAS), $\therefore AD = BE$.

10. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上, 且 $AE = CD$, BE 与 AD 相交于点 P , $BQ \perp AD$ 于点 Q . (1) 求证: $BE = AD$; (2) 若 $PQ = 4$, 求 BP 的长.



【答案】(1) 见解析 (2) 8

【详解】(1) 证明: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore AB = AC$, $\angle BAC = \angle C = 60^\circ$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAD$ 中 $\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle ACD \\ AE = CD \end{cases}$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAD$ (SAS), $\therefore BE = AD$.

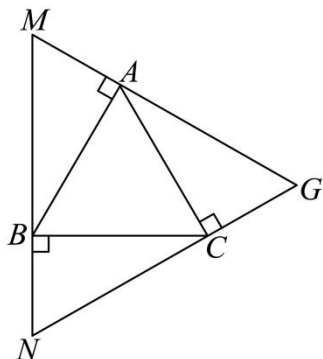
(2) 解: $\because \triangle ABE \cong \triangle CAD$, $\therefore \angle ABE = \angle CAD$, $\therefore$

$\angle BPQ = \angle ABP + \angle BAP = \angle CAD + \angle BAP = \angle BAC = 60^\circ$,

又 $\because BQ \perp AD$, $\therefore \angle BQP = 90^\circ$, $\therefore \angle PBQ = 180^\circ - \angle BPQ - \angle BQP = 30^\circ$, $\therefore BP = 2PQ$, 又 $\because PQ = 4$, $\therefore BP = 8$.

等边内接等边

11. 如图, 过等边三角形 $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 依次作 AB 、 BC 、 AC 的垂线 MG 、 MN 、 NG , 三条垂线围成 $\triangle MNG$, 若 $AM = 2$, 则 $\triangle MNG$ 的周长为 ()



- A. 12 B. 18 C. 20 D. 24

【答案】B

【详解】解: $\because AB \perp MG, \therefore \angle BAG = 90^\circ$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle BAC = 60^\circ, \therefore \angle CAG = \angle BAG - \angle BAC = 30^\circ$,

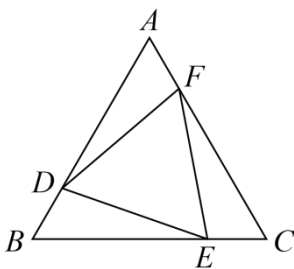
$\therefore \angle G = 60^\circ$, 同理: $\angle M = \angle N = 60^\circ, \therefore \triangle MNG$ 是等边三角形. $\therefore MG = MN = NG$.

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, $\angle M = 60^\circ, \therefore \angle MBA = 30^\circ, \therefore MB = 2MA = 4, \because AC \perp NG, \therefore \angle ACG = 90^\circ$,

在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle CAG$ 中, $\begin{cases} \angle M = \angle G = 60^\circ \\ \angle BAM = \angle ACG = 90^\circ, \\ AB = CA \end{cases} \therefore \triangle ABM \cong \triangle CAG (\text{AAS})$

$\therefore GA = MB = 4, \therefore MG = GA + AM = 6, \therefore \triangle MNG$ 的周长为 $MG + MN + NG = 3MG = 18$. 故选: B.

12. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是等边三角形, 点 D, E, F 分别在边 AB, BC, AC 上, 若 $\triangle ABC$ 的周长为 15, $AF = 2$, 则 BE 的长为 ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是等边三角形,

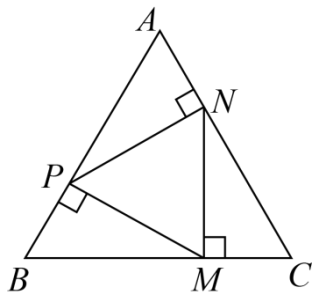
$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ, \angle DFE = \angle DEF = \angle EDF = 60^\circ, AB = BC = CA, DE = DF = EF$,

$\therefore \angle ADF + \angle AFD = 120^\circ, \angle CFE + \angle AFD = 120^\circ, \therefore \angle ADF = \angle CFE, \therefore \triangle ADF \cong \triangle CFE (\text{AAS})$,

同理得： $\triangle ADF \cong \triangle CFE \cong \triangle BED$ ， $\therefore AF = EC = BD = 2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 15， $\therefore AB = BC = CA = 5$ ， $\therefore BE = BC - CE = 5 - 2 = 3$ ，故选：B.

13. 如图，点 P, M, N 分别在等边三角形 ABC 的各边上，且 $MP \perp AB$ 于点 P ， $NM \perp BC$ 于点 M ， $PN \perp AC$ 于点 N . (1) 求证： $\triangle PMN$ 是等边三角形；(2) 若 $AB = 15\text{cm}$ ，求 BP 的长.



【答案】(1) 证明见解析 (2) 5cm

【详解】(1) 证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

$\because MP \perp AB$ ， $NM \perp BC$ ， $PN \perp AC$ ， $\therefore \angle MPB = \angle NMC = \angle PNA = 90^\circ$.

$\therefore \angle PMB = \angle MNC = \angle APN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$\therefore \angle NPM = \angle PMN = \angle MNP = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. $\therefore \triangle PMN$ 是等边三角形.

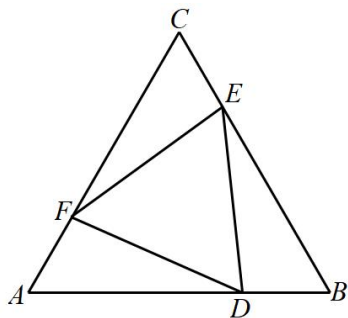
(2) 解： $\because \triangle PMN$ 是等边三角形， $\therefore PM = MN = NP$.

在 $\triangle PBM$ 和 $\triangle NAP$ 中，
$$\begin{cases} \angle B = \angle A \\ \angle MPB = \angle PNA \\ PM = NP \end{cases} \therefore \triangle PBM \cong \triangle NAP \text{ (AAS)}. \therefore BM = AP, BP = AN.$$

$\because \angle PNA = 90^\circ$ ， $\angle APN = 30^\circ$ ， $\therefore AN = \frac{1}{2}AP$. $\therefore AP = 2AN = 2BP$.

$\because AB = 15\text{cm}$ ， $\therefore AP + BP = 2BP + BP = 15\text{cm}$. $\therefore BP = 5\text{cm}$.

14. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，点 D, E, F 分别在边 AB, BC, CA 上运动，满足 $AD = BE = CF$. 求证： $\triangle ADF \cong \triangle BED$.



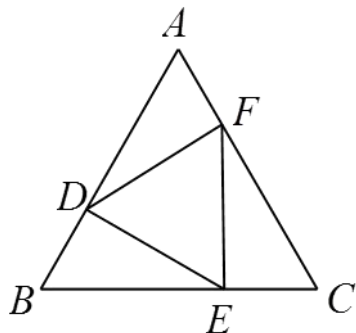
【答案】见详解

【详解】(1) 证明： $\because \triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ ， $AB = BC = AC = 4$ ， $\because AD = BE = CF$ ， $\therefore AF = BD = CE$ ，

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle BED$ 中,
$$\begin{cases} AF = BD \\ \angle A = \angle B, \therefore \triangle ADF \cong \triangle BED (\text{SAS}); \\ AD = BE \end{cases}$$

15. 如图, 点 D 、 E 、 F 分别是等边 $\triangle ABC$ 各边上的点, 且 $BD = CE = 2$, $\angle DEB = \angle EFC$. (1) 求证: $\triangle DEF$ 是等边三角形. (2) 若 $\angle DEC = 150^\circ$, 求等边 $\triangle ABC$ 的周长.



【答案】(1) 详见解析; (2) 18

【详解】(1) 证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = BC = AC$, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, $\because BD = CE$, $\therefore BD = CE = AF$,

在 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CEF$ 中,
$$\begin{cases} BD = CE \\ \angle B = \angle C \\ \angle DEB = \angle EFC \end{cases}, \therefore \triangle BDE \cong \triangle CEF (\text{SAS}), \therefore DE = EF,$$

同理可得 $\triangle BDE \cong \triangle AFD$, $\therefore DE = FD$, $\therefore DE = FD = EF$, $\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形;

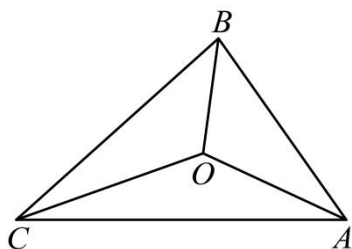
(2) 解: $\because \angle DEC = 150^\circ$, $\angle DEF = 60^\circ$, $\therefore \angle FEC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADF$ 、 $\triangle BED$ 、 $\triangle CFE$ 均为直角三角形, 且 $\angle CFE = \angle ADF = \angle BDE = 30^\circ$,

$\because BD = CE = 2$, $\therefore CF = AD = BE = 2BD = 4$, $\therefore AB = BC = AC = 6$, $\therefore$ 等边 $\triangle ABC$ 的周长为: $6 \times 3 = 18$

角平分线第二定理模型

16. 如图, $\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 长分别是 50、60、70, 其三条角平分线将 $\triangle ABC$ 分为三个三角形, 则 $S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BCO} : S_{\triangle CAO}$ 等于 ()

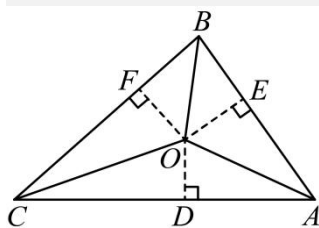


A. 1: 1: 1

B. 7: 6: 5

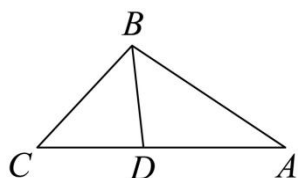
C. 6: 5: 7

D. 5: 6: 7

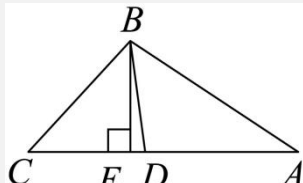
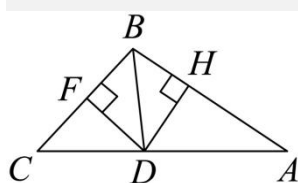
【答案】D**【详解】**解:过点 O 作 $OD \perp AC$ 于 D , $OE \perp AB$ 于 E , $OF \perp BC$ 于 F , $\because$ 点 O 是内心, $\therefore OE = OF = OD$.

$$\therefore S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BCO} : S_{\triangle CAO} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OE : \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OF : \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OD = AB : BC : AC = 50 : 60 : 70 = 5 : 6 : 7 \text{ 故选: D.}$$

17. 我们已经学习过角平分线性质的定理, 即: 角平分线上的点到角两边的距离相等. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的角平分线 BD 交边 AC 于点 D .



(1) 求证: $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BAD}} = \frac{BC}{AB}$ (2) 求证: $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}$; (3) 如果 $BC=4$, $AB=6$, $AC=5$, 那么 $CD=$ _____.

【答案】(1) 见解析(2) 见解析(3) 2**【详解】**(1) 作 $DF \perp BC$, 作 $DH \perp AB$ 垂足分别为 F, H 

$$\because BD \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的角平分线. } \therefore DF = DH \quad \text{则有: } \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BAD}} = \frac{\frac{1}{2} DF \cdot BC}{\frac{1}{2} DH \cdot AB} = \frac{BC}{AB}$$

$$(2) \text{ 作 } BE \perp CA \text{ 垂足为 } E; \text{ 则有: } \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BAD}} = \frac{\frac{1}{2} BE \cdot CD}{\frac{1}{2} BE \cdot DA} = \frac{CD}{AD} \therefore \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知, } \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD} \quad \because BC=4, AB=6, AC=5, \\ \therefore \frac{4}{6} = \frac{CD}{AC-CD} \therefore \frac{CD}{5-CD} = \frac{2}{3} \therefore 3CD = 10 - 2CD \therefore CD = 2 \text{ 故答案为: } 2$$

18. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的点 (不与点 B, C 重合), 连接 AD .

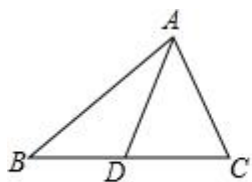


图1

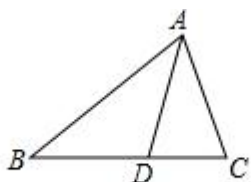


图2

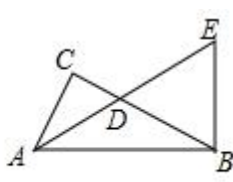


图3

(1)如图 1, 当点 D 是 BC 边的中点时, $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2)如图 2, 当 AD 平分 $\angle BAC$ 时, 若 $AB = m$, $AC = n$, 求 $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD}$ 的值 (用含 m 、 n 的式子表示);

(3)如图 3, AD 平分 $\angle BAC$, 延长 AD 到 E , 使得 $AD = DE$, 连接 BE , 若 $AC = 3, AB = 5, S_{\triangle BDE} = 10$, 求 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

【答案】 (1)1:1 (2) $m:n$ (3)16

【详解】 (1) 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , $\because$ 点 D 是 BC 边上的中点, $\therefore BD = DC$,

$$\therefore S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = \left(\frac{1}{2} \times BD \times AE\right) : \left(\frac{1}{2} \times CD \times AE\right) = 1:1 \text{ 故答案为: } 1:1;$$

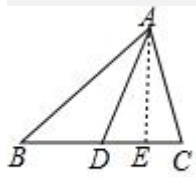


图1

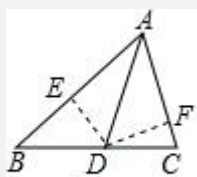


图2

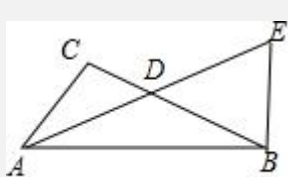


图3

(2) 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F , $\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的角平分线, $\therefore DE = DF$,

$$\because AB = m, AC = n, \therefore S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = \left(\frac{1}{2} \times AB \times DE\right) : \left(\frac{1}{2} \times AC \times DF\right) = m:n;$$

(3) $\because AD = DE$, $\therefore$ 由 (1) 知: $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle EBD} = 1:1$, $\because S_{\triangle BDE} = 10$, $\therefore S_{\triangle ABD} = 10$,

$\because AC = 3, AB = 5$, AD 平分 $\angle BAC$, $\therefore$ 由 (2) 知: $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = AB:AC = 5:3$,

$\therefore S_{\triangle ACD} = 6$, $\therefore S_{\triangle ABC} = 10 + 6 = 16$, 故答案为: 16.

19. 三角形角平分线性定理: 三角形的内角平分线分对边所得两条线段与这个角的两边对应成比例.

如图 1, $\triangle ABC$ 中, AD 是角平分线, 则 $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. 小石同学学习了这个定理以后探究: 三角形的外角平分线分对边所得两条线段与这个角的两边的关系, 下面是他的探究过程, 请按要求完成.

已知: 如图 2, 已知 $\triangle ABC$ 及其外角 $\angle EAC$. $\angle EAC$ 的角平分线交 BC 的延长线于点 F . 求证:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CF}.$$

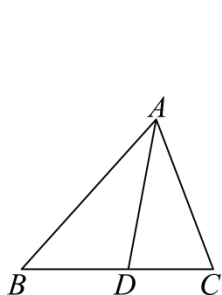


图1

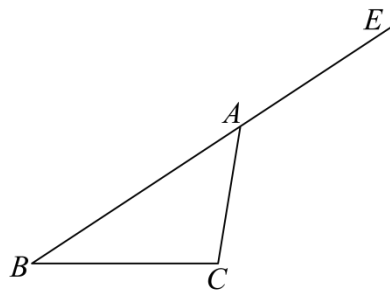


图2

(1)尺规作图：在图2中作 $\angle EAC$ 的平分线交 BC 的延长线于点 F ，在射线 AE 上截取 $AG = AC$ ，连接 FG （不写作法保留作图痕迹）

(2)证明：

$\because AF$ 是 $\angle EAC$ 的角平分线， $\therefore \angle CAF =$ _____ ①

$\because AC = AG$ ， $AF = AF$ $\therefore \triangle ACF \cong \triangle AFG$ (SAS)

$\therefore \angle AFC =$ _____ ②， $CF =$ _____ ③

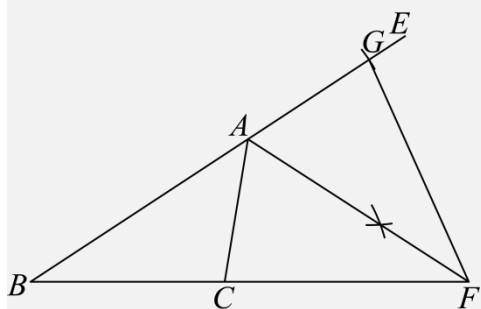
$\therefore AF$ 是 $\triangle BFG$ 的角平分线 $\therefore \frac{AB}{AG} =$ _____ ④

$\because CF = GF$ ， $AC = AG$ $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CF}$

结合以上探究可知：三角形的一个外角的角平分线外分对边所成两条线段，这两条线段和夹相应的内角的两边_____ ⑤。

【答案】 (1)见解析 (2) $\angle EAF$ ； $\angle AFG$ ； FG ； $\frac{BF}{FG}$ ；成比例

【详解】 (1) 解：所作图形，如图所示，



(2) 证明： $\because AF$ 是 $\angle EAC$ 的角平分线 $\therefore \angle CAF = \angle EAF$ ，

$\because AC = AG$ ， $AF = AF$ ， $\therefore \triangle ACF \cong \triangle AGF$ (SAS)，

$\therefore \angle AFC = \angle AFG$ ， $CF = FG$ ， $\therefore AF$ 是 $\triangle BFG$ 的角平分线， $\therefore \frac{AB}{AG} = \frac{BF}{FG}$ ，

$$\because CF = GF, AC = AG, \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CF}.$$

∴ 三角形的一个外角的角平分线外分对边所成两条线段，这两条线段和夹相应的内角的两边成比例。

故答案为：∠EAF；∠AFG；FG； $\frac{BF}{CF}$ ；成比例。

20. 爱动脑筋的小李同学在学习完角平分线的性质后意犹未尽，经过思考发现里面还有一个有趣的结论：

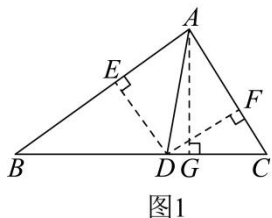


图1

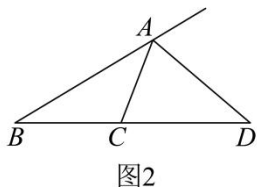


图2

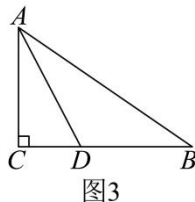


图3

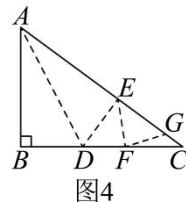


图4

(1) 【问题发现】如图1所示，若AD是∠BAC的角平分线，可得到结论： $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ 。

小李的解法如下：过点D作DE⊥AB于点E，DF⊥AC于点F，过点A作AG⊥BC于点G，

∵ AD是∠BAC的角平分线，且DE⊥AB，DF⊥AC，∴_____。

$$\because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DE}{\frac{1}{2} AC \times DF} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AG}{\frac{1}{2} CD \times AG} = \frac{BD}{CD}, \quad \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC};$$

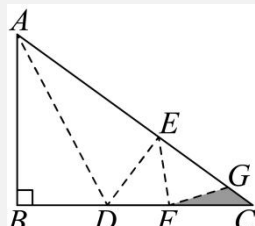
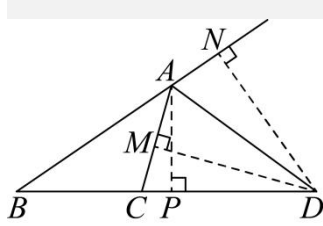
(2) 【类比探究】如图2所示，若AD是∠BAC的外角平分线，AD与BC的延长线交于点D。求证：

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC};$$

【答案】(1) DE = DF (2) 见解析

【详解】(1) 解：∵ AD是∠BAC的角平分线，且DE⊥AB，DF⊥AC，∴ DE = DF，故答案为：DE = DF；

(2) 证明：过点D作DN⊥AB于N，DM⊥AC于M。过点A作AP⊥BD于点P。



∵ AD是∠NAC的角平分线，∴ DM = DN。

$$\because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DN}{\frac{1}{2} AC \times DM} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AP}{\frac{1}{2} CD \times AP} = \frac{BD}{CD}, \quad \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD};$$

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872