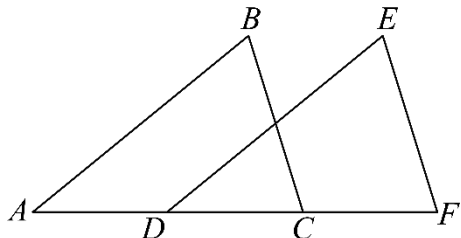


三角形全等重要模型（一）

平移型全等

1. 如图，点 D 、 C 在线段 AF 上， $AD = CF$ ， $AB = DE$ ， $BC = EF$ 。求证： $\angle B = \angle E$ 。



【答案】见解析

【知识点】全等的性质和 SSS 综合（SSS）

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，先结合 $AD = CF$ ，得 $AC = DF$ ，证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS)，即可作答。

【详解】证明： $\because AD = CF$ ，

$$\therefore AD + DC = CF + DC,$$

$$\therefore AC = DF,$$

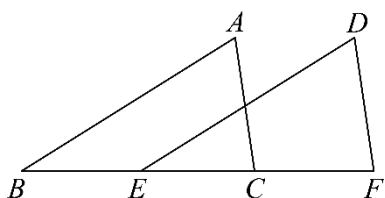
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} AB = DE \\ BC = EF \\ AC = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle B = \angle E.$$

2. 如图，点 B 、 E 、 C 、 F 在一条直线上， $AC = DF$ ， $BE = CF$ ， $AB = DE$ ，求证： $AB \parallel DE$ ， $AC \parallel DF$ 。



【答案】见解析

【知识点】同位角相等两直线平行、全等的性质和 SSS 综合（SSS）

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质以及平行线的判定，熟练掌握全等三角形的判定和性质是关键；

先证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS), 得到 $\angle B = \angle DEF, \angle ACB = \angle F$, 进而得出结论.

【详解】证明: $\because BE = CF$,

$\therefore BC = EF$,

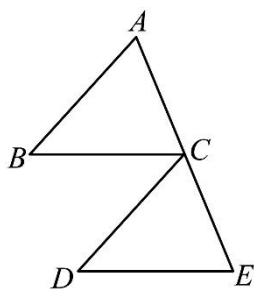
$\because AC = DF, AB = DE$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS)

$\therefore \angle B = \angle DEF, \angle ACB = \angle F$,

$\therefore AB \parallel DE, AC \parallel DF$.

3. 如图, $\triangle ABC$ 的边 AC 与 $\triangle CDE$ 的边 CE 在一条直线上, 且点 C 为 AE 的中点, $AB = CD, BC = DE$.



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle CDE$;

(2) 将 $\triangle ABC$ 沿射线 AC 方向平移得到 $\triangle A'B'C'$, 边 $B'C'$ 与边 CD 的交点为 F , 连接 EF , 若 EF 将 CDE 分为面积相等的两部分, 且 $AB = 4$, 则 $CF =$ _

【答案】(1) 见解析

(2) 2

【知识点】用 SSS 证明三角形全等 (SSS)、利用平移的性质求解

【分析】(1) 首先由点 C 为 AE 的中点得出 $AC = CE$, 再根据 SSS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ 即可;

(2) 根据平移的性质得 $A'B' = CD = AB = 4$, 再由 EF 将 CDE 分为面积相等的两部分得 $CF = DF = \frac{1}{2}CD = 2$

【详解】(1) 证明: $\because$ 点 C 为 AE 的中点,

$\therefore AC = CE$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 中,

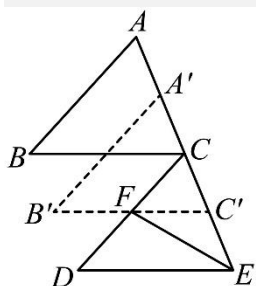
$$\begin{cases} AB = CD \\ BC = DE \\ AC = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDE$

(2) 解: 将 $\triangle ABC$ 沿射线 AC 方向平移得到 $\triangle A'B'C'$, 且 $AB = 4$,

$\therefore A'B' = CD = AB = 4$,

∵ 边 $B'C'$ 与边 CD 的交点为 F ，连接 EF ， EF 将 CDE 分为面积相等的两部分，如图

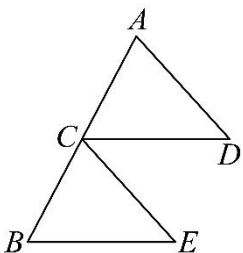


$$\therefore CF = DF = \frac{1}{2}CD = 2,$$

故答案为：2

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定以及平移的性质，根据 SSS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ 是解答本题的关键。

4. 如图，点 C 是线段 AB 的中点， $\angle B = \angle ACD$ ， $AD \parallel CE$ 。求证： $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ 。



【答案】(1) 0；(2) 见解析

【知识点】实数的混合运算、全等的性质和 ASA (AAS) 综合 (ASA 或者 AAS)、零指数幂、负整数指数幂

【分析】本题考查了含有指数的实数混合运算与全等三角形的证明，解题的关键是熟知相关运算法则与三角形全等的判定定理。

(1) 根据负整数指数幂、算术平方根、零指数幂的相关运算法则进行计算即可；

(2) 根据平行线的性质与“角边角”判定三角形全等的定理进行证明即可。

【详解】解：(1) 原式 $= 2 - 3 + 1 = 0$ ；

(2) 证明：∵ 点 C 是 AB 的中点，

$$\therefore AC = CB,$$

$$\because AD \parallel CE,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCE,$$

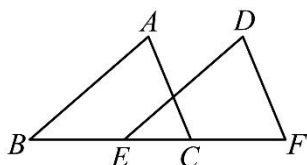
在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle BCE \\ AC = CB \\ \angle ACD = \angle B \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (ASA).$

5. 如图，点 B 、 E 、 C 、 F 在同一条直线上， $AB = DE$ ， $\angle ABC = \angle DEF$ ， $BC = EF$ ，求证：

$\angle A = \angle D$.



【答案】见解析

【知识点】全等的性质和 SAS 综合 (SAS)

【分析】本题考查了平行线的性质，全等三角形的判定及性质是解题的关键，直接证明

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，得 $\angle A = \angle D$.

【详解】证明：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle ABC = \angle DEF \\ BC = EF \end{cases}$$

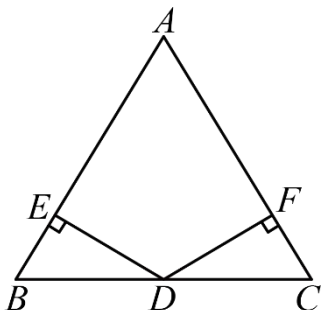
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (SAS),$

$\therefore \angle A = \angle D.$

对称型全等

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 的中点， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，点 E 、 F 为垂足，且 $DE = DF$.

求证： $\triangle BED \cong \triangle CFD$.



【答案】见解析

【知识点】用 HL 证全等 (HL)

【分析】本题考查全等三角形的判定，根据“HL”证明即可.

【详解】证明： $\because DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，点 E 、 F 为垂足，

$\therefore \angle BED = \angle CFD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle BED$ 和 $\triangle CFD$ 均为直角三角形.

$\because D$ 为 BC 的中点，

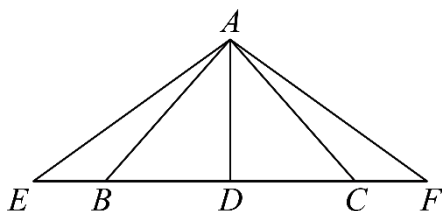
$\therefore BD = CD$.

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 和 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ DE = DF \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle CFD (\text{HL})$.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线，延长 CB 至点 E ，延长 BC 至点 F ，使 $BE = CF$ ，连接 AE 、 AF 。求证： AD 平分 $\angle EAF$ 。



【答案】见详解

【知识点】全等的性质和 SAS 综合 (SAS)、等腰三角形的性质和判定、三线合一

【分析】本题考查等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，关键是熟悉等腰三角形的性质，根据等腰三角形的性质得出 $BD = DC$ ， $AD \perp BC$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，再利用全等三角形的判定和性质证明即可。

【详解】证明： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线，

$\therefore BD = DC$ ， $AD \perp BC$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $\angle ABD = \angle ACD$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle ACF$ ，

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACF$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle ABE = \angle ACF \\ BE = CF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF (\text{SAS})$ ，

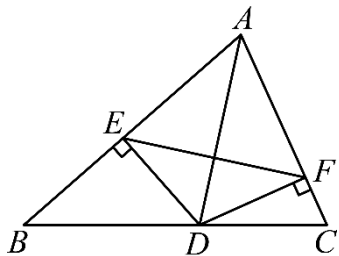
$\therefore \angle BAE = \angle CAF$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle BAD = \angle CAF + \angle CAD$ ，

即 $\angle EAD = \angle FAD$,

即 AD 平分 $\angle EAF$.

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F . 求证: AD 垂直平分 EF .



【答案】见详解

【知识点】全等的性质和 HL 综合 (HL)、角平分线的性质定理、线段垂直平分线的判定

【分析】本题主要考查了角平分线的性质, 全等三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的判定等知识点, 解题的关键是熟练掌握以上性质, 并灵活应用.

根据角平分线的性质得出 $DE = DF$, 证明出 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADF$, 得到 $AE = AF$, 利用到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上即可得出结论.

【详解】证明: $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线, 且 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore DE = DF$,

$\therefore$ 点 D 在线段 EF 的垂直平分线上,

又 $\because AD = AD$,

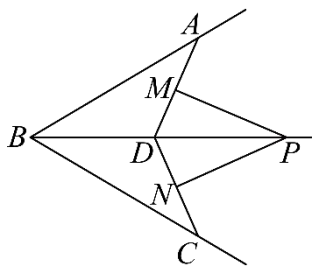
$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADF (\text{HL})$,

$\therefore AE = AF$,

$\therefore$ 点 A 在线段 EF 的垂直平分线上,

$\therefore AD$ 垂直平分 EF .

9. 如图, BP 是 $\angle ABC$ 内部的一条射线, 点 D 在 BP 上, 连接 AD 、 CD , $AD = CD$, 过点 P 作 $PM \perp AD$, $PN \perp CD$, M , N 分别是垂足, 且 $PM = PN$, 求证: BP 平分 $\angle ABC$.



【答案】见解析

【知识点】全等的性质和 SAS 综合 (SAS)、角平分线的性质定理

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，角平分线的判定定理，熟练掌握角平分线的判定定理是解题关键；

先由角平分线的性质定理得到 $\angle ADP = \angle CDP$ ，再证明 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SAS)，得到 $\angle ABP = \angle CBP$ ，即可证明结论。

【详解】证明： $\because PM \perp AD, PN \perp CD, PM = PN$ ，

$\therefore DP$ 为 $\angle ADC$ 的角平分线，

$\therefore \angle ADP = \angle CDP$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle CDB$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中，

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADB = \angle CDB \\ BD = BD \end{cases}$$

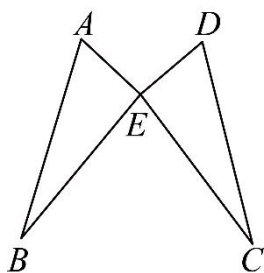
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SAS)，

$\therefore \angle ABP = \angle CBP$ ，

$\therefore BP$ 平分 $\angle ABC$ 。

10. 如图，已知线段 AC 、 BD 相交于点 E ， $AE = DE$ ， $BE = CE$ 。

求证： $AB = DC$ 。



【答案】证明见解析

【知识点】全等的性质和 SAS 综合 (SAS)

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，熟练掌握全等三角形的几种判定方法及性质是解题的关键。

根据“边角边”证明 $\triangle AEB \cong \triangle DEC$ ，再由全等三角形对应边相等即可证明。

【详解】证明： $\because$ 线段 AC 、 BD 相交于点 E ，

$\therefore \angle AEB = \angle DEC$ ，

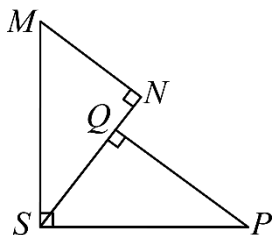
$\because AE = DE, BE = CE$ ，

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DEC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = DC.$$

旋转型全等

11. 已知：如图， $MS \perp PS$ ， $MN \perp SN$ ， $PQ \perp SN$ ，垂足分别为 S 、 N 、 Q ，且 $MS = PS$ ，
求证： $\triangle MNS \cong \triangle SQP$ 。



【答案】证明见解析

【知识点】垂线的定义理解、全等的性质和 ASA (AAS) 综合 (ASA 或者 AAS)

【分析】本题考查了垂直、三角形全等的判定，熟练掌握三角形全等的判定方法是解题关键。先根据垂直的定义可得 $\angle N = \angle SQP = \angle MSP = 90^\circ$ ，再证出 $\angle M = \angle PSQ$ ，然后根据 AAS 定理即可得证。

【详解】证明： $\because MS \perp PS$ ， $MN \perp SN$ ， $PQ \perp SN$ ，

$$\therefore \angle N = \angle SQP = \angle MSP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle M + \angle MSN = 90^\circ = \angle PSQ + \angle MSN,$$

$$\therefore \angle M = \angle PSQ,$$

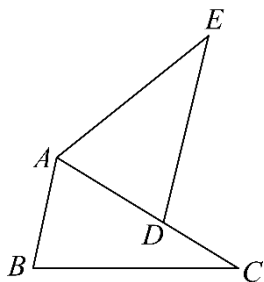
在 $\triangle MNS$ 和 $\triangle SQP$ 中，

$$\begin{cases} \angle N = \angle SQP = 90^\circ \\ \angle M = \angle PSQ \\ MS = SP \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MNS \cong \triangle SQP (\text{AAS}).$$

12. 如图， $DE \parallel AB$ ， $DE = AC$ ，点 D 在 AC 上，且 $AD = AB$ 。

求证： $\angle EAD = \angle CBA$ 。



【答案】见解析

【知识点】两直线平行内错角相等、全等的性质和 SAS 综合（SAS）

【分析】此题考查平行线的性质、全等三角形的判定与性质等知识，推导出 $\angle ADE = \angle BAC$ ，进而证明 $\triangle DAE \cong \triangle ABC$ 是解题的关键。

由 $DE \parallel AB$ ，得 $\angle ADE = \angle BAC$ ，而 $DE = AC$ ， $DA = AB$ ，即可根据“SAS”证明 $\triangle DAE \cong \triangle ABC$ ，则 $\angle EAD = \angle CBA$ 。

【详解】证明： $\because DE \parallel AB$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle BAC$ ，

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle ABC$ 中，

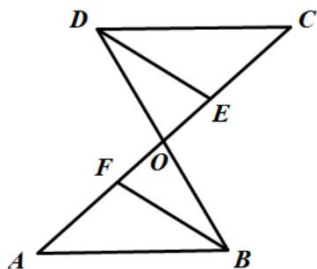
$$\begin{cases} DE = AC \\ \angle ADE = \angle BAC, \\ DA = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ABC$ (SAS)，

$\therefore \angle EAD = \angle CBA$ 。

13. 如图， AC 和 BD 相交于点 O ， $CD \parallel AB$ ， $CD = AB$ ， $OE = OF$ 。

求证 $CE = AF$ 。



【答案】见解析

【知识点】全等的性质和 ASA（AAS）综合（ASA 或者 AAS）

【分析】此题考查了全等三角形的判定和性质。证明 $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (AAS)，则 $AO = CO$ ，利用线段的差即可证明结论。

【详解】证明： $\because CD \parallel AB$ ，

$\therefore \angle C = \angle A$ ，

$\because CD = AB$ ， $\angle AOB = \angle COD$ ，

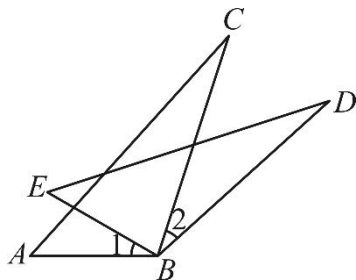
$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$ (AAS)

$\therefore AO = CO$ ，

$\therefore OE = OF$,
 $\therefore AO - OF = CO - OE$
 $\therefore CE = AF$.

14. 如图, $BA = BE$, $\angle 1 = \angle 2$, $BC = BD$.

求证: $\triangle ABC \cong \triangle EBD$.



【答案】见解析

【知识点】全等的性质和 SAS 综合 (SAS)

【分析】本题考查了全等三角形的判定, 先证明 $\angle ABC = \angle EBD$, 进而根据 SAS 即可证明

$\triangle ABC \cong \triangle EBD$.

【详解】证明: $\because \angle 1 = \angle 2$,

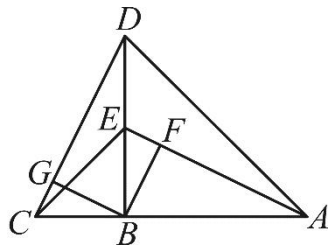
$\therefore \angle 1 + \angle EBC = \angle 2 + \angle EBC$, 即 $\angle ABC = \angle EBD$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EBD$ 中,

$$\begin{cases} BA = BE \\ \angle ABC = \angle EBD \\ BC = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EBD$ (SAS)

15. 如图, 点 B 在线段 AC 上, 点 E 在线段 BD 上, DB 为 $\triangle ACD$ 的高, $AB = DB$, $EB = CB$.



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle DBC$;

(2) 如图: $BF \perp AE$ 于 F , $BG \perp CD$ 于 G , 探究 BF 与 BG 的关系, 并证明你的结论.

【答案】(1) 见解析

(2) $BF = BG$ 且 $BF \perp BG$, 证明见解析

【知识点】全等的性质和 SAS 综合 (SAS)、全等的性质和 HL 综合 (HL)

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定和性质：

(1) 利用SAS证明 $\triangle ABE \cong \triangle DBC$ ，即可；

(2) 根据全等三角形的性质可得 $AE = CD$ ， $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DBC}$ ，再由 $\frac{1}{2} BF \times AE = \frac{1}{2} BG \times CD$ ，可得 $BF = BG$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle BEF \cong \text{Rt}\triangle BCG$ ，可得 $\angle EBF = \angle CBG$ ，即可解答.

【详解】(1) 证明： $\because DB$ 为 $\triangle ACD$ 的高，

$$\therefore \angle ABE = \angle CBD = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 和 $\text{Rt}\triangle EBA$ 中，

$$\because AB = DB, \angle ABE = \angle CBD = 90^\circ, EB = CB,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC \text{ (SAS)};$$

(2) 解： $BF = BG$ 且 $BF \perp BG$ ，证明如下：

$$\because \triangle ABE \cong \triangle DBC,$$

$$\therefore AE = CD, S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DBC},$$

$$\because BF \perp AE, BG \perp CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} BF \times AE = \frac{1}{2} BG \times CD,$$

$$\therefore BF = BG,$$

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 和 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中，

$$\because EB = CB, BF = BG,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BEF \cong \text{Rt}\triangle BCG \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle EBF = \angle CBG,$$

$$\therefore \angle EBF + \angle EBG = \angle CBG + \angle EBG = \angle CBD = 90^\circ,$$

即 $BF \perp BG$ ，

综上所述， BF 与 BG 的关系为 $BF = BG$ 且 $BF \perp BG$.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872