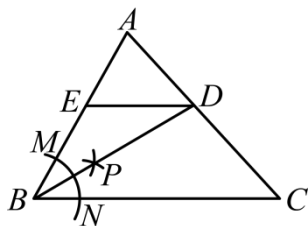


等腰三角形常见模型 答案与解析

平行+平分现等腰模型

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以顶点 B 为圆心，适当长为半径画弧，交 BA 于点 M ，交 BC 于点 N ，再分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle ABC$ 内部交于一点 P ，过点 P 作射线 BP 交 AC 于点 D ，过点 D 作 $DE \parallel BC$ ，交 AB 于点 E 。若 $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle BDC = 95^\circ$ ，则 $\angle AED$ 的度数为（ ）



- A. 85° B. 75° C. 60° D. 55°

【答案】C

【详解】由题意可得 BP 为 $\angle ABC$ 的角平分线， $DE \parallel BC$ ，

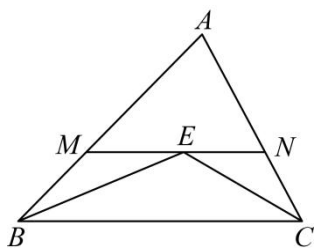
$$\therefore \angle ABD = \angle CBD, \angle AED = \angle ABC, \angle EDB = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle EDB, \therefore \angle AED = \angle ABC = 2\angle EDB,$$

$$\because \angle A = 65^\circ, \angle BDC = 95^\circ, \text{ 则 } \angle ABD = \angle BDC - \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle EDB = 30^\circ, \therefore \angle AED = \angle ABC = 2\angle EDB = 60^\circ, \text{ 故选: C.}$$

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 E ，过点 E 作 $MN \parallel BC$ 交 AB 于 M ，交 AC 于 N ，若 $BM = 4$ ， $CN = 3$ ，则线段 MN 的长为（ ）



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【答案】B

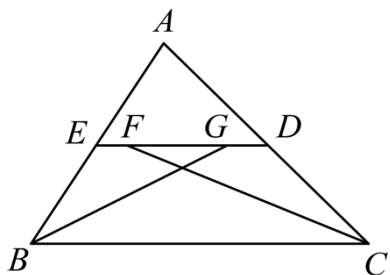
【详解】解： $\because \angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 E ， $\therefore \angle MBE = \angle EBC$ ， $\angle ECN = \angle ECB$ ，

$$\because MN \parallel BC, \therefore \angle EBC = \angle MEB, \angle NEC = \angle ECB,$$

$$\therefore \angle MBE = \angle MEB, \angle NEC = \angle ECN, \therefore BM = ME = 4, EN = CN = 3,$$

$$\because MN = ME + EN, \therefore MN = BM + CN = 7. \text{ 故选 B.}$$

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线分别交 ED 于点 G ， F ，若 $FG = 4$ ， $ED = 9$ ，则 $BE + DC$ 的值为（ ）



A. 13

B. 14

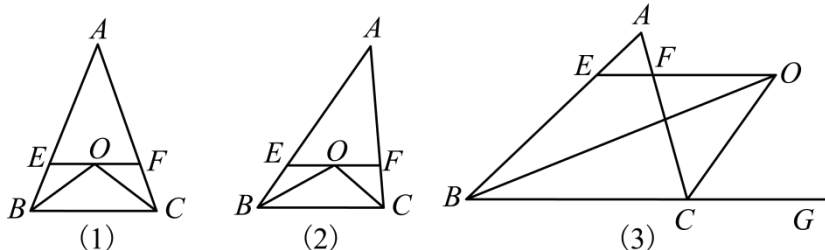
C. 15

D. 16

【答案】A

【详解】解：BG 平分 $\angle ABC$ ， $\therefore \angle ABG = \angle GBC$ ， $\because DE \parallel BC$ ， $\therefore \angle EGB = \angle GBC$ ， $\therefore \angle EGB = \angle ABG$ ， $\therefore BE = EG$ ，同理可得： $DF = DC$ ， $\therefore BE + DC = EG + DF = EF + FG + GD + FG = ED + FG = 9 + 4 = 13$ ，故选：A.

4. 已知如图 (1)， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle B$ 、 $\angle C$ 的平分线相交于点 O ，过点 O 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 、 AC 于 E 、 F 。

(1) EF 与 BE 、 CF 间有怎样的关系？写出你的猜想。（不用证明）

- (2) 若 $AB \neq AC$ ，第①问中 EF 与 BE 、 CF 间的关系还存在吗？若不存在，请说明理由，若存在，请写出证明过程。(3) 若 $\triangle ABC$ 中， $AB \neq AC$ ， $\angle B$ 的平分线与三角形外角 $\angle ACG$ 的平分线 CO 交于 O ，过 O 点作 $OE \parallel BC$ 交 AB 于 E ，交 AC 于 F 。如图 (3)， EF 与 BE 、 CF 间的关系如何？为什么？

【答案】(1) $EF = BE + FC$ (2) 仍然成立，理由见解析 (3) $EF = BE - FC$ ，理由见解析【详解】(1) 解： $EF = BE + FC$ ，理由如下： $\because BO$ 、 CO 平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ ， $\therefore \angle ABO = \angle OBC$ ， $\angle ACO = \angle OCB$ ， $\because EF \parallel BC$ ， $\therefore \angle EOB = \angle OBC$ ， $\angle FOC = \angle OCB$ ， $\therefore \angle EOB = \angle EBO$ ， $\angle FOC = \angle FCO$ ， $\therefore EO = EB$ ， $FO = FC$ ， $\therefore EF = EO + OF$ ， $\therefore EF = BE + FC$ ；(2) 解：当 $AB \neq AC$ 时， $EF = BE + CF$ 仍然成立，理由如下： $\because BO$ 、 CO 平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ ， $\therefore \angle ABO = \angle OBC$ ， $\angle ACO = \angle OCB$ ， $\because EF \parallel BC$ ， $\therefore \angle EOB = \angle OBC$ ， $\angle FOC = \angle OCB$ ，

$\therefore \angle EOB = \angle EBO$, $\angle FOC = \angle FCO$, $\therefore EO = EB$, $FO = FC$, $\therefore EF = EO + OF$, $\therefore EF = BE + FC$;

(3) 解: $EF = BE - FC$, 理由如下:

$\because BO, CO$ 平分 $\angle ABC, \angle ACG$, $\therefore \angle ABO = \angle OBC$, $\angle ACO = \angle OCG$,

$\because OE \parallel BC$, $\therefore \angle EOB = \angle OBC$, $\angle FOC = \angle OCG$,

$\therefore \angle EOB = \angle EBO$, $\angle FOC = \angle FCO$, $\therefore EO = EB$, $FO = FC$, $\therefore EF = EO - OF$, $\therefore EF = BE - FC$.

5. (1) 如图 1, $AE \parallel BC$, AE 平分 $\angle DAC$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是_三角形;

(2) 如图 2, BC 平分 $\angle ABD$, $AC \parallel BD$, $AC = 3$, 则 $AB =$ _.

(3) 如图 3, 有 $\triangle ABC$ 中, BE 是角平分线, $DE \parallel BC$ 交 AB 于点 D . 若 $DE = 7, AD = 5$, 则 $AB =$ _.

(4) 如图 4, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 F , 过点 F 作 $DE \parallel BC$, 分别交 AB, AC 于点 D, E . 若 $AB = 12, AC = 18, BC = 24$, 则 $\triangle ADE$ 的周长为_.

(5) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 5 \text{ cm}$, BP, CP 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线, 且 $PD \parallel AB$, $PE \parallel AC$ 则 $\triangle PDE$ 的周长是_.

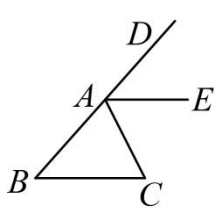


图 1

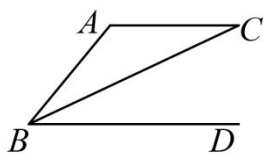


图 2



图 3

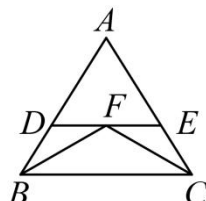


图 4

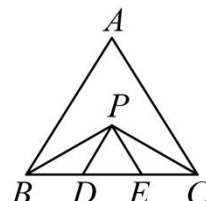


图 5

【答案】(1) 等腰; (2) 3; (3) 12; (4) 30; (5) 5cm

【详解】解: (1) $\because AE \parallel BC$, $\therefore \angle DAE = \angle B, \angle CAE = \angle C$,

$\because AE$ 平分 $\angle DAC$, $\therefore \angle DAE = \angle CAE$, $\therefore \angle B = \angle C$, $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形; 故答案为: 等腰;

(2) $\because BC$ 平分 $\angle ABD$, $AC \parallel BD$, $\therefore \angle ABC = \angle DBC, \angle ACB = \angle DBC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$, $\therefore AB = AC = 3$; 故答案为: 3;

(3) 同法 (2) 可得: $BD = DE = 7$, $\therefore AB = AD + BD = 5 + 7 = 12$; 故答案为: 12;

(4) 同法 (2) 可得: $FD = BD, CE = EF$,

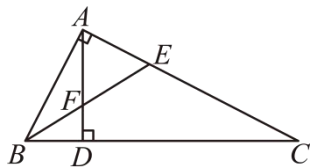
$\therefore \triangle ADE$ 的周长 $= AD + AE + DE = AD + AE + DF + EF = AD + AE + BD + CE = AB + AC = 30$; 故答案为: 30;

(5) 同法 (2) 可得: $PD = BD, PE = CE$,

$\therefore \triangle PDE$ 的周长 $= PD + PE + DE = BD + CE + DE = BC = 5 \text{ cm}$; 故答案为: 5cm.

平分+射影现等腰模型

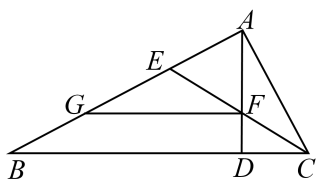
6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D , $\angle ABC$ 的平分线 BE 交 AD 于 F , 交 AC 于 E , 若 $AE = 3$, $DF = 2$, 则 $AD =$ _____.



【答案】5

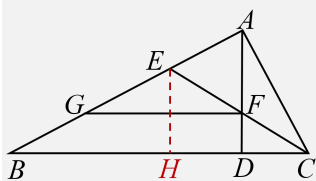
【详解】 $\because \angle BAC = 90^\circ$, $\therefore \angle AEB + \angle ABE = 90^\circ$,
 $\because AD \perp BC$, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore \angle FBD + \angle BFD = 90^\circ$,
 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABE = \angle CBE$, $\therefore \angle AEF = \angle BFD$,
 $\because \angle AFE = \angle BFD$, $\therefore \angle AEF = \angle AFE$, $\therefore AF = AE = 3$,
 $\because DF = 2$, $\therefore AD = AF + DF = 3 + 2 = 5$. 故答案为: 5.

7. 如图, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$ 于 D , $\angle BCA$ 的角平分线交 AD 于 F , 交 AB 于 E , $FG \parallel BC$ 交 AB 于 G . $AE = 4\text{cm}$, $AB = 12\text{cm}$, 则 $BG =$ _____, $GE =$ _____.



【答案】4cm;

【详解】过 E 作 EH 垂直 BC 交 BC 于 H 点, 易证 $\triangle AEC \cong \triangle EHC$;

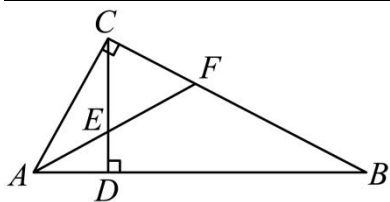


由角度分析易知 $\angle AEF = \angle AFE$, 即 $AE = AF$, 则有 $EH = EA = AF$;

又可证 $\triangle AGF \cong \triangle BHE$, 则 $AG = EB = 12 - 4 = 8$, 则 $BG = 8 - 4 = 4$, $GE = 4$.

【点睛】这道题主要讲解角平分线加射影模型必出等腰三角形的模型.

8. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , AF 平分 $\angle CAB$, 交 CD 于点 E , 交 CB 于点 F , 则下列结论成立的是 ()

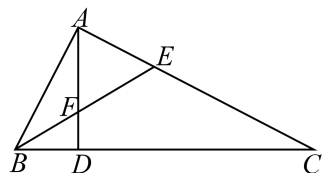


- A. $EC=EF$ B. $FE=FC$ C. $CE=CF$ D. $CE=CF=EF$

【答案】C

【详解】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD\perp AB$ ， $\therefore \angle CDB=\angle ACB=90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACD+\angle BCD=90^\circ$ ， $\angle BCD+\angle B=90^\circ$ ， $\therefore \angle ACD=\angle B$ ，
 $\because AF$ 平分 $\angle CAB$ ， $\therefore \angle CAE=\angle BAF$ ， $\therefore \angle ACD+\angle CAE=\angle B+\angle BAF$ ，
 $\therefore \angle CEF=\angle CFE$ ， $\therefore CE=CF$ 。故选 C。

9.如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AD\perp BC$ 于点 D ， $\angle ABC$ 的平分线 BE 交 AD 于 F ，交 AC 于 E ，若 $AE=3$ ， $DF=2$ ，则 $AD=$ _____。

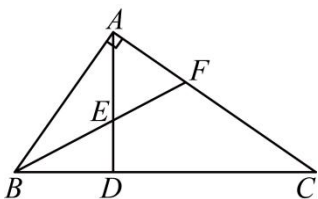


【答案】5

【详解】由角度分析易知 $\angle AEF=\angle AFE$ ，即 $AE=AF$ ，
 $\because AE=3 \therefore AF=3 \quad \because DF=2 \therefore AD=AF+DF=5$

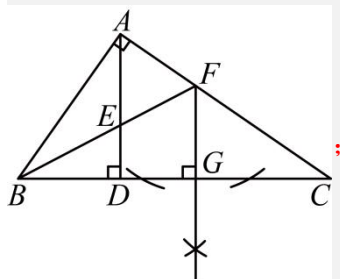
【点睛】这道题主要讲解角平分线加射影模型必出等腰三角形的模型。

10.如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，点 D 在 BC 边上，连接 AD ， $\angle ABC$ 的平分线分别交 AD ， AC 于点 E ， F 。(1)尺规作图：求作 $\triangle BCF$ 的高线 FG ；(要求：保留作图痕迹，标明字母，不写作法；如果完成有困难，可画出草图后解答(2)题)；(2)若 $AD\perp BC$ ，求证： $AE=FG$ 。



【答案】(1)见解析(2)见解析

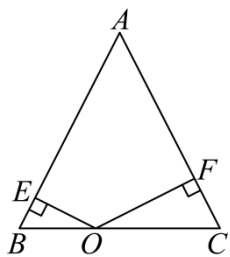
【详解】(1)解：如图，线段 FG 即为所求：



(2) 证明: $\because AD \perp BC$, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $\angle BED + \angle CBF = 90^\circ$,
 $\because \angle BAC = 90^\circ$, $\therefore \angle AFB + \angle ABF = 90^\circ$, $\because BF$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABF = \angle CBF$, $\therefore \angle BED = \angle AFB$,
 $\because \angle BED = \angle AEF$, $\therefore \angle AEF = \angle AFB$, $\therefore AE = AF$, 由 (1) 知 FG 是 $\triangle BCF$ 的高, 即 $FG \perp BC$,
 $\because \angle BAC = 90^\circ$, $\therefore AF \perp AB$, $\because BF$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore AF = FG$, $\therefore AE = FG$.

等腰三角形中的维维尼亚模型

11. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 点 O 是底边 BC 上任意一点, OE 、 OF 分别与两边垂直, 等腰三角形的腰长为 8, 面积为 20, 则 $OE + OF$ 的值为 ()



A. 5

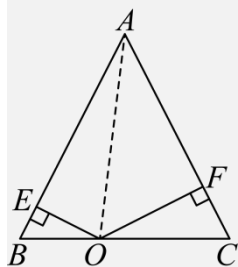
B. 7.5

C. 9

D. 10

【答案】A

【详解】解: 连接 AO , 如图,



$\because OE$ 、 OF 分别与两边垂直, $\triangle ABC$ 面积为 20,

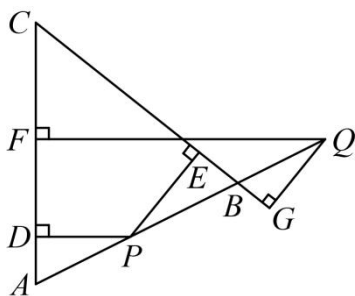
$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot OE + \frac{1}{2} AC \cdot OF = 20,$$

$$\because AB = AC = 8, \therefore \frac{1}{2} \times 8 \times OE + \frac{1}{2} \times 8 \times OF = 20, \therefore OE + OF = 5, \text{ 故选: A.}$$

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, 点 P 是边 AB 上任意一点, 点 Q 是 AB 延长线上任意一点, 过点 P 分别

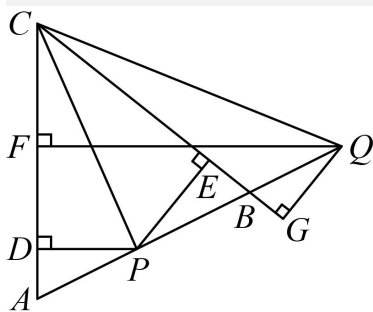
作 $PD \perp AC$ 于点 D , $PE \perp BC$ 于点 E , 过点 Q 分别作 $QF \perp AC$ 于点 F , $QG \perp BC$ 于点 G , 则

$PD + PE + QG$ _____ FQ . (填“>”“<”或“=”)



【答案】 =

【详解】解：连接 CP 、 CQ ，如图所示：

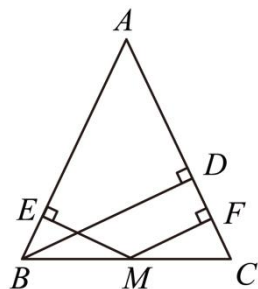


$\because S_{\triangle ACP} + S_{\triangle BCP} = S_{\triangle ACQ} - S_{\triangle BCQ}$ ，且 $PD \perp AC$ ， $PE \perp BC$ ， $QF \perp AC$ ， $QG \perp BC$ ，

$\therefore AC \cdot PD + BC \cdot PE = AC \cdot FQ - BC \cdot QG$ ， $\because AC = BC$ ，

$\therefore PD + PE = FQ - QG$ ， $\therefore PD + PE + QG = FQ$ 。故答案为：=。

13. (1) 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，其一腰上的高为 h ， M 是底边 BC 上的任意一点， M 到腰 AB ， AC 的距离分别为 h_1 ， h_2 ，证明： $h_1 + h_2 = h$ 。



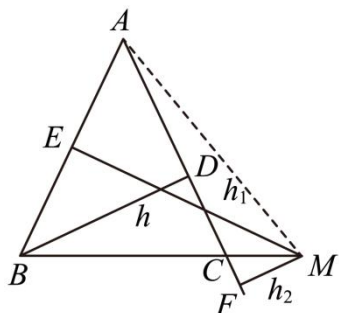
证明：连接 AM ， $\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMC}$ ， $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times AB \times ME = \frac{1}{2} \times AB \times h_1$ ，

$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \times AC \times MF = \frac{1}{2} \times AC \times h_2$ ，

又 $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times AC \times h$ ， $\therefore \frac{1}{2} \times AC \times h = \frac{1}{2} \times AB \times h_1 + \frac{1}{2} \times AC \times h_2$ ， $\because AB = AC$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times AC \times h = \frac{1}{2} \times AC \times (h_1 + h_2)$ ， $\therefore h_1 + h_2 = h$

(2) 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 其一腰上的高为 h , 且 M 在 BC 延长线上, M 到腰 AB , AC 的距离分别为 h_1 , h_2 . h_1 , h_2 , h 之间有什么样的结论? 依据所画图形, 证明你的结论.



【答案】 $h_1 - h_2 = h$, 见解析

【详解】解: $h_1 - h_2 = h$, 理由如下: $\because S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot h_1 = \frac{1}{2} AC \cdot h_2 + \frac{1}{2} AC \cdot h$,

又 $\because AB = AC$, $\therefore \frac{1}{2} \times AC \cdot h_1 = \frac{1}{2} \times AC \times (h + h_2)$, $\therefore h_1 = h_2 + h$, $\therefore h_1 - h_2 = h$.

14. 数学课上, 老师画出一等腰 $\triangle ABC$ 并标注: $AB = AC = 10$, $\angle A = 30^\circ$, 然后让同学们提出有效问题并解决请你结合同学们提出的问题给予解答.

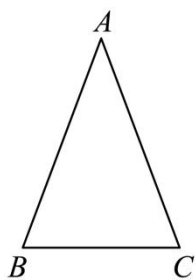


图1

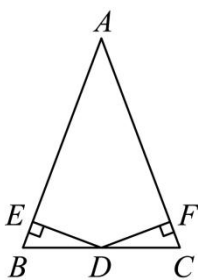


图2

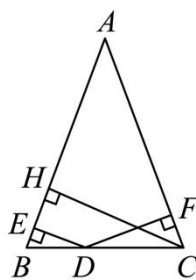


图3

(1) 甲同学提出: $\angle B = \angle C =$ _____ 度; (2) 乙同学提出: $\triangle ABC$ 的面积为: _____;

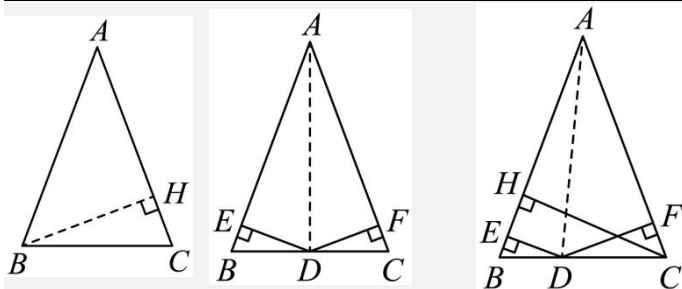
(3) 丙同学提出: 点 D 为边 BC 的中点, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足为 E 、 F , 请求出 $DE + DF$ 的值;

(4) 丁同学说受丙同学启发, 点 D 为边 BC 上任一点, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $CH \perp AB$, 垂足为 E 、 F 、 H , 则有 $DE + DF = CH$. 请你为丁同学说明理由.

【答案】 (1) 75° (2) 25 (3) 5 (4) 见解析

【详解】(1) 解: $\because AB = AC = 10$, $\angle A = 30^\circ$, $\therefore \angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 75^\circ$;

(2) 解: 过点 B 作 $BH \perp AC$, 交 AC 于点 H , 则: $\angle BHA = 90^\circ$,



$\because AB = AC = 10$, $\angle A = 30^\circ$, $\therefore BH = \frac{1}{2}AB = 5$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$;

(3) 解: 连接 AD , 如图所示: $\because AB = AC$, 点 D 为边 BC 的中点, $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\because DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $\therefore DE = DF$ (角平分线的性质);

$\because AB = AC = 10$, $\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DE$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot DF$,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2}AC(DE + DF) = 5(DE + DF)$$

由 (2) 知 $S_{\triangle ABC} = 25$, $\therefore 5(DE + DF) = 25$, $\therefore DE + DF = 5$;

(4) 证明: 连接 AD , 如图所示:

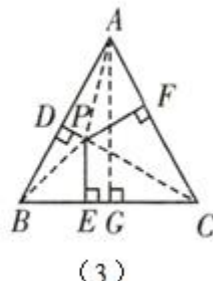
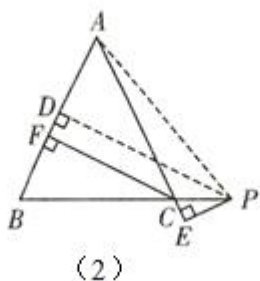
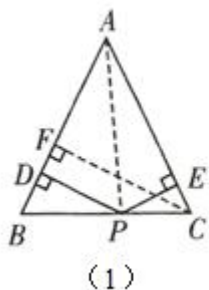
$\because DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $CH \perp AB$, $\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DE$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot DF$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$,

$\because S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}$, $AB = AC$, $\therefore \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2}AB \cdot CH$,

即: $AB \cdot (DE + DF) = AB \cdot CH$, $\therefore DE + DF = CH$.

15. (1) 如图 (1), 已知在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, 点 P 是底边 BC 上的一点, $PD \perp AB$, 垂足为点 D , $PE \perp AC$, 垂足为点 E . 求证: $PD + PE$ 为定长.

(2) 如图 (2), 已知在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, 点 P 是底边 BC 的延长线上的一点, $PD \perp AB$, 垂足为点 D , $PE \perp AC$, 垂足为点 E . 求证: $PD - PE$ 为定长. (3) 如图 (3), 已知: 点 P 为等边三角形 ABC 内任意一点, 过 P 分别作三边的垂线, 分别交三边与 D 、 E 、 F . 求证: $PD + PE + PF$ 为定长.



【答案】证明见解析

【详解】(1) 过点 C 作 $CF \perp AB$, 垂足为点 F ; 连接 AP .

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP}, \therefore \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot PE.$$

又 $\because AB = AC$, $\therefore PD + PE = CF$, 为定长. 即等腰三角形底边上的任意一点, 到两腰的距离之和等于定长.

(2) 过点 C 作 $CF \perp AB$, 垂足为点 F ; 连接 AP .

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ACP}, \therefore \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD - \frac{1}{2} \cdot AC \cdot PE.$$

又 $\because AB = AC$, $\therefore PD - PE = CF$, 为定长.

即等腰三角形底边的延长线上的任意一点, 到两腰的距高之差等于定长.

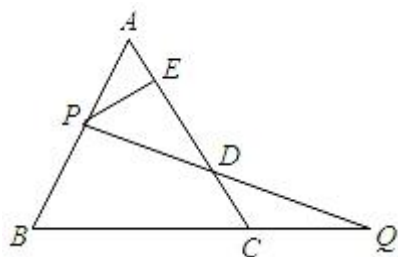
$$(3) \because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCP} + S_{\triangle CAP} + S_{\triangle ABP}, \therefore \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PE + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot PF.$$

又 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore AB = BC = CA$. $\therefore PA + PB + PC = AG$, 为定长.

即等边三角形内一点到三边距离之和为定长.

等腰三角形中的重要模型-帽子模型（长短手模型）

16. 如图, 过边长为 6 的等边 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点 P , 作 $PE \perp AC$ 于 E , Q 为 BC 延长线上一点, 连 PQ 交 AC 边于 D , 当 $PA = CQ$ 时, DE 的长为 ()



A. 1

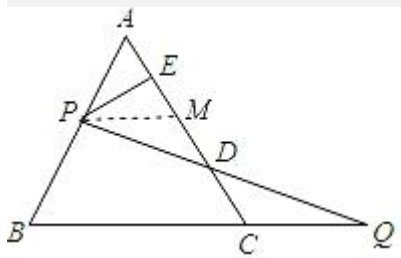
B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【详解】解: 过 P 作 $PM \parallel BC$, 交 AC 于 M ,



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, 且 $PM \parallel BC$, $\therefore \triangle APM$ 是等边三角形;

又 $\because PE \perp AM$, $\therefore AE = EM = \frac{1}{2} AM$; (等边三角形三线合一)

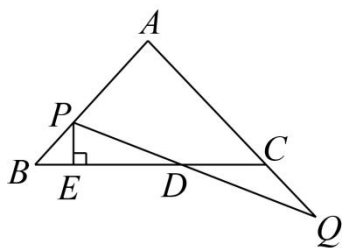
$\because PM \parallel CQ, \therefore \angle PMD = \angle QCD, \angle MPD = \angle Q;$

又 $\because PA = PM = CQ$, 在 $\triangle PMD$ 和 $\triangle QCD$ 中,
$$\begin{cases} \angle PDM = \angle QDC \\ \angle PMD = \angle QCD, \therefore \triangle PMD \cong \triangle QCD (AAS); \therefore CD = DM = \\ PM = QC \end{cases}$$

$\frac{1}{2} CM;$

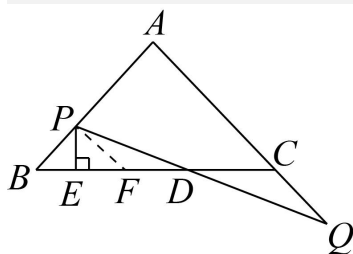
$\therefore DE = DM + ME = \frac{1}{2} (AM + MC) = \frac{1}{2} AC = 3$. 故选: C.

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 P 从点 B 出发沿线段 BA 移动(点 P 不与 A, B 重合), 同时, 点 Q 从点 C 出发沿线段 AC 的延长线移动, 已知点 P, Q 移动的速度相同, PQ 与直线 BC 相交于点 D . (1)求证: $PD = QD$; (2)过点 P 作直线 BC 的垂线, 垂足为 E , P, Q 在移动过程中, 线段 BE, DE, CD 中是否存在长度保持不变的线段? 请说明理由.



【答案】(1)见详解(2) DE 的长度保持不变, 理由见详解

【详解】(1)证明: 过点 P 作 $PF \parallel AC$ 交 BC 于 F , 如下图,



$\because$ 点 P, Q 同时出发, 且移动的速度相同, $\therefore BP = CQ$,

$\because PF \parallel AC, \therefore \angle PFB = \angle ACB, \angle DPF = \angle Q$,

$\because AB = AC, \therefore \angle B = \angle ACB, \therefore \angle B = \angle PFB, \therefore BP = PF, \therefore PF = CQ$,

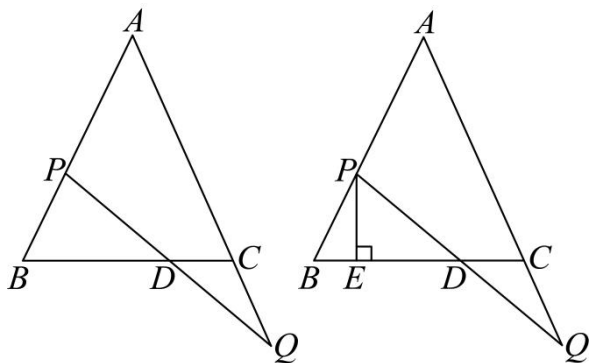
在 $\triangle PFD$ 和 $\triangle QCD$ 中,
$$\begin{cases} \angle PDF = \angle QDC \\ PF = CQ \\ \angle DPF = \angle Q \end{cases}, \therefore \triangle PFD \cong \triangle QCD (ASA), \therefore PD = QD;$$

(2)解: DE 的长度保持不变, 理由如下: 由(1)可知, $BP = PF$,

$\because PE \perp BF, \therefore BE = EF$, 由(1)可知, $\triangle PFD \cong \triangle QCD$,

$\therefore FD = DC, \therefore DE = EF + DF = BE + DC = \frac{1}{2} BC$, $\therefore DE$ 为定值.

18. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=10$, 点 P 从点 B 出发沿线段 BA 移动到点 A 停止, 同时点 Q 从点 C 出发沿 AC 的延长线移动, 并与点 P 同时停止. 已知点 P, Q 移动的速度相同, 连接 PQ 与线段 BC 相交于点 D (不考虑点 P 与点 A, B 重合时的情况).



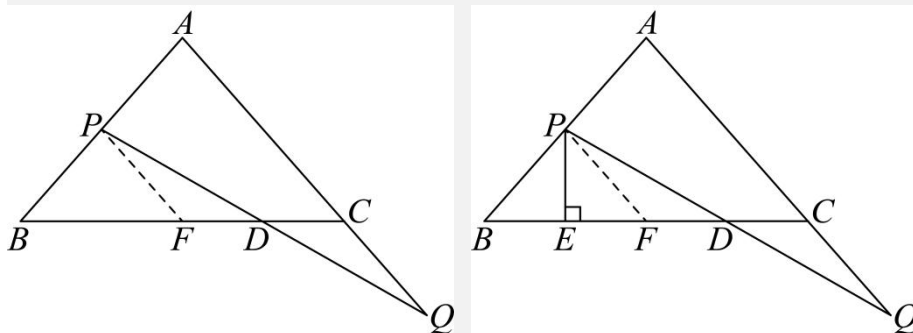
(1) 求证: $AP+AQ=2AB$; (2) 求证: $PD=DQ$; (3) 如图, 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E , 在点 P, Q 移动的过程中, 线段 DE 的长度是否变化? 如果不变, 请求出这个长度; 如果变化, 请说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析 (3) ED 为定值 5, 理由见解析

【详解】(1) 证明: $\because P, Q$ 的移动速度相同, $\therefore CQ=PB$,

$\because AB=AC$, $\therefore AP+AQ=AB-PB+AC+CQ=2AB$;

(2) 如图, 过点 P 作 $PF \parallel AC$, 交 BC 于点 F ,



$\because PF \parallel AC$, $\therefore \angle PFB = \angle ACB, \angle DPF = \angle DQC$,

$\because AB=AC$, $\therefore \angle B = \angle ACB$, $\therefore \angle B = \angle PFB$, $\therefore BP=PF$, 由 (1) 得 $BP=CQ$, $\therefore PF=CQ$,

在 $\triangle PFD$ 与 $\triangle QCD$ 中,
$$\begin{cases} \angle PDF = \angle QDC \\ \angle DPF = \angle DQC, \therefore \triangle PFD \cong \triangle QCD (\text{AAS}), \therefore PD=DQ; \\ PF=CQ \end{cases}$$

(3) 解: ED 为定值 5, 理由如下: 如图, 过点 P 作 $PF \parallel AC$, 交 BC 于点 F ,

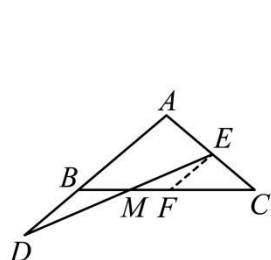
由 (2) 得: $BP=PF$, $\therefore \triangle PBF$ 为等腰三角形,

$\because PE \perp BC$, $\therefore BE=EF$, 由 (2) 得 $\triangle PFD \cong \triangle QCD$, $\therefore FD=CD$,

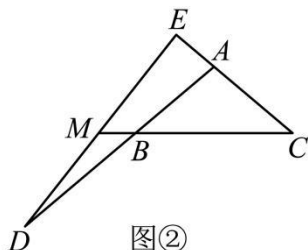
$\therefore ED = EF + FD = \frac{1}{2}BF + \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}(BF + CF) = \frac{1}{2}BC = 5$, $\therefore ED$ 为定值 5.

19. 综合与探究

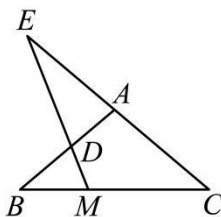
问题情境：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，在射线 AB 上截取线段 BD ，在射线 CA 上截取线段 CE ，连结 DE ， DE 所在直线交直线 BC 于点 M 。



图①



图②



图③

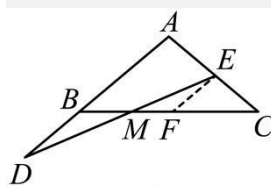
猜想判断：（1）当点 D 在边 AB 的延长线上，点 E 在边 AC 上时，过点 E 作 $EF \parallel AB$ 交 BC 于点 F ，如图

①. 若 $BD = CE$ ，则线段 DM 、 EM 的大小关系为_____。

深入探究：（2）当点 D 在边 AB 的延长线上，点 E 在边 CA 的延长线上时，如图②. 若 $BD = CE$ ，判断线段 DM 、 EM 的大小关系，并加以证明。

【答案】（1） $DM = EM$ ；（2） $DM = EM$ ，理由见解析；（3） $EM = 2.8$

【详解】（1）解： $DM = EM$ ，理由如下：过点 E 作 $EF \parallel AB$ 交 BC 于点 F ，



图①

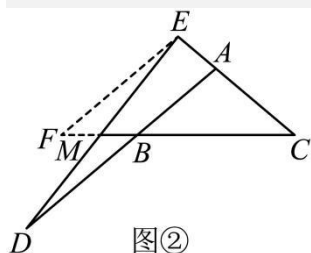
$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C, \because EF \parallel AB, \therefore \angle EFC = \angle ABC, \therefore \angle EFC = \angle C, \therefore EF = CE$

$\because BD = CE \therefore BD = EF, \because EF \parallel AB, \therefore \angle MEF = \angle D,$

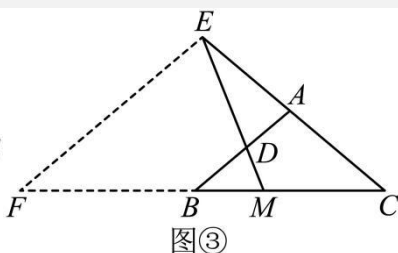
在 $\triangle BDM$ 和 $\triangle FEM$ 中，
$$\begin{cases} \angle D = \angle MEF \\ \angle BMD = \angle FME, \therefore \triangle BDM \cong \triangle FEM (AAS), \therefore DM = EM; \\ BD = EF \end{cases}$$

（2）解： $DM = EM$

理由如下：如图，过点 E 作 $EF \parallel AB$ 交 CB 的延长线于点 F ，



图②



图③

$\because EF \parallel AB, \therefore \angle EFC = \angle ABC, \angle EFM = \angle DBM,$

$\because AB = AC \therefore \angle ABC = \angle C \therefore \angle EFC = \angle C \therefore EF = CE \therefore BD = CE \therefore BD = EF$

在 $\triangle BDM$ 和 $\triangle FEM$ 中, $\begin{cases} \angle EFM = \angle DBM \\ \angle BMD = \angle FME, \therefore \triangle BDM \cong \triangle FEM (AAS), \therefore DM = EM; \\ BD = EF \end{cases}$

20. 【问题初探】(1) 数学课上, 李老师出示了这样一个问题: 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 F 是 AC 上一点, 点 E 是 AB 延长线上的一点, 连接 EF , 交 BC 于点 D , 若 $ED = DF$, 求证: $BE = CF$.

①如图 2, 小乐同学从中点的角度, 给出了如下解题思路: 在线段 DC 上截取 DM , 使 $DM = BD$, 连接 FM , 利用两个三角形全等和已知条件, 得出结论;

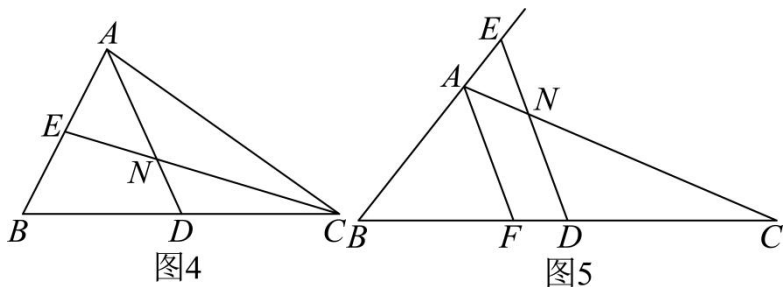
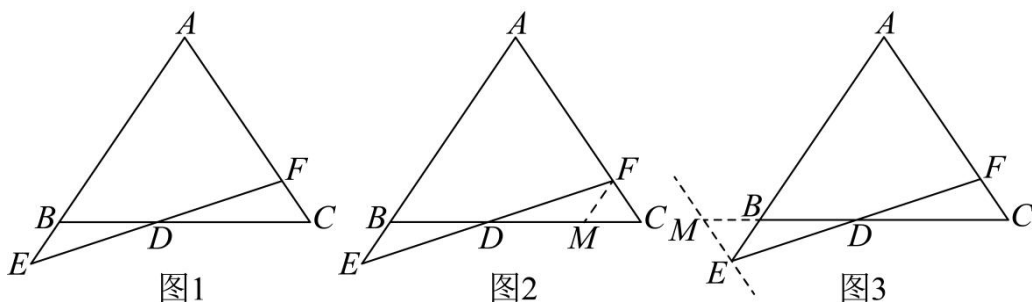
②如图 3, 小亮同学从平行线的角度给出了另一种解题思路: 过点 E 作 $EM \parallel AC$ 交 CB 的延长线于点 M , 利用两个三角形全等和已知条件, 得出了结论;

请你选择一位同学的解题思路, 写出证明过程;

【类比分析】(2) 李老师发现两位同学的做法非常巧妙, 为了让同学们更好的理解这种转化的思想方法, 李老师提出了新的问题, 请你解答,

如图 4, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 E 在线段 AB 上, D 是 BC 的中点, 连接 CE , AD , CE 与 AD 相交于点 N , 若 $\angle EAD + \angle ANC = 180^\circ$, 求证: $AB = CN$;

【学以致用】(3) 如图 5, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, AF 平分 $\angle BAC$, 点 E 在线段 BA 的延长线上运动, 过点 E 作 $ED \parallel AF$, 交 AC 于点 N , 交 BC 于点 D , 且 $BD = CD$, 请直接写出线段 AE , CN 和 BC 之间的数量关系.

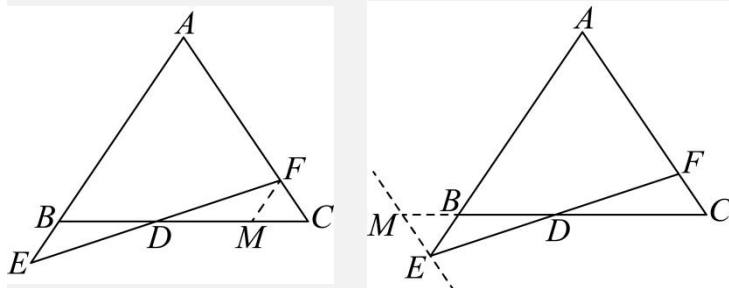


【答案】(1) ①选择小乐同学的做法: 证明见解析; ②选择小亮同学的做法: 证明见解析; (2) 证明见解析; (3) $CN - AE = \frac{1}{2}BC$

【详解】(1) 证明: $\because ED = DF, DM = BD, \angle BDE = \angle MDF,$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle MDF (SAS), \therefore FM = BE, \angle E = \angle DFM, \therefore FM \parallel BE, \therefore \angle ABC = \angle FMC,$

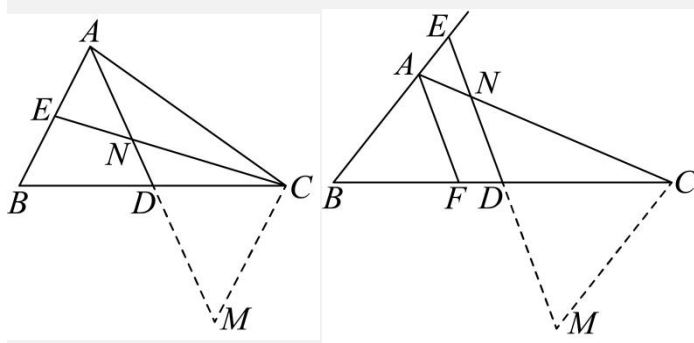
$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C, \therefore \angle FMC = \angle C, \therefore FM = FC, \therefore BE = CF;$



② $\because EM \parallel AC, \therefore \angle EMB = \angle C, \because DE = DF, \angle MDE = \angle CDF, \therefore \triangle MDE \cong \triangle CDF (AAS), \therefore CF = EM,$

$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C, \because \angle MBE = \angle ABC, \therefore \angle EMB = \angle MBE, \therefore BE = ME, \therefore BE = CF;$

(2) 延长 AD, 取 $DM = AD$, 连接 CM, 如图所示:



$\because D$ 是 BC 的中点, $\therefore BD = CD, \because \angle ADB = \angle CDM, \therefore \triangle ADB \cong \triangle CDM (SAS), \therefore AB = CM,$

$\angle M = \angle BAD,$

$\because \angle EAD + \angle ANC = 180^\circ, \angle ANC + \angle CNM = 180^\circ, \therefore \angle CNM = \angle EAD,$

$\therefore \angle CNM = \angle M, \therefore CM = CN, \therefore AB = CN;$

(3) 延长 ED, 使 $DM = ED$, 连接 CM, 如图所示:

$\because BD = CD, \angle CDM = \angle BDE, \therefore \triangle CDM \cong \triangle BDE (SAS),$

$\therefore CM = BE, \angle M = \angle BED, \therefore CM \parallel BE, \therefore \angle ACM = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ,$

$\because AF$ 平分 $\angle BAC, \therefore \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ,$

$\because ED \parallel AF, \therefore \angle CNM = \angle CAF = 45^\circ, \therefore \angle M = 180^\circ - \angle CNM - \angle ACM = 45^\circ,$

$\therefore \angle CNM = \angle M, \therefore CN = CM, \therefore CN = BE,$

$\because \angle ACB = 30^\circ, \angle BAC = 90^\circ, \therefore AB = \frac{1}{2} BC,$

$$\because BE - AE = AB = \frac{1}{2}BC, \therefore CN - AE = \frac{1}{2}BC.$$

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872