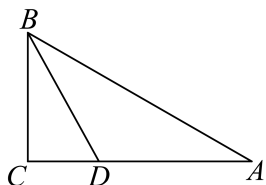


垂直平分线、角平分线的性质与判定

答案与解析

【考试题型 1】利用角平分线的性质求线段长度

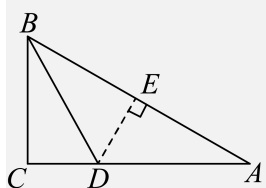
1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，若 $AC = 12$ ， $AD = 8$ ，求点 D 到 AB 的距离。



【答案】4

【分析】此题考查角平分线的性质定理，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，得到 $DE = CD$ ，熟练掌握角平分线上的点到角两边的距离相等是解题的关键。

【详解】过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，



$\because \angle C = 90^\circ$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，

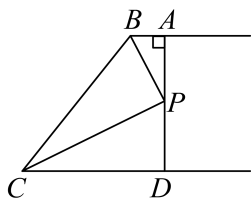
$\therefore DE = CD$ ，

$\because AC = 12$ ， $AD = 8$ ，

$\therefore DE = CD = 12 - 8 = 4$ ，

$\therefore$ 点 D 到 AB 的距离为 4。

2. 如图， $AB \parallel CD$ ， BP 和 CP 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle DCB$ ， AD 过点 P ，且与 AB 垂直。



(1) 求 $\angle BPC$ 的度数。

(2) 若 $AD = 8$ ，求点 P 到 BC 的距离。

【答案】(1) $\angle BPC = 90^\circ$

(2) $PE = 4$

【分析】本题考查平行线的性质，角平分线的定义和角平分线的性质，掌握角平分线的性质是解题的关键。

(1) 先根据平行线的性质得到 $\angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$ ，然后根据角平分线的定义得到

$\angle CBP + \angle BCP = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle DCB = 90^\circ$ ，再根据三角形的内角和解题即可；

(2) 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于 E ，根据角平分线的性质得到 $PE = PA = PD$ ，然后计算解题即可。

【详解】(1) 解： $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ,$$

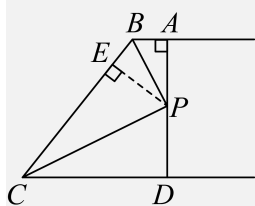
又 $\because BP$ 和 CP 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle DCB$,

$$\therefore \angle CBP = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle BCP = \frac{1}{2}\angle DCB,$$

$$\therefore \angle CBP + \angle BCP = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle DCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle DCB) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = 180^\circ - (\angle CBP + \angle BCP) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ;$$

(2) 解：过点 P 作 $PE \perp BC$ 于 E ,



$$\because PA \perp AB,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle CDA = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore PD \perp CD,$$

$\therefore BP$ 和 CP 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle DCB$,

$\therefore PA = PE, PD = PE,$

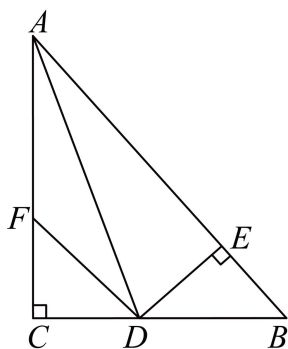
$\therefore PE = PA = PD,$

$\therefore PA + PD = AD = 8,$

$\therefore PA = PD = 4,$

$\therefore PE = 4.$

3. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于点 D , $DE \perp AB$ 于 E , 点 F 在 AC 上, 且
 $DF = BD$.



- (1) 求证: $BE = CF$;
(2) 若 $AF = 8$, $BE = 3$, 求 AB 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 14

【分析】本题考查了角平分线的性质、全等三角形的判定与性质等知识, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键.

(1) 先由角平分线的性质得出 $DC = DE$, 再由HL证 $\text{Rt}\triangle DCF \cong \text{Rt}\triangle DEB$ 即可得出结论;

(2) 先由HL证 $\text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle ADE$, 得出 $AC = AE$, 结合(1)中 $CF = BE$ 进而得出 $AB = AF + 2BE$, 即可求解.

【详解】(1) 证明: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle C = 90^\circ$, $DE \perp AB$,

$\therefore DC = DE$, $\angle DEB = 90^\circ$,

在 $\text{Rt} \triangle DCF$ 和 $\text{Rt} \triangle DEB$ 中,

$$\begin{cases} DF = BD \\ DC = DE \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt} \triangle DCF \cong \text{Rt} \triangle DEB (\text{HL}),$

$\therefore BE = CF;$

(2) 解: 在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 与 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ DC = DE \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt} \triangle ADC \cong \text{Rt} \triangle ADE (\text{HL}),$

$\therefore AC = AE,$

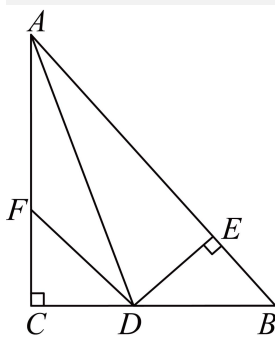
$\therefore AB = AE + BE, AC = AF + CF,$

由 (1) 知, $CF = BE,$

$\therefore AB = AC + BE = AF + BE + BE = AF + 2BE,$

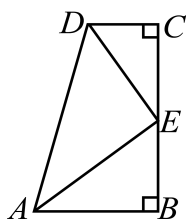
$\because AF = 8, BE = 3,$

$\therefore AB = 8 + 2 \times 3 = 14.$



【考试题型 2】利用角平分的性质求角度

4. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle C = 90^\circ$, E 是 BC 的中点, AE 平分 $\angle DAB$. 若 $\angle DAB = 75^\circ$, 求 $\angle ADE$ 的度数.

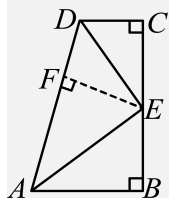


【答案】 52.5°

【分析】本题主要考查角平分线的性质及判定，角平分线上的点到角两边的距离相等，反之，到角两边距离相等的点在这个角的角平分线上。

过点 E 作 $EF \perp AD$ 交 AD 于点 F ，由角平分线的性质可得 $EF = EB$ ，再证明 DE 是 $\angle CDA$ 的角平分线，由题意可得 $\angle CDA + \angle BAD = 180^\circ$ ，求得 $\angle CDA = 105^\circ$ ，即可求解。

【详解】解：如图，过点 E 作 $EF \perp AD$ 交 AD 于点 F ，



$\because AE$ 平分 $\angle DAB$, $EF \perp AD$, $EB \perp AB$,

$\therefore EF = EB$,

$\because E$ 是 BC 的中点,

$\therefore CE = EB$,

$\therefore EF = CE$,

$\because EF \perp AD$, $EC \perp CD$, 且 $EF = CE$

$\therefore DE$ 是 $\angle CDA$ 的角平分线,

$\therefore \angle EDA = \angle EDC$,

$\because \angle B = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore CD \parallel AB$,

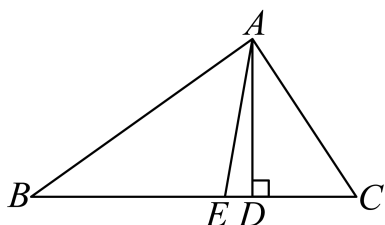
$\therefore \angle CDA + \angle BAD = 180^\circ$,

$\because \angle DAB = 75^\circ$,

$$\therefore \angle CDA = 105^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \frac{1}{2} \angle CDA = 52.5^\circ.$$

5. 如图：已知 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于 D ， AE 是 $\angle BAC$ 的平分线，且 $\angle B = 35^\circ$ ， $\angle C = 65^\circ$ 。



(1) 求 $\angle DAE$ 的度数。

(2) 若 $AB = 5$ ， $AC = 3$ ，试求 $\triangle ABE$ 与 $\triangle AEC$ 的面积之比。

【答案】(1) 15°

(2) 5:3

【分析】此题综合考查了三角形的内角和定理，角的和差，角平分线的性质；

(1) 求出 $\angle BAC$ 的度数；根据角平分线的定义求出 $\angle EAC$ 的度数；求出 $\angle DAC$ ，即可求出答案。

(2) 根据角平分线的性质得出 $\triangle ABE$ 与 $\triangle AEC$ 的面积之比等于 $AB:AC$ ，即可求解。

解题的关键是熟练运用角平分线的性质解决问题。

【详解】(1) 解： $\because \angle C = 65^\circ$ ， $\angle B = 35^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 35^\circ - 65^\circ = 80^\circ,$$

又 $\because AE$ 为平分线，

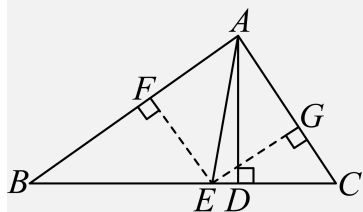
$$\therefore \angle EAC = 40^\circ.$$

$\because AD \perp BC$ ，

$$\therefore \angle DAC = 90^\circ - \angle C = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ;$$

(2) 如图，作 $EF \perp AB$ ， $EG \perp AC$ ，



$\therefore AE$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

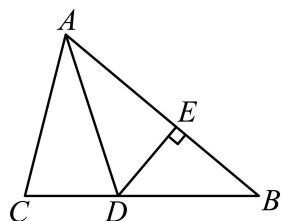
$\therefore EF = EG$,

$\therefore \triangle ABE$ 与 $\triangle AEC$ 的面积之比为: $\frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot EF}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot EG} = \frac{AB}{AC}$,

$\because AB = 5, AC = 3$,

$\therefore \triangle ABE$ 与 $\triangle AEC$ 的面积之比为: $5:3$.

6. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$ 于点 E .



(1) 若 $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 76^\circ$, 求 $\angle EDA$ 的度数.

(2) 若 $AB = 20, AC = 16, DE = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $\angle EDA$ 的度数为 58°

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 108

【分析】 本题考查了三角形内角和定理, 直角三角形的特征, 角的平分线的性质定理, 熟练掌握直角三角形的特征和性质定理是解题的关键.

(1) 先利用内角和定理计算 $\angle BAC = 64^\circ$, 再利用角的平分线计算 $\angle DAE = 32^\circ$. 最后利用直角三角形的特征计算即可.

(2) 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 利用角的平分线的性质定理, 结合面积公式计算即可.

【详解】 (1) 解: $\because \angle B = 40^\circ, \angle C = 76^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 64^\circ$,

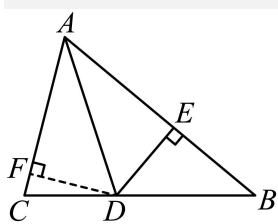
$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 32^\circ,$$

$\because DE \perp AB$,

$$\therefore \angle EDA = 90^\circ - \angle DAE = 58^\circ.$$

(2) 解: 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 如图,



$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

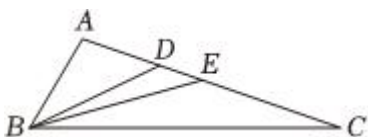
$$\therefore DE = DF = 6,$$

$$\because AB = 20, AC = 16,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF = \frac{1}{2} \times 20 \times 6 + \frac{1}{2} \times 16 \times 6 = 108.$$

【考试题型 3】利用角平分的性质求面积

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, BE 是 $\triangle ABC$ 的 AC 边上的中线.



(1) 若 $\triangle ABE$ 的周长为 26, $BE = 12$, $CE = 8$, 求 AB 的长;

(2) 若 $\angle A = 90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 12, $AB = 6$, $BC = 15$, 求 $\triangle BCD$ 的面积.

【答案】 (1) 6

(2) 30

【分析】 本题考查三角形中线的定义和角平分线的性质定理;

(1) 首先根据中线的性质得到 $AE = CE = 8$, 然后根据 $\triangle ABE$ 的周长为 26, 即可求出 AB 的长;

(2) 首先根据三角形的面积公式求出 AD 的长度, 然后根据角平分线的性质定理即可求解.

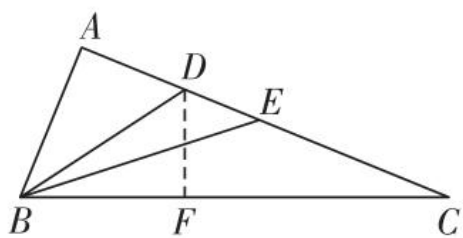
【详解】(1) $\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的 AC 边上的中线, $CE = 8$,

$$\therefore AE = CE = 8.$$

又 $\because \triangle ABE$ 的周长为 26, $BE = 12$,

$$\therefore AB = 26 - 12 - 8 = 6.$$

(2) 如图, 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F .



$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\angle A = 90^\circ$,

$$\therefore AD = DF.$$

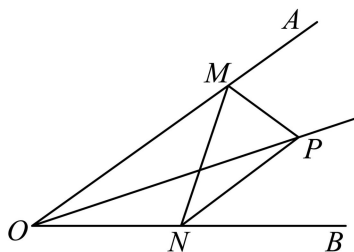
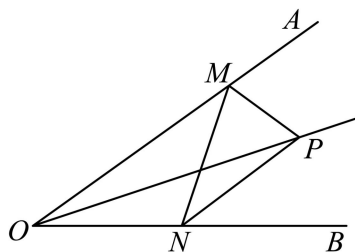
又 $\because \angle A = 90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 12, $AB = 6$,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 12,$$

$$\therefore AD = DF = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DF = \frac{1}{2} \times 15 \times 4 = 30.$$

8. 如图, 在 $\angle AOB$ 的两边 OA 、 OB 上分别取点 M 、 N , 连接 MN . 若 MP 平分 $\angle AMN$, NP 平分 $\angle MNB$.



备用图

(1) 求证: OP 平分 $\angle AOB$;

(2) 若 $MN = 8$, 且 $\triangle PMN$ 与 $\triangle OMN$ 的面积分别是 16 和 24, 求线段 OM 与 ON 的长度之和.

【答案】(1) 证明见解析

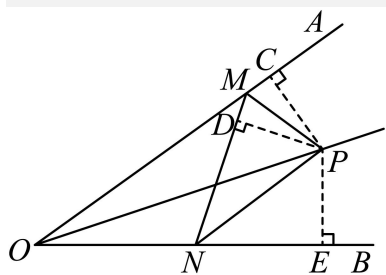
(2) 线段 OM 与 ON 的长度之和为 20.

【分析】本题考查了角平分线的性质定理及角平分线的判定，遇角平分线作垂线是解题关键.

(1) 过点 P 作 $PC \perp OA$ ，垂足为 C ，过点 P 作 $PD \perp MN$ ，垂足为 D ，过点 P 作 $PE \perp OB$ ，垂足为 E ，根据 MP 平分 $\angle AMN$ 可得 $PC = PD$ ，根据 NP 平分 $\angle MNB$ 可得 $PD = PE$ ，据此即可求证；

(2) 根据 $\triangle PMN$ 的面积 $= \frac{1}{2} MN \cdot PD$ 可得 $PD = 4$ ，即 $PD = PC = PE = 4$ ；根据四边形 $MONP$ 的面积 $= \triangle PMN$ 的面积 $+ \triangle OMN$ 的面积 $= \triangle POM$ 的面积 $+ \triangle PON$ 的面积即可求解.

【详解】(1) 证明：过点 P 作 $PC \perp OA$ ，垂足为 C ，过点 P 作 $PD \perp MN$ ，垂足为 D ，过点 P 作 $PE \perp OB$ ，垂足为 E ，



$\because MP$ 平分 $\angle AMN$ ， $PC \perp OA$ ， $PD \perp MN$ ，

$\therefore PC = PD$ ，

$\because NP$ 平分 $\angle MNB$ ， $PD \perp MN$ ， $PE \perp OB$ ，

$\therefore PD = PE$ ，

$\therefore PC = PE$ ，

$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$ ；

(2) 解： $\because MN = 8$ ， $\triangle PMN$ 的面积分别是 16，

$\therefore \frac{1}{2} MN \cdot PD = 16$ ，

$\therefore PD = 4$ ，

$\therefore PD = PC = PE = 4$ ，

$\therefore \triangle OMN$ 的面积是24,

$\therefore$ 四边形 $MONP$ 的面积 $=\triangle PMN$ 的面积 $+\triangle OMN$ 的面积 $=16+24=40$,

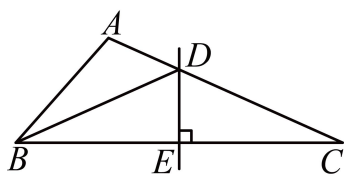
$\therefore \triangle POM$ 的面积 $+\triangle PON$ 的面积 $=40$,

$\therefore \frac{1}{2}OM \cdot PC + \frac{1}{2}ON \cdot PE = 40$,

$\therefore OM + ON = 20$,

$\therefore$ 线段 OM 与 ON 的长度之和为20.

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, DE 垂直平分 BC , BD 平分 $\angle ABC$.



(1) 若 $\angle ADB = 48^\circ$, 求 $\angle A$ 的度数;

(2) 若 $AB = 5\text{cm}$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的周长之差为 8cm , 且 $\triangle ADB$ 的面积为 10cm^2 , 求 $\triangle DBC$ 的面积.

【答案】 (1) 108°

(2) 16cm^2

【分析】 (1) 由线段垂直平分线的性质结合三角形外角的性质易求出 $\angle DBC = \angle C = 24^\circ$, 再根据角平分线的定义即得出 $\angle ABD = \angle DBC = 24^\circ$, 最后根据三角形内角和定理求解即可;

(2) 由线段垂直平分线的性质结合 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的周长之差为 8cm , 即可求出 $BC = 8\text{cm}$. 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H . 由 $\triangle ADB$ 的面积为 10cm^2 , $AB = 5\text{cm}$, 可求出 $DH = 4\text{cm}$, 结合角平分线的性质定理可得出 $DE = 4\text{cm}$, 即可计算 $S_{\triangle DBC}$.

【详解】 (1) 解: $\because DE$ 垂直平分 BC ,

$\therefore BD = CD$,

$\therefore \angle DBC = \angle C$.

$\because \angle ADB = \angle DBC + \angle C = 48^\circ$,

$$\therefore \angle DBC = \angle C = 24^\circ.$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = 24^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ABD - \angle ADB = 108^\circ;$$

(2) 解: $\because DE$ 垂直平分 BC ,

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC, DE = BC, BD = CD,$$

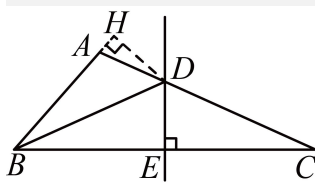
$$\because C_{\triangle ABC} - C_{\triangle ABD} = 8\text{cm}, C_{\triangle ABC} = AB + BC + AC, C_{\triangle ABD} = AB + BD + AD,$$

$$\therefore AB + BC + AC - (AB + BD + AD) = 8\text{cm},$$

$$\therefore AB + BC + AC - (AB + CD + AD) = 8\text{cm},$$

$$\therefore AB + BC + AC - (AB + AC) = 8\text{cm}, \text{ 即 } BC = 8\text{cm}.$$

过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H .



$$\because \triangle ADB \text{ 的面积为 } 10\text{cm}^2, \text{ 且 } S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2}AB \cdot DH, AB = 5\text{cm},$$

$$\therefore 10 = \frac{1}{2} \times 5DH,$$

$$\therefore DH = 4\text{cm}.$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore DE = DH = 4\text{cm}.$$

$$\therefore S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}BC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16\text{cm}^2.$$

【点睛】 本题考查线段垂直平分线的性质，三角形外角的性质，三角形内角和定理，角平分线的定义及其性质。熟练掌握上述知识是解题关键。在解(2)时正确作出辅助线也是解题关键。

【考试题型 4】利用角平分线的性质探究线段间的数量关系

10. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle ACB$, BD 与 CE 交于点 O .

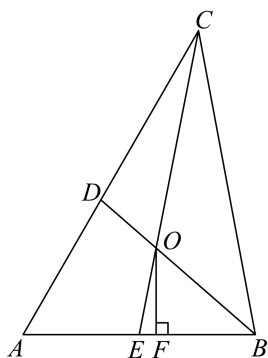


图 1

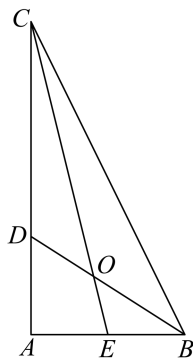


图 2

(1) 如图 1, 若 $\angle A = 60^\circ$.

① 求 $\angle BOC$ 的度数;

② 作 $OF \perp AB$ 于点 F , 探究 AE 、 AD 、 AF 之间的数量关系并说明理由;

(2) 如图 2, 若 $\angle A = 90^\circ$, $OE = kOC$, $\frac{OD}{OB} = \frac{4}{7}$, 则 k 的值为_____.

【答案】(1) ① 120° ; ② $AE + AD = 2AF$

(2) $\frac{3}{11}$

【分析】① 利用三角形内角和及角平分线的定义求出即可;

② 过点 O 作 $OM \perp AC$ 于点 M , $ON \perp BC$ 于点 N , 连接 AO , 证明 $\triangle OEF \cong \triangle ODM$ (AAS), 得到 $EF = DM$. 再证明 $\text{Rt} \triangle AFO \cong \text{Rt} \triangle MO$ (HL), 得到 $AF = AM$, 即可得到结论;

(2) 在 BC 取点 G 、 F , 使 $BF = BA$, $CG = CD$, 过 F 作 $FM \perp BD$ 于 M , $FN \perp OG$ 于 N , 先证明 $\triangle OCD \cong \triangle OCG$, 得出 $S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OCG}$, $\angle COD = \angle GOC$, $OD = OG$, 同理 $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOF}$,

$\angle BOE = \angle BOF$, 由 $\frac{OD}{OB} = \frac{4}{7}$, 得出 $\frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle OCB}} = \frac{4}{7}$, 设 $S_{\triangle OCD} = 4x$, 则 $S_{\triangle BOC} = 7x$, 仿照 (1) ① 求出

$\angle BOC = 135^\circ$, 进而求出 $\angle COD = \angle BOE = 45^\circ$, $\angle GOF = 45^\circ = \angle BOF$, 由角平分线的性质得出

$FM = FN$, 可求出 $S_{\triangle OEB} = S_{\triangle OFB} = \frac{7}{4+7} \times 3x = \frac{21}{11}x$, 然后利用 $\frac{OE}{OC} = \frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle BOC}}$ 即可求解.

【详解】(1) 解：①在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

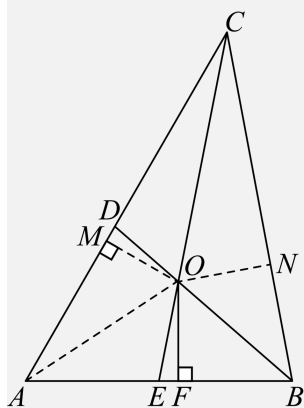
$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， CE 平分 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle OCB = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ.$$

在 $\triangle OBC$ 中， $\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;

②过点 O 作 $OM \perp AC$ 于点 M ， $ON \perp BC$ 于点 N ，连接 AO .



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $OF \perp AB$ ， $ON \perp BC$ ，

$$\therefore OF = ON, \angle OFA = 90^\circ.$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACB$ ， $OM \perp AC$ ， $ON \perp BC$ ，

$$\therefore ON = OM, \angle OMA = \angle OMD = 90^\circ.$$

$$\therefore OF = OM, \angle OFE = \angle OMD.$$

由(1)得： $\angle BOC = 120^\circ$.

$$\therefore \angle EOD = \angle BOC = 120^\circ.$$

在四边形 $AEOD$ 中， $\angle AEO + \angle ADO = 360^\circ - \angle EAD - \angle EOD = 360^\circ - 60^\circ - 120^\circ = 180^\circ$.

$$\therefore \angle AEO + \angle FEO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF = \angle ODA.$$

在 $\triangle OEF$ 和 $\triangle ODM$ 中，

$$\begin{cases} \angle OEF = \angle ODM, \\ \angle EFO = \angle DMO, \\ OF = OM, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OEF \cong \triangle ODM (\text{AAS}).$

$\therefore EF = DM.$

在 $\text{Rt} \triangle AFO$ 和 $\text{Rt} \triangle AMO$ 中,

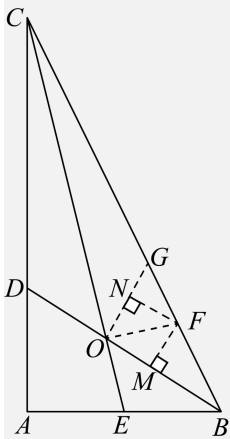
$$\begin{cases} AO = AO, \\ OF = OM, \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt} \triangle AFO \cong \text{Rt} \triangle MO (\text{HL}).$

$\therefore AF = AM.$

$\therefore AE + AD = AF - EF + AM + MD = 2AF.$

(2) 解: 在 BC 取点 G, F , 使 $BF = BE$, $CG = CD$, 过 F 作 $FM \perp BD$ 于 M , $FN \perp OG$ 于 N ,



$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle OCD = \angle OCG$,

又 $CG = CD$, $OC = OC$,

$\therefore \triangle OCD \cong \triangle OCG$,

$\therefore S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OCG}$, $\angle COD = \angle GOC$, $OD = OG$,

同理 $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOF}$, $\angle BOE = \angle BOF$,

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{4}{7},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle OCB}} = \frac{4}{7},$$

设 $S_{\triangle OCD} = 4x$, 则 $S_{\triangle BOC} = 7x$,

$$\therefore S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OCG} = 4x,$$

$$\therefore S_{\triangle BOG} = S_{\triangle OCB} - S_{\triangle OCG} = 3x,$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle OCB = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 45^\circ.$$

在 $\triangle OBC$ 中, $\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,

$$\therefore \angle COD = \angle BOE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GOC = \angle BOF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GOF = 45^\circ = \angle BOF,$$

又 $FM \perp BD$, $FN \perp OG$,

$$\therefore FM = FN,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OFG}}{S_{\triangle OFB}} = \frac{OG}{OB} = \frac{OD}{OB} = \frac{4}{7},$$

$$\therefore S_{\triangle OEB} = S_{\triangle OFB} = \frac{7}{4+7} \times 3x = \frac{21}{11}x,$$

$$\therefore \frac{OE}{OC} = \frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{\frac{21}{11}x}{7x} = \frac{3}{11},$$

$$\therefore OE = kOC,$$

$$\therefore k = \frac{OE}{OC} = \frac{3}{11}.$$

【点睛】本题考查了三角形的内角和定理，角平分线的性质，全等三角形的判定与性质等知识，添加合适的辅助线，构造全等三角形是解题的关键。

11. 已知 OM 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 是射线 OM 上点，点 C, D 分别在射线 OA, OB 上，连接 PC, PD 。

(1) 发现问题：如图1，当 $PC \perp OA, PD \perp OB$ 时，则 PC 与 PD 的数量关系是。

(2) 探究问题：如图2，点 C, D 在射线 OA, OB 上滑动，且 $\angle AOB = 90^\circ$ ，当 $PC \perp PD$ 时， PC 与 PD 在

(1) 中的数量关系还成立吗？说明理由。（温馨提示：过 P 作 $PE \perp OA$ 于 $E, PF \perp OB$ 于 F ）

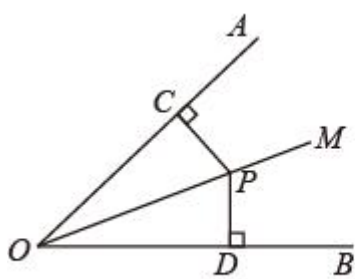


图1

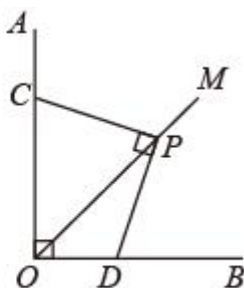


图2

【答案】(1) $PC=PD$ ，(2) 成立，理由见解析

【分析】(1) 根据角平分线性质的性质可知 $PC=PD$ ；

(2) 过点 P 点作 $PE \perp OA$ 于 $E, PF \perp OB$ 于 F ，根据垂直的定义得到 $\angle PEC = \angle PFD = 90^\circ$ ，由 OM 是 $\angle AOB$ 的平分线，根据角平分线的性质得到 $PE = PF$ ，利用四边形内角和定理可得到 $\angle PCE = \angle PDF$ ，然后根据“ AAS ”可判断 $\triangle PCE \cong \triangle PDF$ ，根据全等的性质即可得到 $PC = PD$ 。

【详解】解：(1) $PC = PD$ ，

理由： $\because OM$ 是 $\angle AOB$ 的平分线， $PC \perp OA, PD \perp OB$

$\therefore PC = PD$ （角平分线上点到角两边的距离相等），

故答案为： $PC = PD$ ；

(2) 成立

理由：过点 P 点作 $PE \perp OA$ 于 $E, PF \perp OB$ 于 F ，如图，

$\therefore \angle PEC = \angle PFD = 90^\circ$ ，

$\because OM$ 是 $\angle AOB$ 的平分线，

$\therefore PE = PF$ ，

$\because \angle AOB = 90^\circ, \angle CPD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PCE + \angle PDO = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ ，

而 $\angle PDO + \angle PDF = 180^\circ$ ，

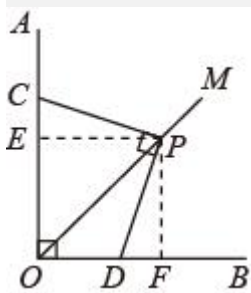
$$\therefore \angle PCE = \angle PDF,$$

在 $\triangle PCE$ 和 $\triangle PDF$ 中

$$\begin{cases} \angle PCE = \angle PDF \\ \angle PEC = \angle PFD \\ PE = PF \end{cases}$$

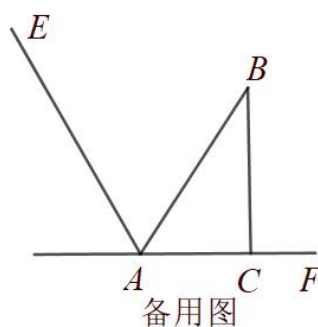
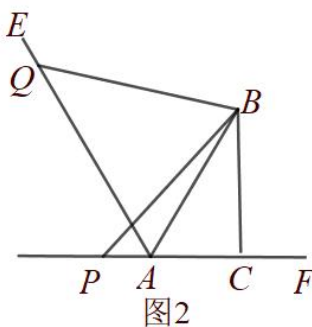
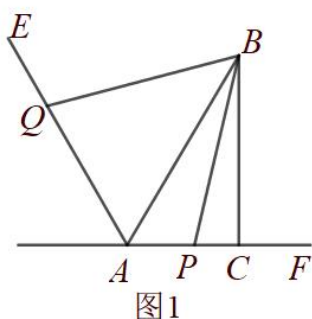
$$\therefore \triangle PCE \cong \triangle PDF (AAS),$$

$$\therefore PC = PD.$$



【点睛】本题考查了角平分线的性质：角平分线上的点到这个角两边的距离相等，也考查了三角形全等的判定与性质。

12. 如图，在 $\angle EAF$ 的平分线上取点 B 作 $BC \perp AF$ 于点 C ，在直线 AC 上取一动点 P ，在直线 AE 上取点 Q 使得 $BQ = BP$ 。



- (1) 如图1，当点 P 在点线段 AC 上时， $\angle BQA + \angle BPA = \underline{\quad}^\circ$ ；
- (2) 如图2，当点 P 在 CA 延长线上时，探究 AQ 、 AP 、 AC 三条线段之间的数量关系，说明理由；
- (3) 在满足(1)的结论条件下，当点 P 运动到在射线 AC 上时，直接写出 AQ 、 AP 、 PC 三条线段之间的数量关系为： $\underline{\quad}$ 。

【答案】(1) 180；(2) $AQ - AP = 2AC$ ；理由见解析；(3) $AQ - AP = 2PC$ 或 $AP - AQ = 2PC$ 。

【分析】(1) 作 $BM \perp AE$ 于点 M ，根据角平分线的性质得到 $BM = BC$ ，证明 $\text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BPC (HL)$ ，继而证明 $\angle BQA = \angle BPC$ 解题即可；

(2) 作 $BM \perp AE$ 于 M ，先证明 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC (HL)$ ，继而得到 $\angle ABM = \angle ABC$ ， $AM = AC$ ，

$BM = BC$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BCP$ (HL)，从而得到 $PC = QM$ ，据此解题即可；

(3) 分两种情况讨论，当点 P 在线段 AC 上时，或当点 P 在线段 AC 的延长线上时，分别画出适合的图，再由 $\triangle QBM \cong \triangle PBC$ (AAS) 可得 $\angle QBM = \angle PBC$ ， $QM = PC$ ， $BM = BC$ ，再由 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC$ (HL) 可得 $AM = AC$ ，利用线段和差计算即可。

【详解】(1) 证明：过点 B 作 $BM \perp AE$ 于 M ，

$\because BA$ 平分 $\angle EAF$ ， $BC \perp AF$ ，

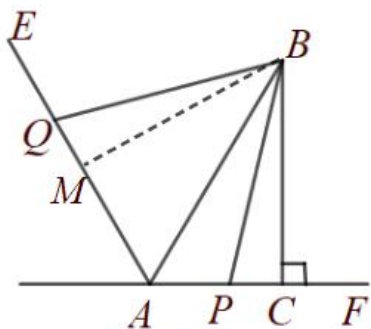


图1

$\therefore BM = BC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BMQ$ 和 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中，

$$\begin{cases} BQ = BP \\ BM = BC \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BPC$ (HL)，

$\therefore \angle BQA = \angle BPC$ ，

又 $\because \angle BPC + \angle BPA = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BQA + \angle BPA = 180^\circ$ ，

故答案为 180 ；

(2) 解： $AQ - AP = 2AC$

理由如下：如图 2，作 $BM \perp AE$ 于 M ，

$\because AB$ 平分 $\angle EAF$ ， $BC \perp AF$

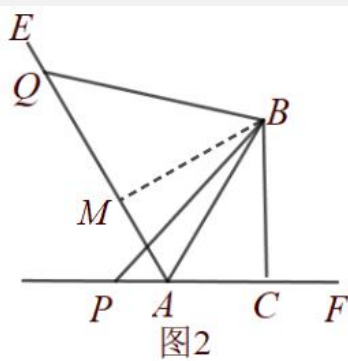
$\therefore BM = BC$ ， $\angle BMA = \angle BCA = 90^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$\begin{cases} BM = BC \\ AB = AB \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC \text{ (HL)}$$

$$\therefore \angle ABM = \angle ABC, AM = AC,$$



在 $\text{Rt}\triangle BMQ$ 和 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中

$$\begin{cases} BQ = BP \\ BM = BC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BMQ \cong \text{Rt}\triangle BCP \text{ (HL)}$$

$$\therefore PC = QM$$

$$\therefore AQ - AP = (AM + QM) - (PC - AC) = AM + AC = 2AC$$

(3) 当点 P 在线段 AC 上时, 如图, $AQ - AP = 2PC$

理由如下: 作 $BM \perp AE$ 于 M ,

$$\because BC \perp AF,$$

$$\therefore \angle BMA = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\because \angle BQA + \angle BPA = 180^\circ, \angle BPC + \angle BPA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = \angle BQM,$$

在 $\triangle QBM$ 和 $\triangle PBC$ 中

$$\begin{cases} \angle BMQ = \angle BCP \\ \angle BQM = \angle BPC \\ QB = PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle QBM \cong \triangle PBC \text{ (AAS)}$$

$$\therefore \angle QBM = \angle PBC, \quad QM = PC, \quad BM = BC$$

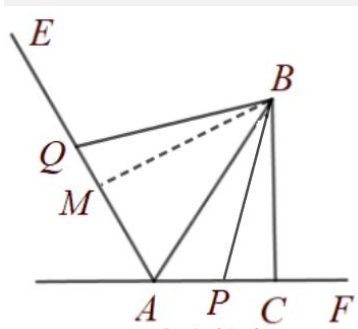
在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$\begin{cases} BM = BC \\ AB = AB \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC \quad (\text{HL})$$

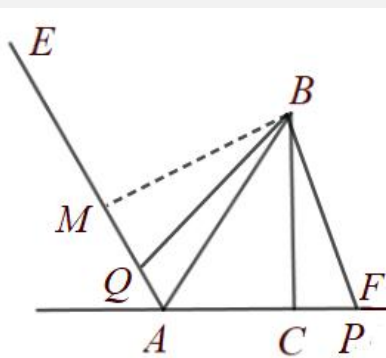
$$\therefore AM = AC,$$

$$\therefore AQ - AP = AM + QM - (AC - PC) = QM + PC = 2PC$$



当点 P 在线段 AC 的延长线上时, 如图, $AP - AQ = 2PC$

理由如下: 作 $BM \perp AE$ 于 M ,



$$\because BC \perp AF,$$

$$\therefore \angle BMA = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\because \angle BQA + \angle BPA = 180^\circ, \quad \angle BQM + \angle BQA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = \angle BQM,$$

在 $\triangle QBM$ 和 $\triangle PBC$ 中

$$\begin{cases} \angle BMQ = \angle BCP \\ \angle BQM = \angle BPC \\ QB = PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle QBM \cong \triangle PBC \text{ (AAS)}$$

$$\therefore \angle QBM = \angle PBC, QM = PC, BM = BC$$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$\begin{cases} BM = BC \\ AB = AB \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ABC \text{ (HL)}$$

$$\therefore AM = AC,$$

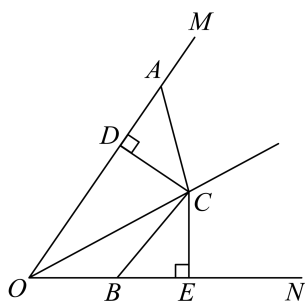
$$\therefore AP - AQ = AC + CP - (AM - QM) = MQ + PC = 2PC$$

故答案为: $AQ - AP = 2PC$ 或 $AP - AQ = 2PC$.

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质，角平分线性质，分类讨论思想等知识，掌握相关知识，利用辅助线画出准确图形是解题关键。

【考试题型 5】角平分线的判定定理

13. 如图， A, B 两点分别在射线 OM, ON 上，点 C 在 $\angle MON$ 的内部且 $CA = CB$ ， $CD \perp OM$ ， $CE \perp ON$ ，垂足分别为 D, E ，且 $AD = BE$ 。



(1) 求证: OC 平分 $\angle MON$;

(2) 如果 $AO = 12$, $BO = 4$, 求 OD 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 8

【分析】本题考查了全等三角形的性质与判定，角平分线的判定，熟练掌握全等三角形的判定方法，熟记到角两边距离相等的点在角的平分线上是解答本题的关键。

(1) 根据题意，得到 $\text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle BCE$ (HL)，所以 $CD = CE$ ，再根据已知条件，得到 OC 平分

$\angle MON$ ，由此得到证明.

(2) 根据题意，得到 $\text{Rt} \triangle ODC \cong \text{Rt} \triangle OEC (\text{HL})$ ，所以 $OD = OE$ ，设 $BE = x$ ，再根据已知条件，得到 $AO = OD + AD = 4 + 2x = 12$ ，求出 x ，由此得到答案.

【详解】(1) 证明：由题意得：

$$CD \perp OM, CE \perp ON,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle CEB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 和 $\text{Rt} \triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ AD = BE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle ACD \cong \text{Rt} \triangle BCE (\text{HL}),$$

$$\therefore CD = CE,$$

$$\because CD \perp OM, CE \perp ON,$$

$$\therefore OC \text{ 平分 } \angle MON.$$

(2) 在 $\text{Rt} \triangle ODC$ 和 $\text{Rt} \triangle OEC$ 中，

$$\begin{cases} CD = CE \\ OC = OC \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle ODC \cong \text{Rt} \triangle OEC (\text{HL}),$$

$$\therefore OD = OE,$$

$$\text{设 } BE = x,$$

$$\because BO = 4,$$

$$\therefore OE = OD = 4 + x,$$

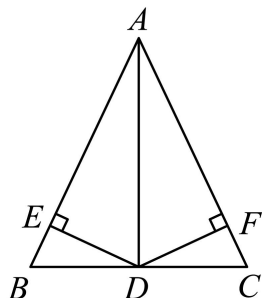
$$\because AD = BE = x,$$

$$\therefore AO = OD + AD = 4 + 2x = 12,$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore OD = 4 + 4 = 8.$$

14. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 且 $\angle BDE = \angle CDF$. 那么 AD 平分 $\angle BAC$ 吗? 为什么?



【答案】 AD 平分 $\angle BAC$, 理由见解析

【分析】本题考查了全等三角形的性质和判定, 角平分线的判定等知识, 解题的关键是求证 $DE = DF$. 先证明 $\triangle BED \cong \triangle CFD$ (AAS), 从而得到 $DE = DF$, 再利用角平分线的判定定理即可得证.

【详解】解: AD 平分 $\angle BAC$, 理由是:

$$\because DE \perp AB, DF \perp AC,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\because D \text{ 是 } BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore BD = CD,$$

$$\text{在 } \triangle BED \text{ 和 } \triangle CFD \text{ 中, } \begin{cases} \angle BDE = \angle CDF \\ \angle BED = \angle CFD, \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle CFD (\text{AAS}),$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$\text{又 } \because DE \perp AB, DF \perp AC,$$

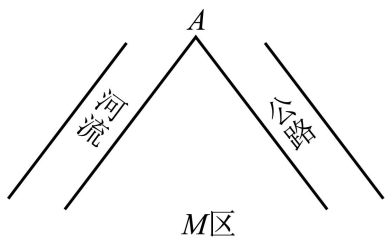
$$\therefore \text{点 } D \text{ 在 } \angle BAC \text{ 的角平分线上},$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BAC.$$

【考试题型 6】角平分线性质的实际应用

15. 如图, 要在河流的右侧、公路的左侧M区建一个工厂, 位置选在到河流和公路的距离相等, 并且到河

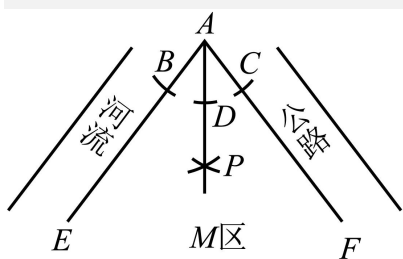
流与公路交叉点A处的距离为1cm（指图上距离）的地方，则图中工厂的位置应选在哪里？画图并说明理由。



【答案】见解析

【分析】先根据角平分线的尺规作图方法作出图，再根据角平分线的性质即可得到答案。

【详解】解：如图，以点A为圆心，适当长为半径画弧，分别交AE、AF于点B、C，分别以点B、C为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长度为半径画弧，两弧交 $\angle EAF$ 内部于点P，作射线AP，以点A为圆心，1cm的长为半径画弧，交AP于点D，则点D即为所求，



理由： $\because$ 由作图步骤可知，AP是 $\angle EAF$ 的角平分线，角的平分线上的点到角的两边的距离相等，

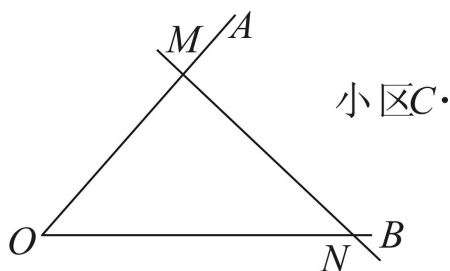
$\therefore$ AP上的点到AE、AF的距离相等，

$\because AD = 1\text{cm}$ ，

$\therefore$ 工厂应该选在点D处。

【点睛】本题主要考查了尺规作图——角平分线，角平分线的性质，熟练掌握角平分线的尺规作图方法以及角平分线的性质是解题的关键。

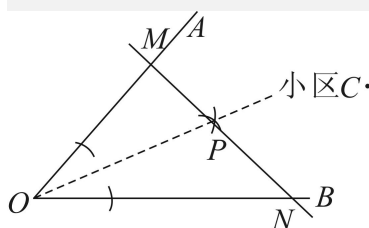
16. 如图，某个居民小区C附近有三条两两相交的道路MN、OA、OB，拟在MN上建造一个大型超市，使得它到OA、OB的距离相等，请确定该超市的位置P。



【答案】见解析

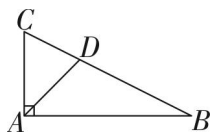
【分析】作 $\angle AOB$ 的角平分线 OD ， OD 与 MN 的交点到 $\angle AOB$ 的两边 OA ， OB 的距离相等。

【详解】如图所示：作 $\angle AOB$ 的平分线交 MN 于点 P ，点 P 即为该超市的位置。



【点睛】此题主要考查了角平分线的作法，关键是掌握角平分线的性质：角的平分线上的点到角的两边的距离相等。

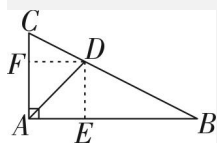
17. 太和中学校园内有一块直角三角形($Rt\triangle ABC$)空地，如图所示，园艺师傅以角平分线 AD 为界，在其两侧分别种上了不同的花草，在 $\triangle ABD$ 区域内种植了月季花，在 $\triangle ACD$ 区域内种植了牡丹花，并量得两直角边 $AB=10m$ ， $AC=6m$ ，分别求月季花与牡丹花两种花草的种植面积。



【答案】 $\frac{15}{4}$ ， $\frac{45}{4}$

【分析】过点 D 分别作 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ， E 、 F 是垂足，根据角平分线的性质可得 $DE = DF$ ，进而根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC}$ 求得 DE ， DF ，进而根据三角形面积公式求解可。

【详解】解：过点 D 分别作 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ， E 、 F 是垂足。



由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC}$ ，得 $\frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}AC \cdot DF$ ， $\therefore 10 \times 6 = 10 \times DE + 6 \times DF$ ，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore DE = DF = \frac{15}{4}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{15}{4} = \frac{75}{4}; S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{15}{4} = \frac{45}{4}.$$

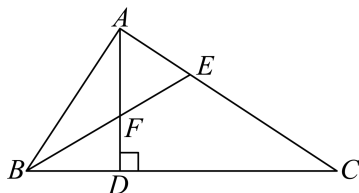
【点睛】本题考查了角平分线的性质，理解角平分线的性质是解题的关键。

【考试题型 7】利用角平分线的性质解决多结论问题

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是 BC 边上的高， BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E ，交 AD 于点 F ，下

面结论：① $\angle BAD = \angle C$ ；② $\angle AFB = \angle BEC$ ；③ $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot AE$ ；④ $\angle CAD = 2\angle CBE$ 。其中正确结论的

序号是



【答案】①②③④

【分析】根据角平分线的性质和直角三角形的性质即可判断。

【详解】解： $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是 BC 边上的高，

$$\therefore \angle ABC + \angle C = 90^\circ, \angle CAD + \angle C = 90^\circ, \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CAD, \angle C = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle CAD = 2\angle CBE,$$

故①④正确；

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

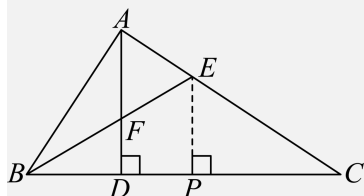
$$\because \angle C = \angle BAD$$

$$\text{又} \because \angle AFB = 180^\circ - \angle ABE - \angle BAD, \angle BEC = 180^\circ - \angle CBE - C,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle BEC,$$

故②正确；

如图，过点 E 作 $EP \perp BC$ 于 P ，



$$\because \angle BAC = 90^\circ, BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore AE = EP,$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot EP = \frac{1}{2} BC \cdot AE,$$

故③正确；

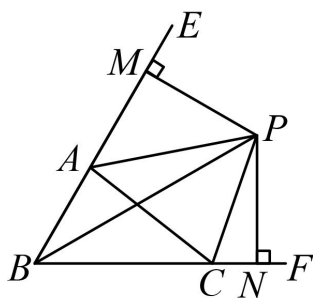
故答案为：① ②③④

【点睛】本题考查了角平分线的性质，掌握角平分线的性质是解题关键。

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 、 $\angle FCA$ 的平分线 BP 、 CP 交于点 P ，延长 BA ， BC ， $PM \perp BE$ 于点 M ，

$PN \perp BF$ 于点 N ，则下列结论：① AP 平分 $\angle EAC$ ；② $\angle ABC + 2\angle APC = 180^\circ$ ；③ $\angle ACB = 2\angle APB$ ；④

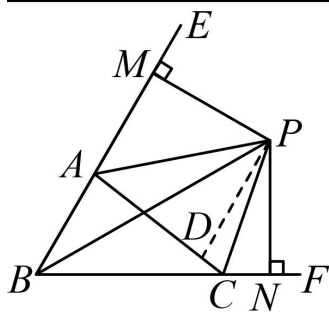
$S_{\triangle PAC} = S_{\triangle MAP} + S_{\triangle NCP}$. 其中正确结论的序号是.



【答案】①②③④

【分析】①过点 P 作 $PD \perp AC$ 于点 D ，根据角平分线的性质即可进行判断；②证 $\text{Rt}\triangle PAM \cong \text{Rt}\triangle PAD$ ， $\text{Rt}\triangle PCD \cong \text{Rt}\triangle PCN$ 即可进行判断；③根据“ PA 平分 $\angle CAE$ ， BP 平分 $\angle ABC$ ”即可进行判断；④由②中全等三角形的性质即可进行判断。

【详解】解：①如图，过点 P 作 $PD \perp AC$ 于点 D ，



$\because PB$ 平分 $\angle ABC$, PC 平分 $\angle FCA$, $PM \perp BE$, $PN \perp BF$, $PD \perp AC$,

$\therefore PM = PN$, $PN = PD$,

$\therefore PM = PD$,

$\because PM \perp BE$, $PD \perp AC$,

$\therefore AP$ 平分 $\angle EAC$, 故①正确;

② $\because PM \perp AB$, $PN \perp BC$,

$\therefore \angle ABC + 90^\circ + \angle MPN + 90^\circ = 360^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle MPN = 180^\circ$,

在 $\text{Rt} \triangle PAM$ 和 $\text{Rt} \triangle PAD$ 中,

$$\begin{cases} PM = PD \\ PA = PA \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt} \triangle PAM \cong \text{Rt} \triangle PAD(\text{HL})$,

$\therefore \angle APM = \angle APD$,

同理: $\text{Rt} \triangle PCD \cong \text{Rt} \triangle PCN(\text{HL})$,

$\therefore \angle CPD = \angle CPN$,

$\therefore \angle MPN = 2\angle APC$,

$\therefore \angle ABC + 2\angle APC = 180^\circ$, 故②正确;

③ $\because PA$ 平分 $\angle CAE$, BP 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle CAE = \angle ABC + \angle ACB = 2\angle PAM$, $\angle PAM = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle APB$,

$$\therefore \angle CAE = \angle ABC + \angle ACB = \angle ABC + 2\angle APB$$

$\therefore \angle ACB = 2\angle APB$, ③正确;

④由②可知 $\text{Rt}\triangle PAM \cong \text{Rt}\triangle PAD(\text{HL})$, $\text{Rt}\triangle PCD \cong \text{Rt}\triangle PCN(\text{HL})$,

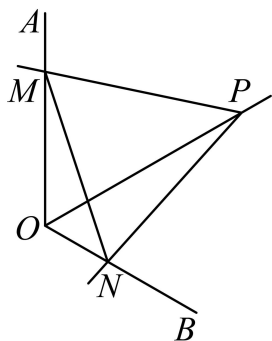
$$\therefore S_{\triangle APD} = S_{\triangle MAP}, S_{\triangle CPD} = S_{\triangle NCP},$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = S_{\triangle APD} + S_{\triangle CPD} = S_{\triangle MAP} + S_{\triangle NCP}, \text{ 故④正确.}$$

故答案为: ①②③④

【点睛】本题考查了角平分线的定义及性质、全等三角形的判断及性质等知识点. 熟记相关结论是解题关键.

20. 如图, 点 P 为定角 $\angle AOB$ 的平分线上的一个定点, 且 $\angle MPN$ 与 $\angle AOB$ 互补, 其两边分别与 OA 、 OB 相交于 M 、 N 两点, 则以下结论:

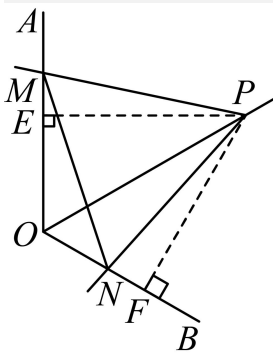


① $PM = PN$ 恒成立; ② $\triangle OMN$ 的周长不变; ③ $OM + ON$ 的值不变; ④ 四边形 $PMON$ 的面积不变, 其中正确的为 (请填写正确结论前面的序号).

【答案】①③④

【分析】如图所示, 作 $PE \perp OA$ 于 E , 作 $PF \perp OB$ 于 F , 可证 $\triangle POE \cong \triangle POF$, $\triangle PEM \cong \triangle PFN$, 根据三角形全等的判定即可求解.

【详解】解: 如图所示, 作 $PE \perp OA$ 于 E , 作 $PF \perp OB$ 于 F ,



$$\because \angle PEO = \angle PFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\because \angle MPN + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF = \angle MPN,$$

$$\therefore \angle EPM = \angle FPN,$$

$$\because OP \text{ 平分 } \angle AOB, PE \perp OA, PF \perp OB,$$

$$\therefore PE = PF,$$

在 $\text{Rt} \triangle POE$ 和 $\text{Rt} \triangle POF$ 中,

$$\begin{cases} OP = OP \\ PE = PF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle POE \cong \text{Rt} \triangle POF (\text{HL}),$$

$$\therefore OE = OF,$$

在 $\triangle PEM$ 和 $\triangle PFN$ 中,

$$\begin{cases} \angle MPE = \angle NPF \\ PE = PF \\ \angle PEM = \angle PFN \end{cases},$$

$$\therefore \triangle PEM \cong \triangle PFN (\text{ASA}),$$

$$\therefore EM = NF, PM = PN, \text{ 故①正确};$$

$$\therefore S_{\triangle PEM} = S_{\triangle PNF},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} PMON} = S_{\text{四边形} PEOF} = \text{定值}, \text{ 故④正确},$$

$$\therefore OM + ON = OE + ME + OF - NF = 2OE,$$

$\therefore OM + ON$ 为定值，故③正确，

在旋转过程中， $\triangle PMN$ 是顶角不变的等腰三角形，

$\therefore PM$ 的长度是变化的，

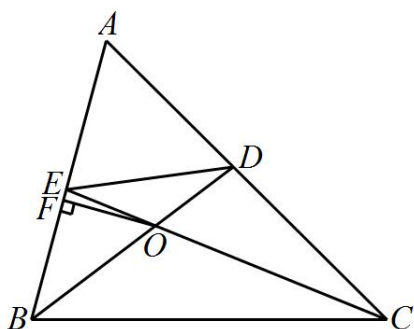
$\therefore MN$ 的长度是变化的，故②错误，

故答案为：①③④.

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定和性质，角平分线的性质定理，四边形的面积等知识，掌握添加辅助线，勾股全等三角形解决问题是解题的关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ (\angle ABC > \angle A)$ ，角平分线 BD 、 CE 交于点 O ， $OF \perp AB$ 于点 F . 下列结论：① $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle BOE} = BC : BE$ ；② $\angle EOF = \angle ABC - \angle A$ ；③ $BE + CD = BC$ ；④

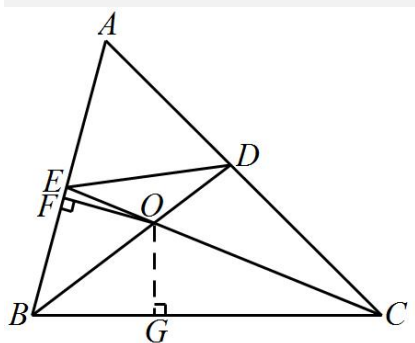
$S_{\text{四边形}BEDC} = 2S_{\triangle BOC} + S_{\triangle EDO}$ ，其中正确结论是.



【答案】①③④

【分析】过点 O 作 $OG \perp BC$ 于点 G ，由角平分线的性质定理可得 $OF = OG$ ，然后结合三角形面积公式即可判断结论①；首先求得 $\angle BOE = 60^\circ$ ，假设 $\angle ABC = 80^\circ$ ，则 $\angle OBA = 40^\circ$ ，可求得 $\angle EOF = 10^\circ$ ，再根据 $\angle ABC - \angle A = 20^\circ$ ，即可判断结论②；在 BC 上截取 $BM = BE$ ，连接 OM ，分别证明 $\triangle BOE \cong \triangle BOM$ 和 $\triangle COD \cong \triangle COM$ ，由全等三角形的性质可得 $CD = CM$ ，即可判断结论③；由全等三角形的定义和性质易得 $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOM}$ ， $S_{\triangle COD} = S_{\triangle COM}$ ，可知 $S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOM} + S_{\triangle COM} = S_{\triangle BOC}$ ，即可判断结论④.

【详解】解：如下图，过点 O 作 $OG \perp BC$ 于点 G ，



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $OF \perp AB$, $OG \perp BC$,

$\therefore OF = OG$,

$\therefore S_{\triangle BOC} : S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2}BC \times OG : \frac{1}{2}BE \times OF = BC : BE$,

故结论①正确;

$\because \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180 - \angle A = 120^\circ$,

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle OBA = \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle OCA = \angle OCB = \frac{1}{2}\angle ACB$,

$\therefore \angle BOE = \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ$,

设 $\angle ABC = 80^\circ$, 则 $\angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABC = 40^\circ$,

$\because OF \perp AB$,

$\therefore \angle BOF = 90^\circ - \angle OBA = 50^\circ$,

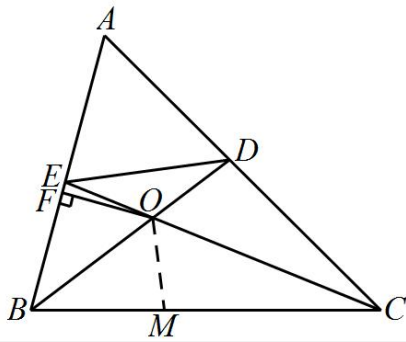
$\therefore \angle EOF = \angle BOE - \angle BOF = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$,

又 $\because \angle ABC - \angle A = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$,

$\therefore \angle EOF \neq \angle ABC - \angle A$,

故结论②错误;

在 BC 上截取 $BM = BE$, 连接 OM ,



在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle BOM$ 中,

$$\begin{cases} BE = BM \\ \angle OBE = \angle OBM, \\ OB = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle BOM$ (SAS),

$\therefore OE = OM, \angle BOM = \angle BOE = 60^\circ,$

$\because \angle COD = \angle BOE = 60^\circ, \angle COM = 180^\circ - \angle BOE - \angle BOM = 60^\circ,$

$\therefore \angle COD = \angle COM,$

$\therefore$ 在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COM$ 中,

$$\begin{cases} \angle OCD = \angle OCM \\ OC = OC \\ \angle COD = \angle COM \end{cases},$$

$\therefore \triangle COD \cong \triangle COM$ (ASA),

$\therefore CD = CM,$

$\therefore BE + CD = BM + CM = BC,$

故结论③正确;

$\because \triangle BOE \cong \triangle BOM, \triangle COD \cong \triangle COM,$

$\therefore S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOM}, S_{\triangle COD} = S_{\triangle COM},$

$\therefore S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOM} + S_{\triangle COM} = S_{\triangle BOC},$

$\therefore S_{\text{四边形}BEDC} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle EDO} = 2S_{\triangle BOC} + S_{\triangle EDO},$

故结论④正确.

综上所述，结论正确的为①③④.

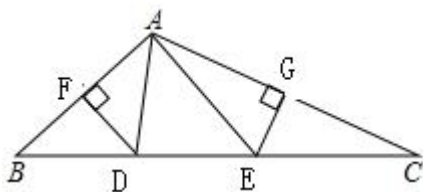
故答案为：①③④.

【点睛】本题主要考查了角平分线的性质定理、全等三角形的判定与性质等知识，综合性强，熟练掌握相关知识并熟练运用是解题关键.

【考试题型 8】利用垂直平分线的性质求线段长度

22. 如图, $\triangle ABC$ 中, AB, AC 边的垂直平分线分别交 BC 于点 D, E , 垂足分别为点 F, G , $\triangle ADE$ 的周长为 6cm

(1) 求 $\triangle ABC$ 中 BC 边的长度; (2) 若 $\angle B + \angle C = 64^\circ$, 求 $\angle DAE$ 的度数.



【答案】(1) 6; (2) 52° .

【分析】(1) 根据垂直平分线的性质即可得到 $BD=AD, AE=CE$, 再根据周长的定义即可求解;

(2) 根据等腰三角形的性质及三角形的内角和即可求解.

【详解】解: (1) $\because DF$ 垂直平分 AB , EG 垂直平分 AC

$$\therefore AD=DB, AE=EC$$

$$\because \triangle ADE \text{ 的周长} = AD + DE + AE = 6$$

$$\therefore BC = BD + DE + EC = AD + DE + AE = 6$$

$$\therefore BC = 6$$

(2) $\because AD=DB, AE=EC$

$$\therefore \angle BAD = \angle B, \angle EAC = \angle C.$$

$$\because \angle B + \angle C = 64^\circ$$

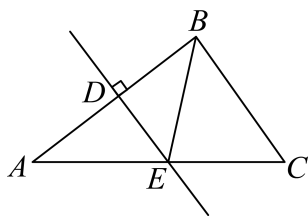
$$\therefore \angle BAD + \angle EAC = 64^\circ$$

$$\therefore \angle DAE = 180^\circ - (\angle B + \angle C + \angle BAD + \angle EAC) = 52^\circ$$

【点睛】此题主要考查垂直平分线的性质，解题的关键是熟知垂直平分线上的点到线段端点距离相等.

23. 如图所示, $\triangle ABC$ 中, $AC > BC, AB \perp DE$, 点 D 是 AB 的中点, 点 E 在 AC 上, 连接 BE . 若

$AC = 12, \triangle BCE$ 周长为 17, 求 BC 的长度.



【答案】 $BC = 5$

【分析】根据线段垂直平分线的性质得到 $AE = BE$ ，由 $\triangle BEC$ 的周长是 17 得到 $BC = 5$ ，即可得到答案．

【详解】解： $\because DE \perp AB$ ， D 是 AB 的中点，

$\therefore DE$ 是 AB 的垂直平分线，

$\therefore AE = BE$ ，

$\because \triangle BEC$ 的周长 $= BE + CE + BC = AE + CE + BC = AC + BC = 17$ ，

$\because AC = 12$ ，

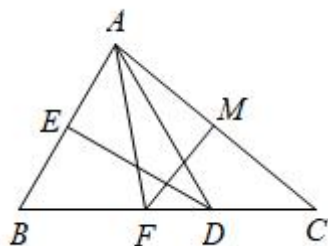
$\therefore BC = 5$ ．

【点睛】本题考查了线段垂直平分线的性质，熟练掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解此题的关键．

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， DE 垂直平分 AB ，分别交 AB ， BC 于点 E ， D ， FM 垂直平分 AC ，分别交 AC ， BC 于点 M ， F ．

(1) 若 $\triangle AFD$ 的周长为 29， $FD = 4.5$ ，求 BC 的长度；

(2) 若 $\angle BAC = 80^\circ$ ，求 $\angle FAD$ 的度数．



【答案】(1) $BC=20$ (2) 20°

【分析】(1) 根据三角形的周长可得 $AD+AF+FD=29$ ，故 $AD+AF=24.5$ ，根据垂直平分线的性质得到 $AD=BD$ ， $AF=CF$ ，根据 $BC=BD+CF-DF$ 即可求解；

(2) 根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等可得 $AD=BD$, 再根据等边对等角可得 $\angle BAD = \angle B$, 同理可得, $\angle CAF = \angle C$, 然后利用三角形的内角和定理求出 $\angle B + \angle C$, 再根据 $\angle FAD = \angle BAD + \angle CAF - \angle BAC$ 代入数据进行计算即可得解.

【详解】(1) $\because \triangle AFD$ 的周长为 29,

$$\therefore AD + AF + FD = 29,$$

$$\because FD = 4.5$$

$$\therefore AD + AF = 29 - 4.5 = 24.5$$

$\because DE$ 垂直平分 AB , FM 垂直平分 AC ,

$$\therefore AD = BD, AF = CF,$$

$$\therefore BD + CF = AD + AF = 24.5$$

$$\therefore BC = BD + CF - DF = 24.5 - 4.5 = 20$$

即 $BC = 20$;

(2) $\because DE$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle B,$$

同理可得 $\angle CAF = \angle C$,

$$\therefore \angle FAD = \angle BAD + \angle CAF - \angle BAC = (\angle B + \angle C) - \angle BAC,$$

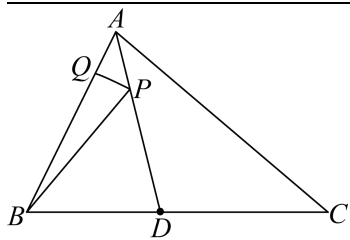
在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC = 100^\circ$,

$$\therefore \angle FAD = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ.$$

【点睛】本题考查了线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等的性质, 等边对等角的性质, 三角形的内角和定理, 整体思想的利用是解题的关键.

【考试题型 9】利用垂直平分线的性质求角度

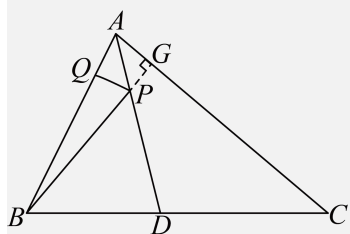
25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 76^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , P 为线段 AD 上一动点, Q 为边 AB 上一动点, 当 $BP + PQ$ 的值最小时, $\angle APB =$ $^\circ$.



【答案】128

【分析】本题考查的角平分线的性质，角平分线的含义，三角形的内角和定理的应用，如图，过B作 $BG \perp AC$ 于G，交AD于P，此时 $BP + PQ = BP + PG = BG$ ，此时最短，再结合角平分线与三角形的内角和定理可得答案。

【详解】解：如图，过B作 $BG \perp AC$ 于G，交AD于P，



当 $PQ \perp AB$ 时，而AD平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore PQ = PG,$$

$$\therefore BP + PQ = BP + PG = BG, \text{ 此时最短,}$$

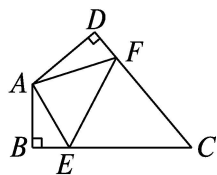
$$\because \angle BAC = 76^\circ, \text{ AD平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ABG = 90^\circ - 76^\circ = 14^\circ, \angle ABP = \frac{1}{2} \angle BAC = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - 14^\circ - 38^\circ = 128^\circ,$$

故答案为：128

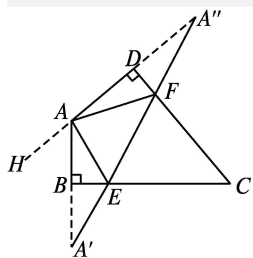
26. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle C=50^\circ$ ， $\angle B=\angle D=90^\circ$ ， E, F 分别是 BC, DC 上的点，当 $\triangle AEF$ 的周长最小时， $\angle EAF$ 的度数为.



【答案】 80°

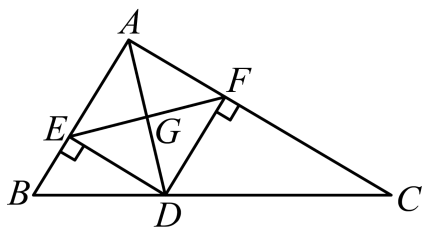
【详解】如图，作点 A 关于 BC 和 CD 的对称点 A' , A'' ，连接 $A'A''$ ，交 BC 于点 E ，交 CD 于点 F ，则 $A'A''$ 即为 $\triangle AEF$ 的周长最小值。作 DA 延长线 AH ，

$\because \angle C = 50^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $\therefore \angle DAB = 360^\circ - \angle ABC - \angle ADC - \angle C = 130^\circ$, $\therefore \angle HAA' = 180^\circ - \angle DAB = 50^\circ$, $\therefore \angle AA'E + \angle A'' = \angle HAA' = 50^\circ$. 由轴对称的性质可得 $\angle EA'A = \angle EAA'$, $\angle FAD = \angle A''$, $\therefore \angle EAA' + \angle A''AF = 50^\circ$, $\therefore \angle EAF = \angle DAB - \angle EAA' - \angle A''AF = 80^\circ$.



【考试题型 10】线段垂直平分线的判定

27. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别是 E , F ，连接 EF ， EF 与 AD 相交于点 G 。求证： AD 是 EF 的垂直平分线。



【答案】见解析

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定和性质，角平分线的性质，线段垂直平分线的判定。根据角平分线的性质可得 $DE = DF$ ，可证明 $\text{Rt} \triangle ADE \cong \text{Rt} \triangle ADF$ ，推出 $AE = AF$ ，据此即可证明 AD 是 EF 的垂直平分线。

【详解】证明： $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$\therefore DE = DF$, $\angle AED = 90^\circ$, $\angle AFD = 90^\circ$,

在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 和 $\text{Rt} \triangle ADF$ 中， $\begin{cases} DE = DF \\ AD = AD \end{cases}$,

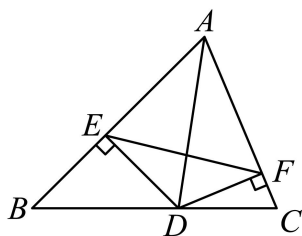
$\therefore \text{Rt} \triangle ADE \cong \text{Rt} \triangle ADF (\text{HL})$,

$\therefore AE = AF$,

$\because DE = DF$,

$\therefore AD$ 是 EF 的垂直平分线.

28. 已知, 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, DE 、 DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高. 求证: AD 垂直平分 EF .



【答案】见解析

【分析】此题考查角平分线的性质和垂直平分线的判定, 关键是找到 $\text{Rt}\triangle AED$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$. 根据三角形的角平分线的性质定理和垂直平分线的性质定理解答.

【详解】证明: 设 AD 、 EF 的交点为 K ,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore DE = DF$.

$\because DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore \angle AED = \angle AFD = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ DE = DF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADF (\text{HL})$,

$\therefore AE = AF$.

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore AD \perp EF$, $EK = KF$,

$\therefore AD$ 是线段 EF 的垂直平分线.

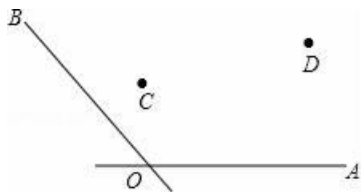
【考试题型 11】线段垂直平分线的实际应用

29. 如图, 两条公路 OA 与 OB 相交于点 O , 在 $\angle AOB$ 的内部有两个小区 C 与 D , 现要修建一个市场 P ,

使市场 P 到两条公路 OA 、 OB 的距离相等，且到两个小区 C 、 D 的距离相等。

(1) 市场 P 应修建在什么位置？（请用文字加以说明）

(2) 在图中标出点 P 的位置（要求：用尺规作图，不写作法，保留作图痕迹，写出结论）。



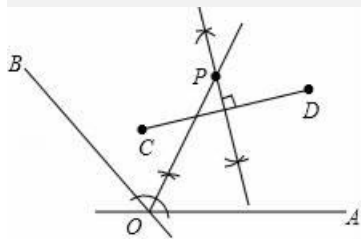
【答案】(1) 详见解析；(2) 详见解析。

【分析】(1) 直接利用角平分线的性质以及线段垂直平分线的性质分析得出答案；

(2) 直接利用角平分线的作法以及线段垂直平分线的作法得出答案。

【详解】(1) 点 P 应修建在 $\angle AOB$ 的角平分线和线段 CD 的垂直平分线的交点处；

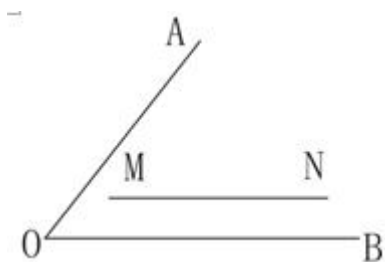
(2) 如图所示：点 P 即为所求。



【点睛】此题主要考查了应用设计与作图，正确掌握角平分线的性质以及线段垂直平分线的性质是解题关键。

30. 按要求作图（用尺规作图，保留作图痕迹，不要求写出作法和证明）。

如图，已知 $\angle AOB$ 和线段 MN ，求作点 P ，使 P 点到 M 、 N 的距离相等，且到角的两边的距离也相等。



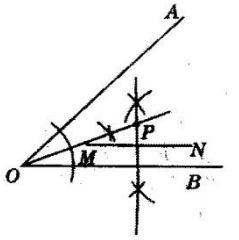
【答案】见解析

【分析】根据题意作出线段 MN 的垂直平分线， $\angle AOB$ 的角平分线，它们的交点即为点 P 。

【详解】(1) 作出 $\angle AOB$ 的平分线。（用尺规作图）

(2) 作出线段 MN 的垂直平分线（用尺规作图）

(3) 两条直线的交点即为 P 点



【点睛】本题考查了尺规作图,作角平分线和中垂线,属于简单题,熟悉尺规作图的方法是解题关键.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872