

## 七上数学重难点解析

### 第4讲 有理数的乘方及混合运算

#### 【思维入门】

1. 若  $a^3 = -8$ ，则  $a$  的绝对值是 ( A )  
A. 2                      B. -2                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{1}{2}$
2. 下列各式：①  $-(-2)$ ；②  $-|-2|$ ；③  $-2^2$ ；④  $-(-2)^2$ ，计算结果为负数的有 ( B )  
A. 4 个                      B. 3 个                      C. 2 个                      D. 1 个
3. 计算： $-3 \times 2 + (-2)^2 - 5 = -7$ .
4. 若  $a, b$  互为相反数， $c, d$  互为倒数，则  $(cd)^{2014} - (a+b)^{2015} = 1$ .  
【解析】 $\because a, b$  互为相反数， $\therefore a+b=0$ .  
 $\because c, d$  互为倒数， $\therefore cd=1$ .  $\therefore (cd)^{2014} - (a+b)^{2015} = 1^{2014} - 0^{2015} = 1 - 0 = 1$ .
5. 计算：

$$(1) -1 - 1 \div 3^2 \times \frac{1}{3^2} + 2; \quad (2) (-3) \times (-2)^2 - (-1)^{99} \div \frac{1}{2}; \quad (3) (-10)^2 - 5 \times (-3 \times 2)^2 + 2^3 \times 10.$$

$$\text{解：}(1) -1 - 1 \div 3^2 \times \frac{1}{3^2} + 2 = -1 - 1 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + 2 = -1 - \frac{1}{81} + 2 = \frac{80}{81};$$

$$(2) (-3) \times (-2)^2 - (-1)^{99} \div \frac{1}{2} = (-3) \times 4 - (-1) \times 2 = -12 - (-2) = -12 + 2 = -10;$$

$$(3) (-10)^2 - 5 \times (-3 \times 2)^2 + 2^3 \times 10 = 100 - 5 \times (-6)^2 + 8 \times 10 = 100 - 5 \times 36 + 80 = 100 - 180 + 80 = 0.$$

#### 【思维拓展】

6. 在  $-\left[-\frac{1}{2}\right]$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $-2^2$ ,  $(-3)^4$ ,  $-|-2|$ ,  $|2^3 - 8|$ ,  $-(-2)^2$  中，是正有理数的有 ( B )  
A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个
7. 已知  $a, b, c, d$  都是有理数，则下列说法正确的是 ( C )  
A. 若  $a > b > c$ ，则  $ab > bc$                       B. 若  $a < b$ ，则  $-ac^2 < -bc^2$   
C. 若  $a > c$ ,  $b > d$ ，则  $a+b > c+d$                       D. 若  $a > c$ ,  $b > d$ ，则  $ab > cd$   
【解析】举反例：A 假设  $b=0$  不成立；B 假设  $c=0$  不成立；D 假设  $a=1, c=-2, b=1, d=-2$ ，则结论也不成立.
8. 有一组等式： $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ ,  $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$ ,  $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$ ,  $4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$ , ... 请你观察它们的构成规律，用你发现的规律写出第 8 个等式为  $8^2 + 9^2 + 72^2 = 73^2$ .  
【解析】观察不难发现，两个连续自然数的平方和加上它们积的平方，等于比它们的积大 1 的数的平方， $\therefore$  第 8 个等式为： $8^2 + 9^2 + (8 \times 9)^2 = (8 \times 9 + 1)^2$ ，即  $8^2 + 9^2 + 72^2 = 73^2$ .
9. 光的速度近似为  $1.08 \times 10^9$  km/h. 若光从太阳到地球需要 8.3 min，则用科学计数法表示太阳与地球之间的距离，应当是  $1.494 \times 10^8$  km.
10. 计算：

$$\left[ (-2)^3 \times \left[ -\frac{1}{2} \right]^2 - 1 \right] \times \left[ -\frac{1}{3} \right]^2 - \left[ (-1) \div \left( -\frac{1}{3} \right) + 1 \right]^2 \div (-8).$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \left[ (-8) \times \frac{1}{4} - 1 \right] \times \left( \frac{16}{9} \right) - [(-1) \times (-3) + 1]^2 \times \left( -\frac{1}{8} \right) \\ &= -3 \times \frac{16}{9} - 16 \times \left( -\frac{1}{8} \right) = -\frac{16}{3} + 2 = -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

【思维升华】

11. 先阅读再计算: 取整符号 $[a]$ 表示不超过实数 $a$ 的最大整数, 例如,  $[3.14]=3$ ,  $[0.618]=0$ . 如果在一系列数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 中, 已知 $x_1=2$ , 且当 $k \geq 2$ 时, 满足 $x_k = x_{k-1} + 1 - 4 \left[ \frac{k-1}{4} \right] - \left[ \frac{k-2}{4} \right]$ , 则求 $x_{2013}$ 的值等于 ( A )
- A. 2                                      B. 3  
C. 2 013                                  D. 2 014

【解析】 $\because x_1=2$ , 且当 $k \geq 2$ 时, 满足 $x_k = x_{k-1} + 1 - 4 \left( \left[ \frac{k-1}{4} \right] - \left[ \frac{k-2}{4} \right] \right)$ ,  
 $\therefore x_2=3, x_3=4, x_4=5, x_5=2, x_6=3, x_7=4, x_8=5, x_9=2, \dots$ ,  
 $\therefore x_n$  每 4 次循环一次,  
 $\because 2013 \div 4 = 503 \dots 1$ ,  
 $\therefore x_{2013} = x_1 = 2$ .

12. 计算机中常用的十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 0~9 和字母 A~F 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

|      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 十六进制 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A  | B  | C  | D  | E  | F  |
| 十进制  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

例如, 用十六进制表示:  $E+F=1D$ , 则  $A \times B =$  ( D )

A. B0                                      B. 1AC                                      C. 5F                                      D. 6E

【解析】 $\because A \times B = 10 \times 11 = 110$ ,  $110 \div 16 = 6$  余 14,  $\therefore$  用十六进制表示 110 为 6E.

13. 张阿姨准备在某商场购买一件衣服、一双鞋和一套化妆品, 这三件物品的原价和优惠方式如下表所示. 请帮张阿姨分析一下, 选择一个最省钱的购买方案. 此时, 张阿姨购买这三件物品实际所付的钱的总数为 ( B )

| 欲购买的物品 | 原价(元) | 优惠方式                                 |
|--------|-------|--------------------------------------|
| 一件衣服   | 420   | 每付现金 200 元, 返购物券 200 元, 且付款时可以使用购物券  |
| 一双鞋    | 280   | 每付现金 200 元, 返购物券 200 元, 但付款时不可以使用购物券 |
| 一套化妆品  | 300   | 付款时可以使用购物券, 但不返购物券                   |

A. 500 元                                      B. 600 元                                      C. 700 元                                      D. 800 元

【解析】 $\because$  买化妆品不返购物券,  $\therefore$  先购买衣服和鞋, 利用所得购物券再买化妆品. 又  $\because$  买衣服返购物券且付款时可以使用购物券, 而买鞋返购物券但不可以使用购物券,  $\therefore$  先买鞋子, 先付现金 280 元可买一双鞋, 同时返购物券 200 元, 再付现金 220 元和一张购物券买衣服, 同时返购物券 200 元, 再付现金 100 元加上买衣服返的购物券 200 元购买化妆品.  
 张阿姨购买这三件物品实际所付出的钱的总数为:  $280 + 220 + 100 = 600$ (元)

## 第5讲 实数的性质

### 【思维入门】

1. 在实数 $-\sqrt{2}$ ,  $0.\dot{3}\dot{1}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $0.801\ 08$ ,  $\sqrt[3]{8}$ 中, 无理数的个数为 ( B )  
A. 1      B. 2      C. 3      D. 4
2. 如图 3-7-1, 数轴上  $A$ ,  $B$  两点表示的数分别为 $\sqrt{2}$ 和  $5.1$ , 则  $AB$  两点之间表示整数的点共有 ( C )

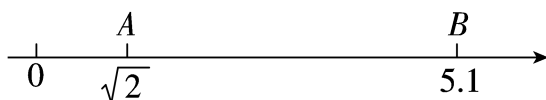


图 3-7-1

3. 如图 3-7-2, 数轴上的点  $A$ ,  $B$  分别对应实数  $a$ ,  $b$ , 下列结论正确的是 ( C )

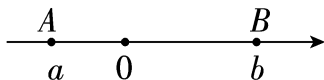


图 3-7-2

- A.  $a > b$       B.  $|a| > |b|$       C.  $-a < b$       D.  $a + b < 0$
4. 四个实数 $-2$ ,  $0$ ,  $-\sqrt{2}$ ,  $1$ 中, 最大的实数是 ( D )  
A.  $-2$       B.  $0$       C.  $-\sqrt{2}$       D.  $1$
5. 如图 3-7-3,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  是数轴上的四个点, 这四个点中最适合表示 $\sqrt{7}$ 的点是  $P$ .

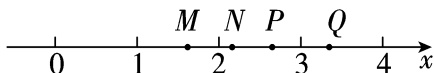


图 3-7-3

6.  $1-\sqrt{3}$  的相反数是  $\sqrt{3}-1$ ,  $\sqrt[3]{-27}$  的绝对值是  $3$ ,  $\sqrt[3]{-64}$  的倒数是  $-\frac{1}{4}$ .

### 【思维拓展】

7.  $\frac{2\sqrt{2}}{5}$  不是 ( A )  
A. 分数      B. 实数      C. 无理数      D. 无限不循环小数
8. 已知实数  $a$  在数轴上的位置如图 3-7-4 所示, 则化简 $|1-a|+\sqrt{a^2}$ 的结果为 ( A )

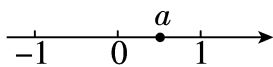


图 3-7-4

- A. 1      B.  $-1$       C.  $1-2a$       D.  $2a-1$

【解析】由数轴上  $a$  点的位置可知  $0 < a < 1$ ,  $\therefore 1-a > 0$ ,  $\therefore$  原式  $= (1-a) + a = 1$ .

9. 若  $0 < x < 1$ , 则  $x$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $x^2$  的大小关系是 ( C )  
A.  $\frac{1}{x} < x < x^2$       B.  $x < \frac{1}{x} < x^2$       C.  $x^2 < x < \frac{1}{x}$       D.  $\frac{1}{x} < x^2 < x$

【解析】 $\because 0 < x < 1$ ,  $\therefore$  可假设  $x = 0.1$ , 则  $\frac{1}{x} = \frac{1}{0.1} = 10$ ,  $x^2 = (0.1)^2 = \frac{1}{100}$ ,

$\therefore \frac{1}{100} < 0.1 < 10$ ,  $\therefore x^2 < x < \frac{1}{x}$ .

10. 规定用符号  $[x]$  表示一个实数的整数部分, 例如  $[3.69] = 3$ ,  $[\sqrt{3}] = 1$ , 按此规定  $[\sqrt{13}-1] = \underline{2}$ .

11. 我们知道，无限循环小数都可以转化为分数．例如，将  $0.\dot{3}$  转化为分数时，可设  $0.\dot{3}=x$ ，则  $x=0.3+\frac{1}{10}x$ ，解得  $x=\frac{1}{3}$ ，即  $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$ ．仿此方法，将  $0.4\dot{5}$  化成分数是  $\frac{5}{11}$ ．

12. 计算： $-6^2 \div \sqrt{(-4)^2} \times \left[ \frac{2}{3} - \frac{2}{9} \right] - 2^3$ ．

解：原式  $= -36 \div 4 \times \frac{4}{9} - 8 = -9 \times \frac{4}{9} - 8 = -12$ ．

13. 现在，人们的生活日益富足，大部分家庭除日常开支外都有节余，节余下的钱存入银行，一来可以支持国家经济建设，二来自己也可获得一部分利息，并且在心理上觉得比放在家里更安全、保险．李先生现有三年不动款 10 000 元，想存入银行，存款方式有以下几种：

- (1) 1 年定期，每年到期后本息转存下年定期；
- (2) 先存 1 年定期，到期后本息转存 2 年定期；
- (3) 先存 2 年定期，到期后本息转存 1 年定期；
- (4) 三年定期，整存整取．

(注：银行的各类定期存款的年利率分别是：定期一年，年利率为 4.14%；定期二年，年利率为 4.68%；定期三年，年利率为 5.40%，另知存款需交利息税，利息税按利息的 20% 交纳．)

问：以上哪种存款方式比较合算，请你帮助李先生谋划一下？

解：方式一： $10\,000 \times (1 + 4.14\% \times 0.8)^3 = 11\,026.9$ (元)，

方式二： $10\,000 \times (1 + 4.14\% \times 0.8) \times (1 + 4.68\% \times 0.8 \times 2) = 11\,104.8$ (元)，

方式三： $10\,000 \times (1 + 4.68\% \times 0.8 \times 2) \times (1 + 4.14\% \times 0.8) = 11\,104.8$ (元)，

方式四： $10\,000 \times (1 + 5.40\% \times 3 \times 0.8) = 11\,296$ (元)，

由此比较，可知第四种方式比较合算．

### 【思维升华】

14. 给出下列关于  $\sqrt{2}$  的判断：①  $\sqrt{2}$  是无理数；②  $\sqrt{2}$  是实数；③  $\sqrt{2}$  是 2 的算术平方根；④  $1 < \sqrt{2} < 2$ ．其中正确的是 ( D )

A. ①④

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

15. 将正整数按表所示的规律排列，并把排在左起第  $m$  列，上起第  $n$  行的数记为  $a_{mn}$ ．

(1) 试用  $m$  表示  $a_{m1}$ ，用  $n$  表示  $a_{1n}$ ；

(2) 当  $m=10$ ， $n=12$  时，求  $a_{mn}$  的值．

解：观察表中正整数的排列规律，可知：

(1) 当  $m$  为奇数时， $a_{m1}=m^2$ ；当  $m$  为偶数时， $a_{m1}=(m-1)^2+1$ ．

当  $n$  为偶数时， $a_{1n}=n^2$ ；当  $n$  为奇数时， $a_{1n}=(n-1)^2+1$ ；

(2) 当  $m=10$ ， $n=12$  时， $a_{mn}$  是左起第 10 列上起第 12 行的数，或第 12 行第 10 列上的数．

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 9  | 10 | 25 |    |
| 4  | 3  | 8  | 11 | 24 |    |
| 5  | 6  | 7  | 12 | 23 |    |
| 16 | 15 | 14 | 13 | 22 |    |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 行第 |

由(1)及表中正整数的排列规律可知，上起第 12 行的第 1 个数为  $12^2=144$ ．

第 12 行中，自左往右从第 1 个数至第 12 个数依次递减 1，所以所求的  $a_{mn}$  为 135．

## 第6讲 整式的加减

### 【思维入门】

- 化简  $-5ab+4ab$  的结果是 ( D )  
A.  $-1$  B.  $a$   
C.  $b$  D.  $-ab$
- 多项式  $1+2xy-3xy^2$  的次数及最高次项的系数分别是 ( A )  
A. 3,  $-3$  B. 2,  $-3$   
C. 5,  $-3$  D. 2, 3
- 若  $2a-b=3$ , 则  $9-4a+2b$  的值为 ( C )  
A. 12 B. 6  
C. 3 D. 0
- 如图 4-8-1, 淇淇和嘉嘉做数学游戏:



图 4-8-1

- 假设嘉嘉抽到牌的点数为  $x$ , 淇淇猜中的结果应为 ( B )
- A. 2 B. 3  
C. 6 D.  $x+3$

**【解析】**  $(x \times 2 + 6) \div 2 - x = x + 3 - x = 3$ .

- 先化简, 再求值:  $(-x^2+5x+4)+(5x-4+2x^2)$ , 其中  $x=-2$ .

**解:**  $(-x^2+5x+4)+(5x-4+2x^2)$   
 $= -x^2+5x+4+5x-4+2x^2 = x(x+10)$ .  
 $\because x=-2, \therefore \text{原式} = -16$ .

### 【思维拓展】

- 若  $A$  和  $B$  都是 6 次多项式, 则 ( D )  
A.  $A-B$  一定是多项式  
B.  $A-B$  是次数不低于 6 的整式  
C.  $A+B$  一定是单项式  
D.  $A+B$  是次数不高于 6 的整式
- 如图 4-8-2, 已知长方体的长、宽、高都是整数厘米, 将长、宽、高都增加 1 cm 后, 长方体的表面可能增加 ( C )

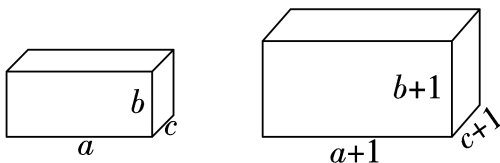


图 4-8-2

- A.  $14 \text{ cm}^2$  B.  $103 \text{ cm}^2$  C.  $214 \text{ cm}^2$  D.  $400 \text{ cm}^2$

【解析】原长方体的表面为： $2ab+2bc+2ac$ .

长、宽、高都增加 1 cm 后表面积： $2(a+1)(b+1)+2(b+1)(c+1)+2(a+1)(c+1)=2ab+2bc+2ac+4(a+b+c)+6$ . 所以表面增加了  $4(a+b+c)+6$ . 又因为  $4(a+b+c) \geq 12$ , 所以排除 A; 又因为  $4(a+b+c)+6$  是偶数, 排除 B;  $4(a+b+c)+6=400$  时,  $a+b+c$  不是整数, 排除 D.

8. 如图 4-8-3 是一个运算程序的示意图, 若开始输入  $x$  的值为 81, 则第 2 014 次输出的结果为 ( D )

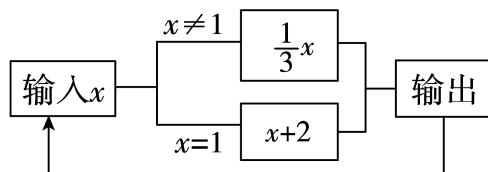


图 4-8-3

- A. 3                      B. 27                      C. 9                      D. 1

【解析】根据运算程序进行计算, 然后得到规律: 从第 4 次开始, 偶数次运算输出的结果是 1, 奇数次运算输出的结果是 3, 然后解答即可.

9. 单项式  $3a^{x-1}b^2$  与  $-a^2b^y$  可以合并成一项, 则  $x+y=$  5.

【解析】∵ 单项式  $3a^{x-1}b^2$  与  $-a^2b^y$  可以合并成一项,

∴ 单项式  $3a^{x-1}b^2$  与  $-a^2b^y$  是同类项,

∴  $x-1=2$ ,  $y=2$ ,

∴  $x=3$ ,  $y=2$ ,

∴  $x+y=5$ .

10. 一组数: 2, 1, 3,  $x$ , 7,  $y$ , 23, ... 满足 “从第三个数起, 前两个数依次为  $a$ ,  $b$ , 紧随其后的数就是  $2a-b$ ”, 例如这组数中的第三个数 “3” 是由 “ $2 \times 2 - 1$ ” 得到的, 那么这组数中  $y$  表示的数为 -9.

【解析】∵ 方法一: 从第三个数起, 前两个数依次为  $a$ ,  $b$ , 紧随其后的数就是  $2a-b$ ,

∴  $2 \times 3 - x = 7$ , ∴  $x = -1$ , 则  $2 \times (-1) - 7 = y$ ,

解得  $y = -9$ .

方法二:  $2 \times 7 - y = 23$ , 解得  $y = -9$ .

11. 观察一系列单项式:  $x$ ,  $3x^2$ ,  $5x^3$ ,  $7x$ ,  $9x^2$ ,  $11x^3$ , ..., 则第 2 016 个单项式是  $4\ 031x^3$ .

12. 有这样一道题: 计算  $(2x^3-3x^2y-2xy^2)-(x^3-2xy^2+y^3)+(-x^3+3x^2y-y^3)$  的值, 其中  $x=-\frac{1}{3}$ ,  $y=-2$ . 甲

同学把 “ $x=-\frac{1}{3}$ ” 错抄成 “ $x=\frac{1}{3}$ ”. 但他计算的结果是正确的, 请你说出这是什么原因?

解:  $(2x^3-3x^2y-2xy^2)-(x^3-2xy^2+y^3)+(-x^3+3x^2y-y^3)$

$=2x^3-3x^2y-2xy^2-x^3+2xy^2-y^3-x^3+3x^2y-y^3=(2-1-1)x^3+(-3+3)x^2y+(-2+2)xy^2+(-1-1)y^3$

$=-2y^3$ . 故代数式的值与  $x$  的取值无关,

所以甲同学把 “ $x=-\frac{1}{3}$ ” 错抄成 “ $x=\frac{1}{3}$ ”, 但他计算的结果是正确的.

#### 【思维升华】

13. 将 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这 8 个数排成一行, 使 8 的两边各数的和相等, 则不同的排列方法有 ( A )

A. 1 152 种

B. 576 种

C. 288 种

D. 144 种

14. 已知当  $x=1$  时,  $3ax^2+bx^2-2cx+4=8$  且  $ax^3+2bx^2-cx-15=-14$ , 那么当  $x=-1$  时, 代数式  $5ax^3-5bx^2-4cx+2\ 020$  的值是 2\ 014.

【解析】由题意, 得  $x=1$  时,  $3a+b-2c=4$ ,

$$a+2b-c=1,$$

$$\text{当 } x=-1 \text{ 时, } 5ax^3-5bx^2-4cx+2020=-5a-5b+4c+2020,$$

$$=-(3a+b-2c)-2(a+2b-c)+2020,$$

$$=-4-2+2020,$$

$$=2014.$$

15. 设四位数 $\overline{abcd}$ 满足  $a^3+b^3+c^3+d^3+1=10c+d$ , 则这样的四位数的个数为 5.

16. 若三位数 $\overline{abc}$ 能被 5 整除, 但不能被 6, 7 整除; 三位数 $\overline{cba}$ 能被 6 整除, 但不能被 5, 7 整除, 三位数 $\overline{cab}$ 能被 7 整除, 但不能被 5, 6 整除, 则 $\overline{abc}=\underline{675}$ .

17. 黑板上写有两个分数:  $\frac{34}{2014}$  和  $\frac{18}{3021}$ , 进行如下操作: 用两数之差的绝对值替换较大的数, 得到新的两个数, 再进行同样的操作, 直到黑板上出现两个相同的数, 则这个相同的数是  $\underline{\frac{1}{1007}}$ .

18. 若正整数  $a, b, c$  满足  $a+2bc=\frac{49}{a}$ , 则  $a+b+c$  的最大值是 26.

19. 已知  $A=by^2-ay-1$ ,  $B=2y^2+3ay-10y-1$ , 且多项式  $2A-B$  的值与字母  $y$  的取值无关, 求  $(2a^2b+2ab^2)-[2(a^2b-1)+3ab^2+2]$  的值.

$$\text{解: } \because 2A-B=2(by^2-ay-1)-(2y^2+3ay-10y-1)=2by^2-2ay-2-2y^2-3ay+10y+1,$$

$$=(2b-2)y^2+(10-5a)y-1,$$

又  $\because$  多项式  $2A-B$  的值与字母  $y$  的取值无关,

$$\therefore 2b-2=0, 10-5a=0,$$

$$\therefore b=1, a=2.$$

$$\text{又 } \because (2a^2b+2ab^2)-[2(a^2b-1)+3ab^2+2]=2a^2b+2ab^2-2a^2b+2-3ab^2-2=-ab^2,$$

$$\text{当 } b=1, a=2 \text{ 时, 原式}=-2 \times 1^2=-2.$$