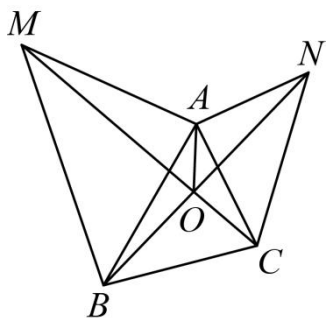


三角形全等重要模型（三）答案与解析

手拉手全等模型

1. 已知：如图，分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 为腰向外作等腰直角 $\triangle ABM$ 、等腰直角 $\triangle ACN$ ，连接 MC 、 NB ， MC 、 NB 相交于点 O ，连接 AO ，① $MC = NB$ ，② $\triangle BOM \cong \triangle CON$ ，③ $MC \perp NB$ ，④ AO 平分 $\angle MON$ ，⑤ AO 平分 $\angle BAC$ ，则以上结论正确的有（ ）



A. ①③⑤

B. ②③④

C. ③④⑤

D. ①③④

【答案】D

【详解】解： $\because \triangle ABM$ 和 $\triangle ACN$ 都是等腰直角三角形， $\therefore AB = AM, AN = AC$ ，

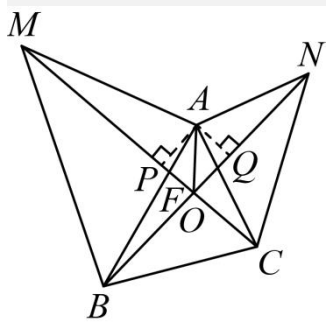
又 $\because \angle BAM = \angle CAN = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BAM + \angle BAC = \angle CAN + \angle BAC$ ，

即 $\angle MAC = \angle BAN$ ， $\therefore \triangle ABN \cong \triangle AMC$ ， $\therefore BN = MC$ ，①正确；

$\because \triangle ABN \cong \triangle AMC$ ， $\therefore \angle ABN = \angle AMC$ ，又 $\because \angle BFO = \angle MFA$ ， $\angle AMF + \angle MFA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABN + \angle BFO = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BOF = \angle MAF = 90^\circ$ ，即 $BN \perp MC$ ，③正确；

过点 A 分别作 $AP \perp CM, AQ \perp BN$ ，垂足为点 P, Q 。



$\because \triangle ABN \cong \triangle AMC$ ， $\therefore S_{\triangle ABN} = S_{\triangle AMC}$ ， $\therefore \frac{1}{2} MC \cdot AP = \frac{1}{2} BN \cdot AQ$ ， $\therefore AP = AQ$ ，

$\therefore$ 点 A 在 $\angle MON$ 的平分线上，即 OA 平分 $\angle MON$ ，④正确。故选：D。

2. 如图1，等边 $\triangle ABC$ 与等边 $\triangle DCP$ 的顶点 B, C, P 三点在一条直线上，连接 AP 交 BD 于 E 点，连 EC 。

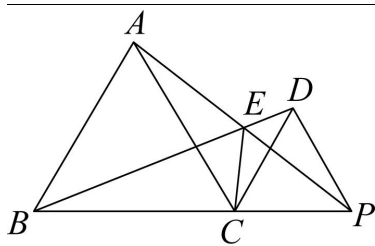
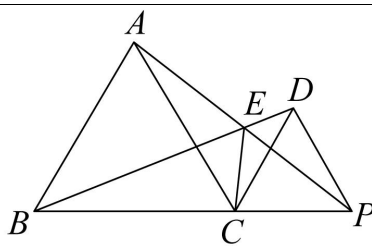


图1



备用图

(1)求证: $AP = BD$; (2)求证: EC 平分 $\angle BEP$;

(3)设 $AE = a$, $DE = b$, $CE = c$, 若 $BP = 4CP$, 直接写出 a, b, c 之间满足的数量关系.

【答案】(1)见解析(2)见解析(3) $a - 3b = 2c$

【详解】(1) 证明: $\because$ 等边 $\triangle ABC$ 与等边 $\triangle DCP$ 的顶点 B, C, P 三点在一条直线上,

$\therefore \angle ACB = \angle DCP = 60^\circ$, $\angle BCP = 180^\circ$, $\therefore \angle ACD = 180^\circ - \angle DCP - \angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore \angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 120^\circ$, $\angle ACP = \angle DCP + \angle ACD = 120^\circ$, $\therefore \angle BCD = \angle ACP$,

$\because$ 等边 $\triangle ABC$, 等边 $\triangle DCP$, $\therefore BC = AC$, $DC = PC$,

在 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ACP$ 中, $\therefore \begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACP \\ CD = CP \end{cases}$, $\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACP$ (SAS), $\therefore AP = BD$.

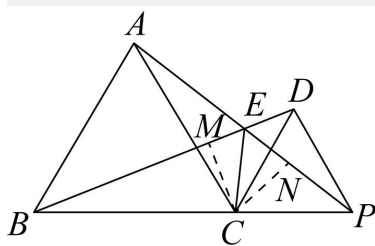


图1

(2) 证明: 如图 1, 过点 C 作 $CM \perp BD$ 交 BD 于点 M , 过点 C 作 $CN \perp AP$ 交 AP 于点 N ,

$\because$ (1) 中已证 $\triangle BCD \cong \triangle ACP$, 又 $\because CM \perp BD$, $CN \perp AP$, $\therefore CM = CN$,

$\because CM \perp BD$, $CN \perp AP$, $\therefore EC$ 平分 $\angle BEP$.

(3) $a - 3b = 2c$, 理由如下: 如图 2, 过点 C 作 $CM \perp BD$ 交 BD 于点 M , 过点 C 作 $CN \perp AP$ 交 AP 于点 N , 在 EB 上截取一点 F , 使得 $AE = EF$, 在 EP 上截取一点 G , 使得 $ED = EG$, 连接 AF , DG ,

$\because \triangle BCD \cong \triangle ACP$, $\therefore \angle BDC = \angle APC$, $\because \angle DBC + \angle BDC = \angle DCP$,

又 $\because$ 等边 $\triangle DCP$, $\therefore \angle DCP = 60^\circ$, $\therefore \angle DBC + \angle BDC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BDC = \angle APC$, $\therefore \angle DBC + \angle APC = 60^\circ$, 即 $\angle AEB = 60^\circ$,

$\because AE = EF$, $\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形, $\therefore \angle FAE = 60^\circ$, $AF = AE$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle BAC = 60^\circ$, $BA = CA$, $\therefore \angle BAC - \angle FAC = \angle FAE - \angle FAC$,

即 $\angle BAF = \angle CAE$ ，在 $\triangle BAF$ 与 $\triangle CAE$ 中， $\therefore \begin{cases} BA = CA \\ \angle BAF = \angle CAE \\ AF = AE \end{cases}$

$\therefore \triangle BAF \cong \triangle CAE$ (SAS), $\therefore BF = CE$. $\because AE = EF = a$, $CE = c$, $\therefore BE = BF + EF = CE + AE = c + a$,

同法可证, $EP = EG + GP = ED + CE = b + c$, $\therefore BP = 4CP$, $\therefore BC = 3CP$.

$\because CM \perp BD$, $CN \perp AP$, $\therefore \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle ECP}} = \frac{\frac{1}{2} BE \cdot CM}{\frac{1}{2} PE \cdot CN} = \frac{BC}{CP} = 3$,

$\because$ (2) 中已证 $CM = CN$, $\therefore \frac{BE}{PE} = 3$, $\therefore c + a = 3(b + c)$, 即 $a - 3b = 2c$.

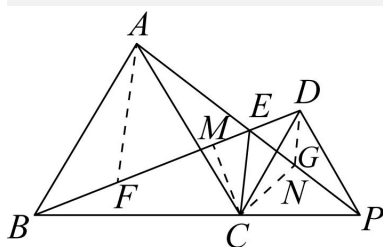


图2

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 为锐角, 点 D 为直线 BC 上一动点, 以 AD 为直角边且在 AD 的右侧作等腰直角三角形 ADE , $\angle DAE = 90^\circ$, $AD = AE$.

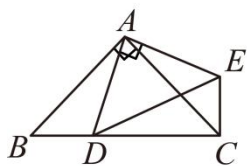


图1

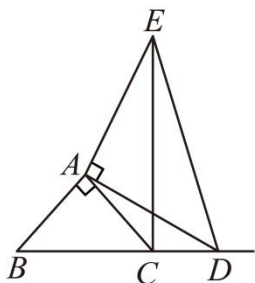


图2

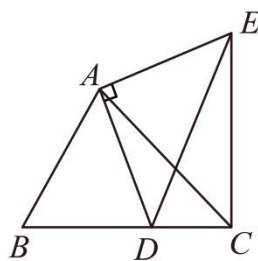


图3

(1) 如果 $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$. ① 当点 D 在线段 BC 上时, 如图 1, 线段 CE 、 BD 的位置关系为

_____, 数量关系为 _____; ② 当点 D 在线段 BC 的延长线上时, 如图 2, ① 中的结论是否仍然成

立, 请说明理由. (2) 如图 3, 如果 $AB \neq AC$, $\angle BAC \neq 90^\circ$, 点 D 在线段 BC 上运动. 探究: 当 $\angle ACB$ 多少度时, $CE \perp BC$? 请说明理由.

【答案】 (1) ① $CE \perp BD$, $CE = BD$; ② 仍然成立, 理由见解析 (2) 当 $\angle ACB = 45^\circ$ 时, $CE \perp BD$, 理由见解析

【详解】 (1) 解: ① CE 与 BD 位置关系是 $CE \perp BD$, 数量关系是 $CE = BD$.

理由: $\because \angle BAD = 90^\circ - \angle DAC$, $\angle CAE = 90^\circ - \angle DAC$, $\therefore \angle BAD = \angle CAE$.

又 $BA = CA$, $AD = AE$, $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), $\therefore \angle ACE = \angle B = 45^\circ$ 且 $CE = BD$.

$\therefore \angle ACB = \angle B = 45^\circ$, $\therefore \angle ECB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, 即 $CE \perp BD$. 故答案为: $CE \perp BD$, $CE = BD$;

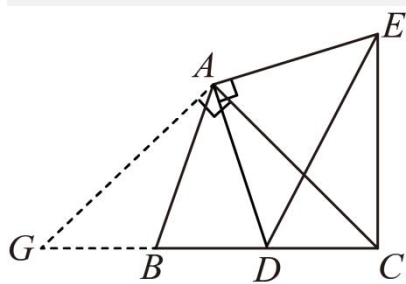
②都成立 $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $\therefore \angle BAC + \angle DAC = \angle DAE + \angle DAC$, $\therefore \angle BAD = \angle CAE$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中,
$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AB = AC \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$\therefore CE = BD$, $\angle B = \angle ACE$, $\therefore \angle ACB + \angle ACE = 90^\circ$, 即 $CE \perp BD$.

(2) 解: 当 $\angle ACB = 45^\circ$ 时, $CE \perp BD$.

理由: 过点 A 作 $AG \perp AC$ 交 CB 的延长线于点 G , 则 $\angle GAC = 90^\circ$,



$\because \angle ACB = 45^\circ$, $\therefore \angle AGC = 90^\circ - \angle ACB = 45^\circ$, $\therefore \angle ACB = \angle AGC = 45^\circ \therefore AC = AG$,

在 $\triangle GAD$ 与 $\triangle CAE$ 中,
$$\begin{cases} AC = AG \\ \angle DAG = \angle EAC \\ AD = AE \end{cases} \therefore \triangle GAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$\therefore \angle ACE = \angle AGC = 45^\circ$, $\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, 即 $CE \perp BC$.

4. 已知: $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDE$ 都是等腰三角形. $BA = BC$, $BD = BE$ ($AB > BD$) 且有 $\angle ABC = \angle DBE$.

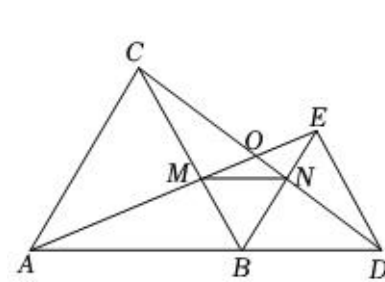


图1

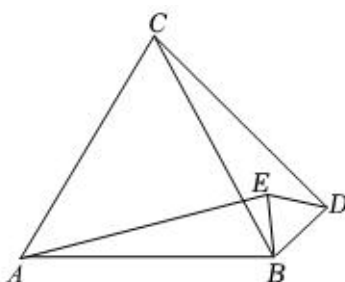


图2

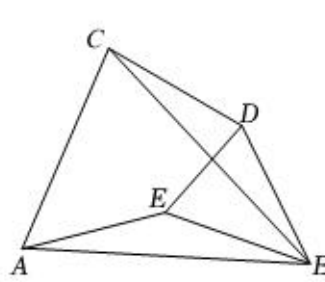


图3

(1) 如图1, 如果 A 、 B 、 D 在一直线上, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 求证: $\triangle BMN$ 是等边三角形;

(2) 在第(1)问的情况下, 直线 AE 和 CD 的夹角是 60° ;

(3) 如图2, 若 A 、 B 、 D 不在一直线上, 但 $\angle ABC = 60^\circ$ 的条件不变则直线 AE 和 CD 的夹角是 60° ;

(4) 如图3, 若 $\angle ACB = 60^\circ$, 直线 AE 和 CD 的夹角是 60° .

【答案】(1) 证明见解析；(2) 60；(3) 60；(4) 60；

【详解】(1) $\because \angle ABC = \angle DBE = 60^\circ \therefore \angle MBN = 180^\circ - \angle ABC - \angle DBE = 60^\circ$,

$\angle ABE = \angle ABC + \angle MBN$, $\angle DBC = \angle DBE + \angle MBN \therefore \angle ABE = \angle DBC \quad \because BA = BC, BD = BE$

$$\triangle ABE \text{ 和 } \triangle CBD \text{ 中 } \begin{cases} BA = BC \\ \angle ABE = \angle DBC \\ BE = BD \end{cases} \therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD \therefore \angle BAE = \angle BCD$$

$$\triangle BAM \text{ 和 } \triangle BCN \text{ 中 } \begin{cases} \angle BAE = \angle BCD \\ AB = BC \\ \angle ABC = \angle MBN = 60^\circ \end{cases} \therefore \triangle BAM \cong \triangle BCN \therefore BM = BN \therefore \triangle BMN \text{ 为等边三角形；}$$

(2) $\because \angle ABC = \angle DBE = 60^\circ, BA = BC \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形； $\therefore \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$

根据题意， AE 和 CD 相交于点 $O \quad \because \angle BAE = \angle BCD$

$\therefore \angle AOD = \angle OAC + \angle ACO = \angle OAC + \angle BCA + \angle BCD = \angle OAC + \angle BCA + \angle BAE$

$\because \angle OAC + \angle BAE = \angle BAC \therefore \angle AOD = \angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$

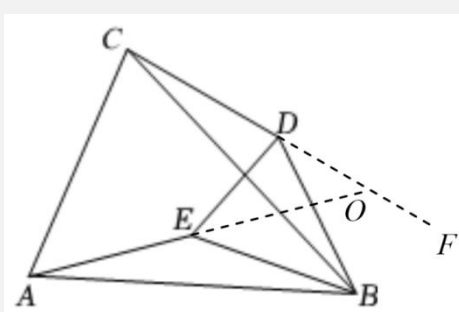
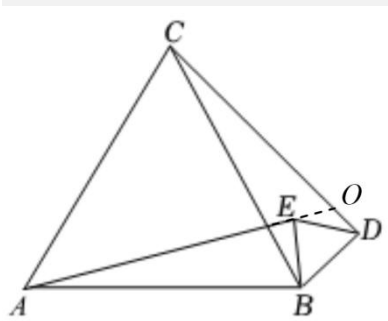
$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle AOD = 60^\circ$ ，即直线 AE 和 CD 的夹角是 60° 故答案为：60；

(3) $\because \angle ABC = \angle DBE = 60^\circ, BA = BC \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形； $\therefore \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$

$\because \angle ABE = \angle ABC + \angle MBN$, $\angle DBC = \angle DBE + \angle MBN$, $\angle ABC = \angle DBE = 60^\circ \therefore \angle ABE = \angle DBC$

$$\because BA = BC, BD = BE \quad \triangle ABE \text{ 和 } \triangle CBD \text{ 中 } \begin{cases} BA = BC \\ \angle ABE = \angle DBC \\ BE = BD \end{cases} \therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD \therefore \angle BAE = \angle BCD$$

如图，延长 AE ，交 CD 于点 O



$\therefore \angle AOD = \angle OAC + \angle ACO = \angle OAC + \angle BCA + \angle BCD = \angle OAC + \angle BCA + \angle BAE$

$\because \angle OAC + \angle BAE = \angle BAC \therefore \angle AOD = \angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$

$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle AOD = 60^\circ$ ，即直线 AE 和 CD 的夹角是 60° 故答案为：60；

(4) $\because BA = BC$, $\therefore \angle ACB = \angle CAB \quad \because \angle ACB = 60^\circ \therefore \angle ACB = \angle CAB = 60^\circ \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形

$\because BD = BE$, $\angle ABC = \angle DBE \therefore \angle DBE = 60^\circ$

$\because \angle ABE = \angle ABC - \angle CBE$, $\angle CBD = \angle DBE - \angle CBE \therefore \angle ABE = \angle CBD$

$$\triangle ABE \text{ 和 } \triangle CBD \text{ 中 } \begin{cases} BA = BC \\ \angle ABE = \angle DBC \\ BE = BD \end{cases} \therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD \therefore \angle BAE = \angle BCD$$

分别延长 CD 、 AE ，相较于点 O ，如下图：

$$\therefore \angle AOF = \angle OAC + \angle ACO = \angle OAC + \angle BCA + \angle BCD = \angle OAC + \angle BCA + \angle BAE$$

$$\therefore \angle OAC + \angle BAE = \angle BAC \therefore \angle AOF = \angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle AOF = 60^\circ, \text{ 即直线 } AE \text{ 和 } CD \text{ 的夹角是 } 60^\circ \text{ 故答案为: } 60.$$

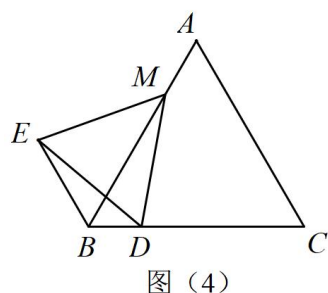
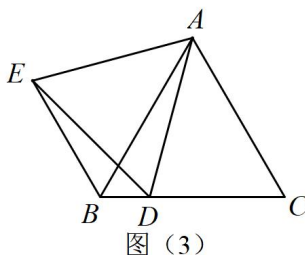
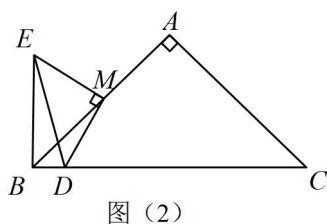
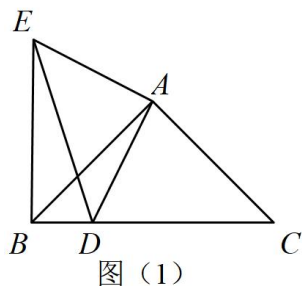
5. 【知识背景】我们在第十一章《三角形》中学习了三角形的边与角的性质，在第十二章《全等三角形》中学习了全等三角形的性质和判定，在第十三章《轴对称》中学习了等腰三角形的性质和判定．在一些探究题中经常用以上知识转化角和边，进而解决问题．

(1) 【问题初探】如图 (1)， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 是 BC 上一点，连接 AD ，以 AD 为一边作 $\triangle ADE$ ，使 $\angle DAE = 90^\circ$ ， $AD = AE$ ，连接 BE ，猜想 BE 和 CD 有怎样的数量关系，并说明理由．

(2) 【类比再探】如图 (2)， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 M 是 AB 上一点，点 D 是 BC 上一点，连接 MD ，以 MD 为一边作 $\triangle MDE$ ，使 $\angle DME = 90^\circ$ ， $MD = ME$ ，连接 BE ，则 $\angle EBD =$ _____．（直接写出答案，不写过程；需要作辅助线的，请说明辅助线的作法，并在图 (2) 中作出辅助线）

(3) 【方法迁移】如图 (3)， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 是 BC 上一点，连接 AD ，以 AD 为一边作等边三角形 ADE 连接 BE ，则 BD ， BE ， BC 之间有怎样的数量关系？（直接写出答案，不写过程）．

(4) 【数学思考】如图 (4)， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 M 是 AB 上一点，点 D 是 BC 上一点，连接 MD ，以 MD 为一边作等边三角形 MDE ，连接 BE 猜想 $\angle EBD$ 的度数，并说明理由．

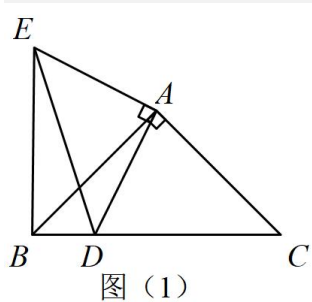


【答案】(1) $BE=CD$. 证明见详解; (2) 90° ; (3) $BC=BD+BE$. 证明见详解; (4) $\angle EBD=120^\circ$.

【详解】(1) 证明: 问题初探: $BE=CD$. 如图 (1), $\because \angle DAE = \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAD$, $\therefore \angle BAE = \angle CAD$,

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAD$ 中,
$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAD, \therefore \triangle BAE \cong \triangle CAD \text{ (SAS)}, \therefore BE = CD; \\ AE = AD \end{cases}$$



(2) 解: 在图 (2) 中过点 M 作 $MF \parallel AC$ 交 BC 于点 F,

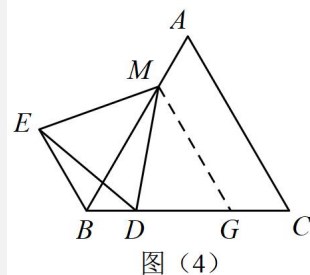
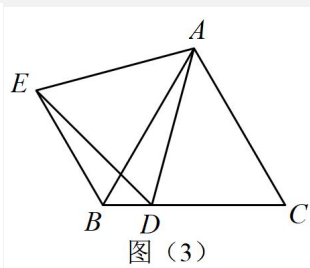
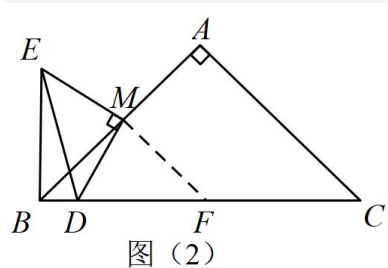
$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, $\therefore \angle ACB = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 45^\circ$,

$\because MF \parallel AC$, $\therefore \angle BMF = \angle A = 90^\circ$, $\angle BFM = \angle C = 45^\circ$, $\therefore MB = MF$,

$\because \angle DME = \angle BMF = 90^\circ$, $\therefore \angle BME = \angle DMF$,

在 $\triangle BME$ 和 $\triangle FMD$ 中,
$$\begin{cases} MB = MF \\ \angle BME = \angle FMD, \therefore \triangle BME \cong \triangle FMD \text{ (SAS)}, \\ ME = MD \end{cases}$$

$\therefore \angle MBE = \angle MFD = 45^\circ$; $\therefore \angle EBD = \angle MBE + \angle ABC = 90^\circ$. 故答案为: 90° ;



(3) 解: $BC = BD + BE$. 如图 (3), $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DAE = \angle BAC = 60^\circ$, $\therefore \angle BAE + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAD = 60^\circ$, $\therefore \angle BAE = \angle CAD$,

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAD$ 中,
$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAD, \therefore \triangle BAE \cong \triangle CAD \text{ (SAS)}, \therefore BE = CD, \therefore BC = BD + CD = \\ AE = AD \end{cases}$$

$BD + BE$;

(4) 拓展创新: $\angle EBD = 120^\circ$. 理由: 在图 (4) 中过点 M 作 $MG \parallel AC$ 交 BC 于点 G,

如图则 $\angle BMG = \angle A = 60^\circ$, $\angle BGM = \angle C = 60^\circ$, $\therefore \triangle BMG$ 是等边三角形, $\therefore BM = GM$,

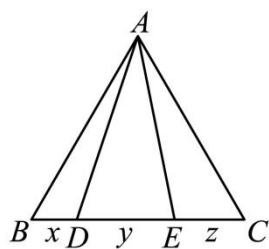
$\because \angle DME = \angle BMG = 60^\circ$, $\therefore \angle BME + \angle BMD = \angle BMD + \angle GMD = 60^\circ$, $\therefore \angle BME = \angle DMG$,

在 $\triangle BME$ 和 $\triangle GMD$ 中,
$$\begin{cases} MB = MG \\ \angle BME = \angle GMD, \therefore \triangle BME \cong \triangle GMD \text{ (SAS)}, \\ ME = MD \end{cases}$$

$\therefore \angle MBE = \angle MGB = 60^\circ$, $\therefore \angle EBD = \angle MBE + \angle MBG = 120^\circ$.

半角模型

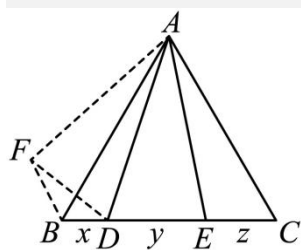
6. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 在 BC 边上取两点 D 、 E , 使 $\angle DAE = 30^\circ$. 若 $BD = x$, $DE = y$, $CE = z$, 则以 x 、 y 、 z 为边长的三角形的形状为 ()



A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 随 x 、 y 、 z 的值而定

【答案】C

【详解】解: 如图所示: 将 $\triangle AEC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AFB$, 连接 FD ,



由旋转性质可知, $AF = AE$, $BF = CE = z$, $\angle BAF = \angle CAE$, $\angle ABF = \angle ACE$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$, $\because \angle DAE = 30^\circ$, $\therefore \angle BAD + \angle CAE = 30^\circ$,

$\therefore \angle DAF = \angle BAD + \angle BAF = \angle BAD + \angle CAE = 30^\circ$, $\therefore \angle DAF = \angle DAE = 30^\circ$,

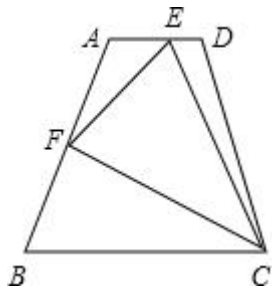
在 $\triangle DAF$ 与 $\triangle DAE$ 中,
$$\begin{cases} AF = AE \\ \angle DAF = \angle DAE, \therefore \triangle DAF \cong \triangle DAE \text{ (SAS)}, \therefore DF = DE = y, \\ AD = AD \end{cases}$$

$\because \angle ABF = \angle ACB = 60^\circ$, $BF = CE = z$, $\therefore \angle DBF = \angle ABF + \angle ABC = 120^\circ$,

$\therefore$ 以 x 、 y 、 z 为边长的三角形的形状为钝角三角形, 故选: C.

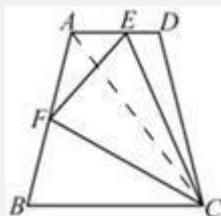
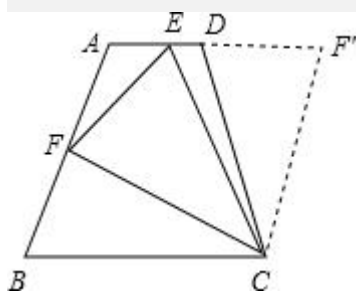
7.如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = BC = DC$ ，点 E 、 F 分别在 AD 、 AB 上，且 $\angle FCE = \frac{1}{2} \angle BCD$ 。

(1) 求证： $BF = EF - ED$ ；(2) 连结 AC ，若 $\angle B = 80^\circ$ ， $\angle DEC = 70^\circ$ ，求 $\angle ACF$ 的度数。



【答案】(1) 见解析；(2) 20°

【详解】(1) 旋转 $\triangle BCF$ 使 BC 与 CD 重合，



$\because AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，即梯形 $ABCD$ 为等腰梯形，

$\therefore \angle A = \angle ADC$ ， $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$ ， $\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ ，

由旋转可知： $\angle ABC = \angle CDF'$ ， $\therefore \angle ADC + \angle CDF' = 180^\circ$ ，即 $\angle ADF'$ 为平角， $\therefore A, D, F'$ 共线，

$\because \angle FCE = \frac{1}{2} \angle BCD \therefore \angle BCF + \angle ECD = \angle ECF = \frac{1}{2} \angle BCD$ ，

$\because FC = F'C$ ， $EC = EC$ ， $\angle ECF' = \angle BCF + \angle DCE = \angle ECF$ ， $\therefore \triangle FCE \cong \triangle F'CE$ ， $\therefore EF' = EF = DF' + ED$ ，

$\therefore BF = EF - ED$ ；

(2) $\because AB = BC$ ， $\angle B = 80^\circ$ ， $\therefore \angle ACB = 50^\circ$ ，由 (1) 得 $\angle FEC = \angle DEC = 70^\circ$ ，

又 $\because AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle ECB = 70^\circ$ ，而 $\angle B = \angle BCD = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle DCE = 10^\circ$ ， $\therefore \angle BCF = 30^\circ$ ， $\therefore \angle ACF = \angle BCA - \angle BCF = 20^\circ$ 。

8. 已知：正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB ， DC （或它们的延长线）于点 M ， N ，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时（如图1），易证 $BM + DN = MN$ 。

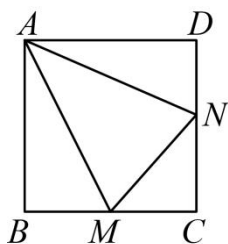


图 1

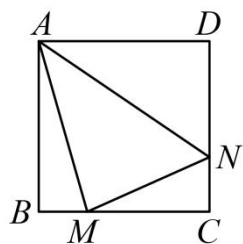


图 2

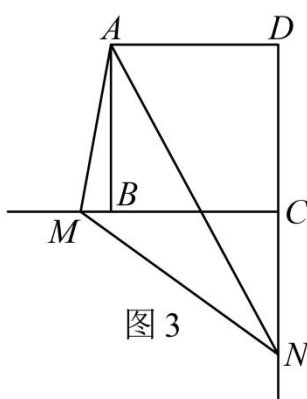


图 3

(1) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时 (如图 2), 上面的结论还成立吗? 说明理由.

(2) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图 3 的位置时, 线段 BM , DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系? 说明理由.

(3) 图 3 中, 若 $AB = 3$, $MN = 5$, 求 $\triangle AMN$ 的面积为_.

【答案】(1) 成立, 理由见解析; (2) $DN = MN + BM$, 理由见解析; (3) 7.5.

【详解】(1) 解: 上面的结论还成立, 理由如下:

如图 2, 在 MB 的延长线上, 截取 $BE = DN$, 连接 AE ,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADN$ 中,
$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle D, \therefore \triangle ABE \cong \triangle ADN (SAS), \therefore AE = AN, \angle EAB = \angle NAD, \\ BE = DN \end{cases}$$

$\because \angle BAD = 90^\circ, \angle MAN = 45^\circ, \therefore \angle BAM + \angle DAN = 45^\circ, \therefore \angle EAB + \angle BAM = 45^\circ, \therefore \angle EAM = \angle NAM,$

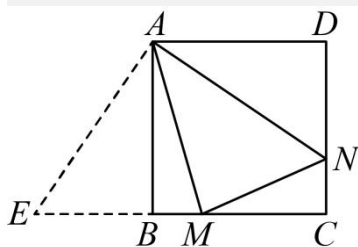


图 2

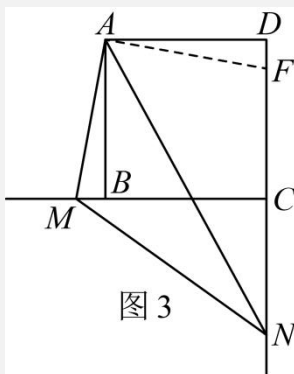


图 3

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle ANM$ 中,
$$\begin{cases} AE = AN \\ \angle EAM = \angle NAM, \therefore \triangle AEM \cong \triangle ANM (SAS), \therefore ME = MN, \\ AM = AM \end{cases}$$

$\therefore ME = BE + BM = BM + DN, \therefore BM + DN = MN;$

(2) 解: $DN = MN + BM$, 理由如下: 如图 3, 在 DC 上截取 $DF = BM$, 连接 AF

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ADF$ 中,
$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABM = \angle ADF, \therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF (SAS), \\ BM = DF \end{cases}$$

$\therefore AM = AF, \angle BAM = \angle DAF, \therefore \angle BAM + \angle BAF = \angle BAF + \angle DAF = 90^\circ, \text{ 即 } \angle MAF = \angle BAD = 90^\circ,$

$\because \angle MAN = 45^\circ, \therefore \angle MAN = \angle FAN = 45^\circ$

在 $\triangle MAN$ 和 $\triangle FAN$ 中,
$$\begin{cases} AM = AF \\ \angle MAN = \angle FAN, \therefore \triangle MAN \cong \triangle FAN (SAS), \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore MN = NF, \therefore MN = DN - DF = DN - BM, \therefore DN - BM = MN$;

(3) 解: $\because \triangle MAN \cong \triangle FAN, \therefore FN = MN = 5$,

$\therefore \triangle AFN$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times FN \times AD = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7.5, \therefore \triangle AMN$ 的面积为 7.5, 故答案为: 7.5.

9. 如图 1, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 5 的等边三角形, 以 BC 为底边作一个顶角为 120° 的等腰三角形 BDC . 点 M, N 分别是 AB 边与 AC 边上的点, 并且满足 $\angle MDN = 60^\circ$.

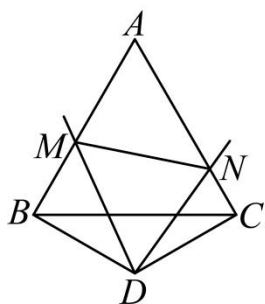


图1

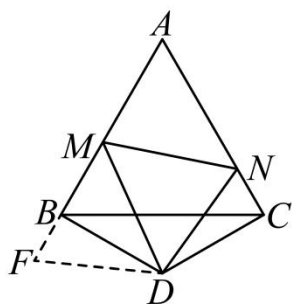
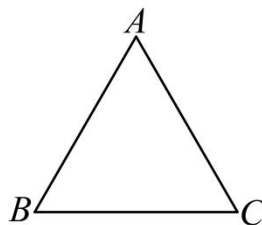


图2

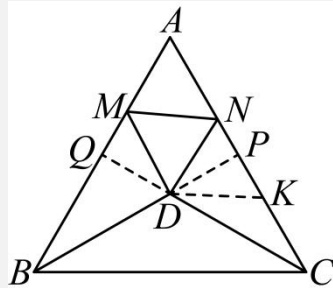
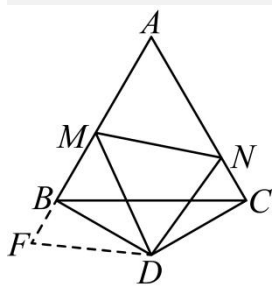


备用图

- (1) 尝试探究: 要想证明 MD 为 $\angle BMN$ 的平分线, 小诚做了如下思考, 如图 2, 延长 AB 至点 F , 使 $BF = CN$, 连接 DF , 通过证明 $\triangle BDF \cong$ _____, 得到 $DF = DN$, 进而证得 $\triangle DMF \cong$ _____, 得证 MD 为 $\angle BMN$ 的平分线; (2) 类比延伸: 在 (1) 的思路下求 $\triangle AMN$ 的周长;
- (3) 拓展迁移: 当点 D 在 $\triangle ABC$ 内部时, 其他条件不变, 直接写出 $\triangle AMN$ 的周长.

【答案】 (1) $\triangle CDN, \triangle DMN$ (2) 10 (3) 5

【详解】 (1) 延长 AB 至点 F , 使 $BF = CN$, 连接 DF ,



由题意得 $DB = DC, \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ, \angle BDC = 120^\circ, \therefore \angle DBC = \angle DCB = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle DBC = 90^\circ = \angle ACB + \angle DCB, \therefore \angle DBF = \angle DCN = 90^\circ$,

$\because BF = CN, \therefore \triangle BDF \cong \triangle CDN (\text{SAS}), \therefore \angle BDF = \angle CDN, DF = DN.$

$\because \angle MDN = 60^\circ, \angle BDC = 120^\circ, \therefore \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ, \therefore \angle FDM + \angle NDM = 60^\circ,$

$\because DM = DM, \therefore \triangle DMF \cong \triangle DMN (\text{SAS}), \therefore \angle DMF = \angle DMN, \therefore MD \text{ 平分 } \angle BMN.$

(2) $\because \triangle DMF \cong \triangle DMN (\text{SAS}), \therefore MF = FN. \because MF = BM + BF = BM + CN, \therefore MN = BM + CN.$

$\therefore \triangle AMN \text{ 的周长为: } AM + AN + MN = AM + AN + BM + CN = AB + AC = 10.$

(3) 延长 BD 交 AB 于 P , 延长 CD 交 AC 于 Q , 令 $KP = QM$, 连接 DK ,

$\because \triangle BDC \text{ 是等腰三角形, 且 } \angle BDC = 120^\circ, \therefore BD = CD, \angle DBC = \angle DCB = 30^\circ, \angle BDQ = \angle CDP = 60^\circ,$

$\because \triangle ABC \text{ 是等边三角形, } \therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$

$\therefore \angle MBD = \angle PCD = 30^\circ, CQ \perp AB, BP \perp AC, \therefore AQ = BQ = \frac{1}{2} AB = \frac{5}{2}, AP = PC = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2},$

在 $\triangle BDQ$ 和 $\triangle CDP$ 中, $\begin{cases} \angle QBD = \angle PCD \\ BD = CD \\ \angle BDQ = \angle CDP \end{cases}, \therefore \triangle BDQ \cong \triangle CDP (\text{ASA}), \therefore BQ = PC, QD = PD,$

$\because CQ \perp AB, BP \perp AC, \therefore \angle MQD = \angle DPK = 90^\circ,$

在 $\triangle MDQ$ 和 $\triangle PDK$ 中, $\begin{cases} QD = PD \\ \angle MQD = \angle DPK \\ QM = PK \end{cases}, \therefore \triangle MDQ \cong \triangle PDK (\text{SAS}), \therefore \angle QDM = \angle PDK, DM = DK,$

$\because \angle BDQ = 60^\circ, \angle MDN = 60^\circ, \therefore \angle QDM + \angle PDN = 60^\circ, \therefore \angle PDK + \angle PDN = 60^\circ \text{ 即 } \angle KDN = 60^\circ,$

在 $\triangle MDN$ 和 $\triangle KDN$ 中, $\begin{cases} DM = DK \\ \angle MDN = \angle KDN = 60^\circ \\ DN = DN \end{cases}, \therefore \triangle MDN \cong \triangle KDN (\text{SAS}), \therefore MN = KN = NP + PK.$

$\therefore \triangle AMN \text{ 的周长为: } AM + AN + MN = AM + AN + NP + PK = AM + AN + NP + QM = AQ + AP = 5.$

10. (1) 如图①, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD, \angle B = \angle D = 90^\circ, E, F$ 分别是边 BC, CD 上的点, 且

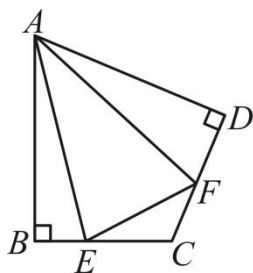
$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. 请直接写出线段 EF, BE, FD 之间的数量关系: $EF = BE + FD$;

(2) 如图②, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD, \angle B + \angle D = 180^\circ, E, F$ 分别是边 BC, CD 上的点, 且

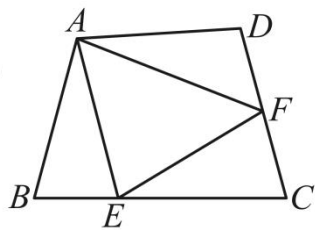
$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. (1) 中的结论是否仍然成立? 请写出证明过程:

(3) 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD, \angle B + \angle D = 180^\circ, E, F$ 分别是边 BC, CD 所在直线上的点, 且

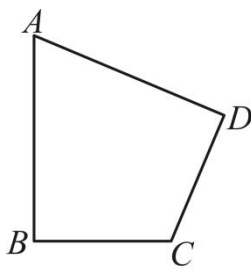
$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. 请直接写出线段 EF, BE, FD 之间的数量关系: $EF = |BE - FD|$.



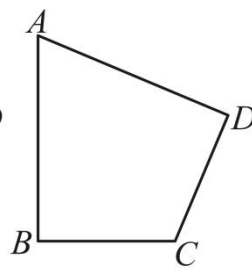
图①



图②



备用图



备用图

【答案】(1) $EF = BE + FD$; (2) 成立, 见解析; (3) $EF = BE + FD$ 或 $EF = BE - FD$ 或 $EF = FD - BE$

【详解】解: (1) 如图 1, 延长 EB 到 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG ,

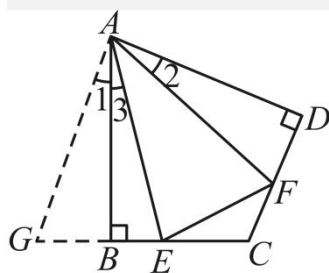


图1

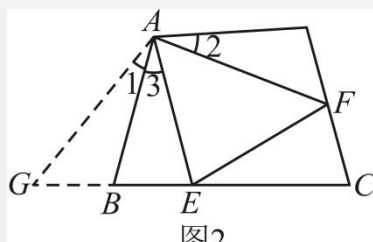


图2

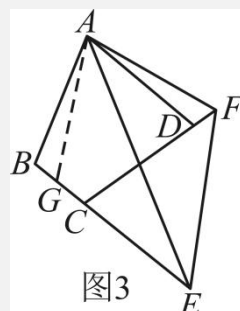


图3

$\because AB = AD, BG = DF, \angle ABG = \angle ADF = 90^\circ \therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF$

$\therefore AG = AF, \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2} \angle BAD = \angle EAF \therefore \angle GAE = \angle EAF$

$\because AE = AE, \therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG \therefore EG = EF$

$\because EG = BE + BG \therefore EF = BE + FD$; 故答案为: $EF = BE + FD$;

(2) (1) 中的结论 $EF = BE + FD$ 仍然成立.

理由是: 如图 2, 延长 EB 到 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG

$\because \angle ABC + \angle D = 180^\circ, \angle ABG + \angle ABC = 180^\circ, \therefore \angle ABG = \angle D$,

$\because AB = AD, BG = DF \therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF \therefore AG = AF, \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2} \angle BAD = \angle EAF \therefore \angle GAE = \angle EAF$

$\because AE = AE, \therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG \therefore EG = EF \therefore EG = BE + BG \therefore EF = BE + FD$;

(3) 若如图 1, 则结论 $EF = BE + FD$ 成立, 若如图 3, 则 $EF = BE - FD$ 或 $EF = FD - BE$

证明: 在 BE 上截取 BG , 使 $BG = DF$, 连接 AG .

$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ, \therefore \angle B = \angle ADF$

$\because AB = AD, BG = DF \therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF \therefore \angle BAG = \angle DAF, AG = AF$.

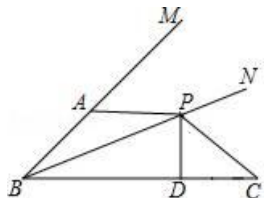
$\therefore \angle BAG + \angle EAD = \angle DAF + \angle EAD = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD \therefore \angle GAE = \angle EAF$.

$\because AE = AE, \therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG \therefore EG = EF \therefore EG = BE - BG \therefore EF = BE - FD$. 同理可得: $EG = EF$

$\therefore EG = BG - BE \therefore EF = FD - BE$. 故答案为: $EF = BE + FD$ 或 $EF = BE - FD$ 或 $EF = FD - BE$.

对角互补模型

11. 如图, BN 为 $\angle MBC$ 的平分线, P 为 BN 上一点, 且 $PD \perp BC$ 于点 D , $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$, 给出下列结论: ① $\angle MAP = \angle BCP$; ② $PA = PC$; ③ $AB + BC = 2BD$; ④ 四边形 $BAPC$ 的面积是 $\triangle PBD$ 面积的 2 倍, 其中结论正确的个数有 ()



A. 4 个

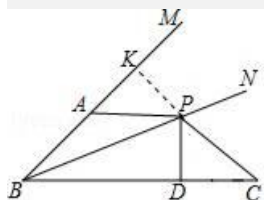
B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】A

【详解】解: 过点 P 作 $PK \perp AB$, 垂足为点 K . $\because PK \perp AB, PD \perp BC, \angle ABP = \angle CBP, \therefore PK = PD$,



在 $\text{Rt}\triangle BPK$ 和 $\text{Rt}\triangle BPD$ 中, $\begin{cases} BP = BP \\ PK = PD \end{cases}, \therefore \text{Rt}\triangle BPK \cong \text{Rt}\triangle BPD \text{ (HL)}, \therefore BK = BD$,

$\because \angle APC + \angle ABC = 180^\circ$, 且 $\angle ABC + \angle KPD = 180^\circ, \therefore \angle KPD = \angle APC, \therefore \angle APK = \angle CPD$, 故①正确,

在 $\triangle PAK$ 和 $\triangle PCD$ 中, $\begin{cases} \angle AKP = \angle PDC \\ PK = PD \\ \angle APK = \angle CPD \end{cases}, \therefore \triangle PAK \cong \triangle PCD \text{ (ASA)}, \therefore AK = CD, PA = PC$, 故②正确,

$\therefore BK - AB = BC - BD, \therefore BD - AB = BC - BD, \therefore AB + BC = 2BD$, 故③正确,

$\because \text{Rt}\triangle BPK \cong \text{Rt}\triangle BPD, \triangle PAK \cong \triangle PCD \text{ (ASA)}, \therefore S_{\triangle BPK} = S_{\triangle BPD}, S_{\triangle APK} = S_{\triangle PDC}$,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCP} = S_{\text{四边形}KBDP} = 2S_{\triangle PBD}$. 故④正确. 故选 A.

12. 小宇和小明一起进行数学游戏: 已知 $\angle MON = 90^\circ$, 将等腰直角三角板 $\triangle ABC$ 摆放在平面内, 使点 A 在 $\angle MON$ 的内部, 且两个底角顶点 B, C 分别放在边 OM, ON 上.

(1)如图 1, 小明摆放 $\triangle ABC$, 恰好使得 $AB \perp OM, AC \perp ON$, 又由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = AC$, 从而直接可以判断出点 A 在 $\angle MON$ 的角平分线上. 请回答: 小明能够直接作出判断的数学依据是_____.

(2)如图 2, 小宇调整了 $\triangle ABC$ 的位置, 请判断 OA 平分 $\angle MON$ 是否仍然成立? 若成立, 请证明, 若不成立, 请举出反例.

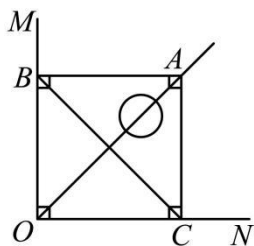


图1

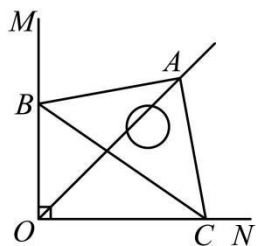


图2

【答案】(1)角的内部到角的两边距离相等的点，都在这个角的平分线上。(2)成立，证明见解析。

【详解】(1)解：因为 $AB \perp OM, AC \perp ON$ ， $AB = AC$ ，根据角的内部到角的两边距离相等的点，都在这个角的平分线上，所以点 A 在 $\angle MON$ 的角平分线上。

故答案为：角的内部到角的两边距离相等的点，都在这个角的平分线上。

(2)结论： OA 平分 $\angle MON$ 仍然成立；

证明：如解图 3，过点 A 作 $AG \perp OM$ ， $AH \perp ON$ ， $\therefore \angle AGB = \angle AHC = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle MON = 90^\circ$ ， $\therefore \angle GAH = 90^\circ$ ， $\therefore \angle GAB + \angle BAH = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle BAC = 90^\circ = \angle BAH + \angle HAC$ ， $\therefore \angle GAB = \angle HAC$ ，

在 $\triangle GAB$ 和 $\triangle HAC$ 中，
$$\begin{cases} \angle AGB = \angle AHC \\ \angle GAB = \angle HAC \\ AB = AC \end{cases} \therefore \triangle GAB \cong \triangle HAC (\text{AAS}) \therefore AG = AH$$

又 $\because AG \perp OM$ ， $AH \perp ON$ ， $\therefore OA$ 平分 $\angle MON$ ，故 (1) 结论正确。

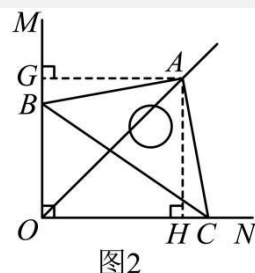
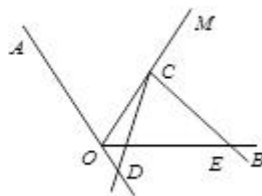
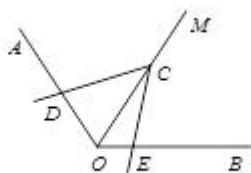
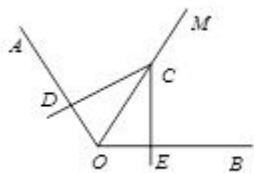


图2

13. 如图，已知 $\angle AOB = 120^\circ$ ，在 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上有一点 C ，将一个 60° 角的顶点与点 C 重合，它的两条边分别与直线 OA 、 OB 相交于点 D 、 E 。

(1) 当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 垂直时 (如图 1)，请猜想 $OE + OD$ 与 OC 的数量关系，并说明理由；(2) 当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 不垂直时，到达图 2 的位置，(1) 中的结论是否成立？并说明理由；(3) 当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 的反向延长线相交时，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，线段 OD 、 OE 与 OC 之间又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明。



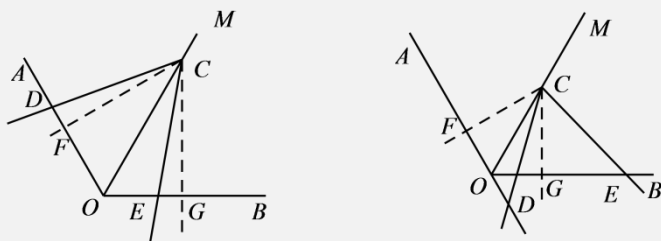
【答案】(1) 详见解析；(2) (1) 中结论仍然成立，理由详见解析；(3) (1) 中结论不成立，结论为 $OE - OD = OC$ ，证明详见解析。

【详解】(1) $\because OM$ 是 $\angle AOB$ 的角平分线， $\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ$ ，

$\because CD \perp OA$ ， $\therefore \angle ODC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle OCD = 30^\circ$ ， $\therefore \angle OCE = \angle DCE - \angle OCD = 30^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, $OD = \frac{1}{2}OC$, 同理: $OE = \frac{1}{2}OC$, $\therefore OD + OE = OC$,

(2)(1)中结论仍然成立, 理由: 过点 C 作 $CF \perp OA$ 于 F , $CG \perp OB$ 于 G , 如图,



$\therefore \angle OFC = \angle OGC = 90^\circ$, $\because \angle AOB = 120^\circ$, $\therefore \angle FCG = 60^\circ$,

同(1)的方法得, $OF = \frac{1}{2}OC$, $OG = \frac{1}{2}OC$, $\therefore OF + OG = OC$,

$\because CF \perp OA$, $CG \perp OB$, 且点 C 是 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上一点, $\therefore CF = CG$,

$\because \angle DCE = 60^\circ$, $\angle FCG = 60^\circ$, $\therefore \angle DCF = \angle ECG$, $\therefore \triangle CFD \cong \triangle CGE$, $\therefore DF = EG$,

$\therefore OF = OD + DF = OD + EG$, $OG = OE - EG$, $\therefore OF + OG = OD + EG + OE - EG = OD + OE$, $\therefore OD + OE = OC$;

(3)(1)中结论不成立, 结论为: $OE - OD = OC$, 理由: 过点 C 作 $CF \perp OA$ 于 F , $CG \perp OB$ 于 G , 如图,

$\therefore \angle OFC = \angle OGC = 90^\circ$, $\because \angle AOB = 120^\circ$, $\therefore \angle FCG = 60^\circ$, 同(1)的方法得, $OF = \frac{1}{2}OC$, $OG = \frac{1}{2}OC$,

$\therefore OF + OG = OC$,

$\because CF \perp OA$, $CG \perp OB$, 且点 C 是 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上一点, $\therefore CF = CG$,

$\because \angle DCE = 60^\circ$, $\angle FCG = 60^\circ$, $\therefore \angle DCF = \angle ECG$, $\therefore \triangle CFD \cong \triangle CGE$,

$\therefore DF = EG$, $\therefore OF = DF - OD = EG - OD$, $OG = OE - EG$,

$\therefore OF + OG = EG - OD + OE - EG = OE - OD$, $\therefore OE - OD = OC$.

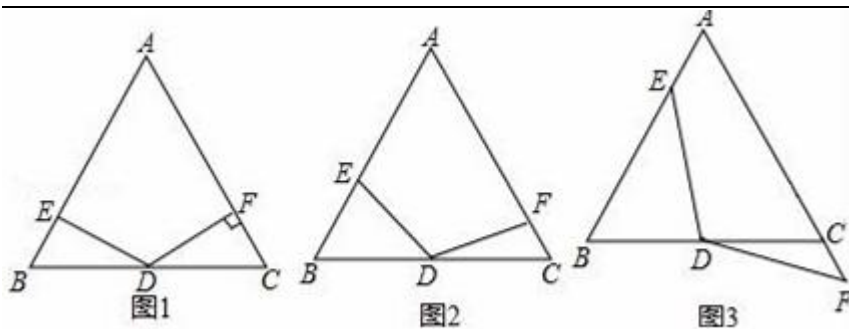
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 60^\circ$, 点 D 是线段 BC 的中点, $\angle EDF = 120^\circ$, DE 与线段 AB 相交于点 E , DF 与线段 AC (或 AC 的延长线) 相交于点 F .

(1) 如图 1, 若 $DF \perp AC$, 垂足为 F , $AB = 4$, 求 BE 的长;

(2) 如图 2, 将 (1) 中的 $\angle EDF$ 绕点 D 顺时针旋转一定的角度, DF 仍与线段 AC 相交于点 F . 求证:

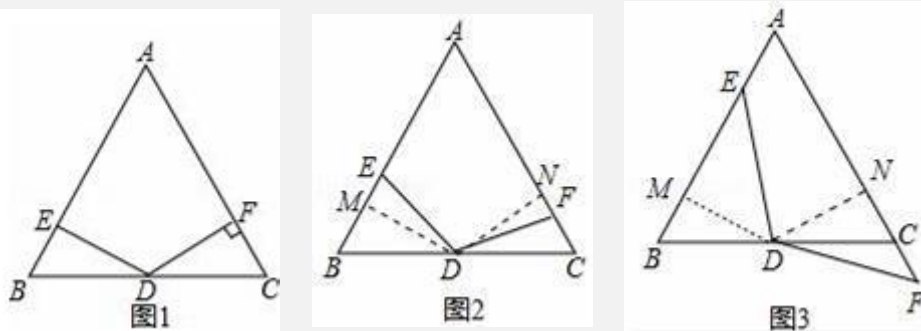
$BE + CF = \frac{1}{2}AB$. (3) 如图 3, 若 $\angle EDF$ 的两边分别交 AB 、 AC 的延长线于 E 、 F 两点, (2) 中的结论还成

立吗? 如果成立, 请证明; 如果不成立, 请直接写出线段 BE 、 AB 、 CF 之间的数量关系.



【答案】(1) 1 (2) 证明见解析 (3) 结论不成立. 结论: $BE - CF = \frac{1}{2}AB$

【详解】解: (1) 如图 1 中,



$\because AB=AC, \angle A=60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle B=\angle C=60^\circ, BC=AC=AB=4$,

$\because$ 点 D 是线段 BC 的中点, $\therefore BD=DC=\frac{1}{2}BC=2, \because DF \perp AC$, 即 $\angle CFD=90^\circ, \therefore \angle CDF=30^\circ$,

又 $\because \angle EDF=120^\circ, \therefore \angle EDB=30^\circ, \therefore \angle BED=90^\circ \therefore BE=\frac{1}{2}BD=1$.

(2) 如图 2 中, 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N .

$\because \angle B=\angle C=60^\circ, BD=DC, \angle BDM=\angle CDN=30^\circ, \therefore \triangle BDM \cong \triangle CDN, \therefore BM=CN, DM=DN$,

又 $\because \angle EDF=120^\circ=\angle MDN, \therefore \angle EDM=\angle NDF$,

又 $\because \angle EMD=\angle FND=90^\circ, \therefore \triangle EDM \cong \triangle FDN, \therefore ME=NF, \therefore BE+CF=BM+EM+NC-FN=2BM=BD=\frac{1}{2}AB$.

(3) 结论不成立. 结论: $BE - CF = \frac{1}{2}AB$.

$\because \angle B=\angle C=60^\circ, BD=DC, \angle BDM=\angle CDN=30^\circ, \therefore \triangle BDM \cong \triangle CDN, \therefore BM=CN, DM=DN$,

又 $\because \angle EDF=120^\circ=\angle MDN, \therefore \angle EDM=\angle NDF$,

又 $\because \angle EMD=\angle FND=90^\circ, \therefore \triangle EDM \cong \triangle FDN, \therefore ME=NF, \therefore BE - CF=BM+EM - (FN - CN)=2BM=BD=\frac{1}{2}AB$.

15. 已知: 点 P 是 $\angle MON$ 平分线上一点, 点 A 在射线 OM 上, 作 $\angle APB + \angle MON = 180^\circ$, 交直线 ON 于点 B , 作 $PC \perp ON$ 于点 C .

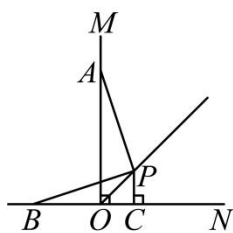


图1

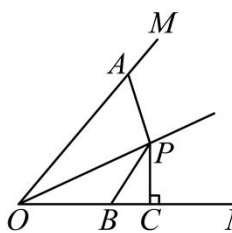


图2

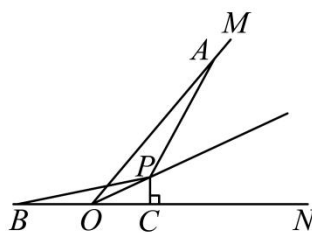


图3

(1)观察猜想：如图1，当 $\angle MON = 90^\circ$ 时，写出 PA 和 PB 的数量关系，并说明理由。(2)探究证明：如图2，当 $\angle MON = 50^\circ$ 时，写出 OA ， OC 和 BC 之间的等量关系，并说明理由。(3)拓展延伸：如图3，当 $\angle MON = \alpha$ ，点 B 在射线 ON 的反向延长线上时，请直接写出线段 OA 、 OC 和 BC 之间的数量关系。

【答案】(1) $PA = PB$ ，理由见解析(2) $OA = OC + BC$ ，理由见解析(3) $OA = BC + OC$ ，理由见解析

【详解】(1)解： $PA = PB$ 。理由：过点 P 作 $PD \perp OM$ 于点 D ，

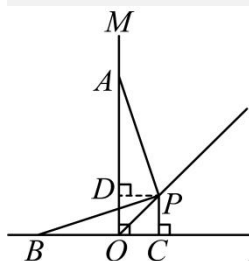


图1

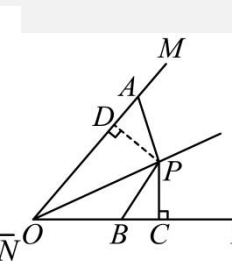


图2

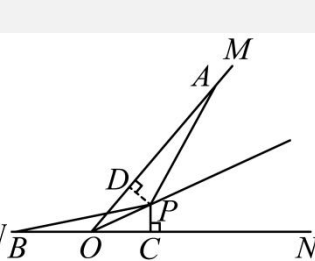


图3

$\because$ 点 P 在 $\angle MON$ 的角平分线上，且 $PC \perp ON$ 于 C ， $PD \perp OM$ ， $\therefore PC = PD$ ， $\angle PDA = \angle PCB = 90^\circ$ ，

$\because \angle MON = 90^\circ$ ， $\therefore \angle APB = 90^\circ$ ， $\angle CPD = 90^\circ$ ， $\therefore \angle APD = \angle BPC$ ，

在 $\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$ 中，
$$\begin{cases} \angle APD = \angle BPC \\ PD = PC \\ \angle ADP = \angle BCP \end{cases}, \therefore \triangle APD \cong \triangle BPC \text{ (ASA)}, \therefore AP = BP.$$

(2)解：结论： $OA = OC + BC$ ，理由如下：如图2，过点 P 作 $PD \perp OM$ 于点 D ，

同(1)，可证 $\triangle APD \cong \triangle BPC$ ， $PD = PC$ ， $\therefore AD = BC$ ，

$\because PD = PC$ ， $OP = OP \therefore Rt\triangle OPD \cong Rt\triangle OPC$ ， $\therefore OC = OD$ ， $\therefore OA - AD = OC$ ， $\therefore OA = BC + OC$ 。

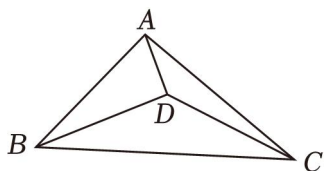
(3)解： $OA = BC + OC$ ，理由如下：如图3，过点 P 作 $PD \perp OM$ 于点 D ，

同(1)，可证 $\triangle APD \cong \triangle BPC$ ， $PD = PC$ ， $\therefore AD = BC$ ，

$\because PD = PC$ ， $OP = OP \therefore Rt\triangle OPD \cong Rt\triangle OPC$ ， $\therefore OC = OD$ ， $\therefore OA - AD = OC$ ， $\therefore OA = BC + OC$ 。

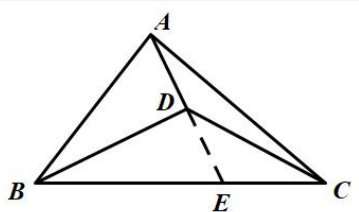
角平分线的全等模型（三类）

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，且 $AD \perp BD$ ，则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的面积和是_____。



【答案】3

【详解】解：如下图，延长 AD 交 BC 于点 E ，



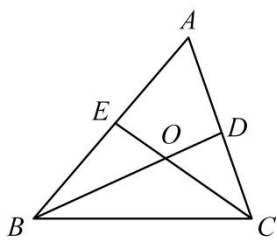
$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = 3, AC = 4, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6,$$

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC, \therefore \angle ABD = \angle EBD, \because AD \perp BD, \therefore \angle BDA = \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle EBD \text{ 中, } \begin{cases} \angle ABD = \angle EBD \\ BD = BD \\ \angle BDA = \angle BDE \end{cases}, \therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD (\text{ASA}),$$

$$\therefore AD = ED, S_{\triangle ABD} = S_{\triangle EBD}, \therefore S_{\triangle CAD} = S_{\triangle CED}, \therefore S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3. \text{ 故答案为: } 3.$$

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线 BD 、 CE 相交于点 O ， BD 交 AC 于点 D ， CE 交 AB 于点 E ，若已知 $\triangle ABC$ 周长为 20， $BC = 7$ ， $AE : AD = 4 : 3$ ，则 AE 长为 ()



A. $\frac{18}{7}$

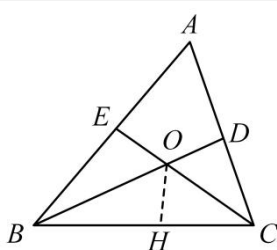
B. $\frac{24}{7}$

C. $\frac{26}{7}$

D. 4

【答案】B

【详解】解：如图，在 BC 上截取 $BH = BE$ ，连接 OH



5 BD 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle ACB$, $\therefore \angle ABD = \angle CBD, \angle ACE = \angle BCE$,

$\therefore \angle A = 60^\circ$, $\therefore \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$, $\therefore \angle DBC + \angle BCE = 60^\circ$,

$\therefore \angle BOC = 120^\circ$, $\therefore \angle BOE = \angle COD = 60^\circ$,

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle BOH$ 中,
$$\begin{cases} BE = BH \\ \angle ABD = \angle CBD, \therefore \triangle BOE \cong \triangle BOH (SAS), \\ BO = BO \end{cases}$$

$\therefore \angle EOB = \angle BOH = 60^\circ$, $\therefore \angle COH = \angle BOC - \angle BOH = 60^\circ$, $\therefore \angle COD = \angle COH = 60^\circ$,

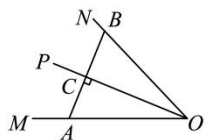
在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COH$ 中,
$$\begin{cases} \angle ACE = \angle BCE \\ OC = OC \\ \angle COD = \angle COH \end{cases}, \therefore \triangle COD \cong \triangle COH (ASA),$$

$\therefore CD = CH$, $\therefore BE + CD = BH + CH = BC = 7$,

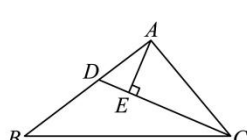
$\therefore \triangle ABC$ 周长为 20, $\therefore AB + AC + BC = 20$, $\therefore AE + AD = 6$,

$\therefore AE : AD = 4 : 3$, $\therefore AE = \frac{6}{7} \times 4 = \frac{24}{7}$. 故选: B.

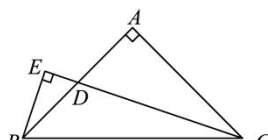
18. 利用角平分线构造全等三角形是常用的方法, 如图①, OP 平分 $\angle MON$. 点 A 为 OM 上一点, 过点 A 作 $AC \perp OP$, 垂足为 C, 延长 AC 交 ON 于点 B, 可证得 $\triangle AOC \cong \triangle BOC$, 则 $AO = BO$, $AC = BC$.



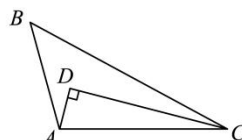
图①



图②



图③



图④

【问题提出】(1) 如图②, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 平分 $\angle ACB$, $AE \perp CD$ 于点 E, 若 $\angle EAC = 63^\circ$, $\angle B = 37^\circ$, 通过上述构造全等的办法, 求 $\angle DAE$ 的度数;

【问题探究】(2) 如图③, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, CD 平分 $\angle ACB$, $BE \perp CD$, 垂足 E 在 CD 的延长线上, 试探究 BE 和 CD 的数量关系;

【问题解决】(3) 如图④ 是一块肥沃的土地 $\triangle ABC$, 其中 AC 边与灌渠相邻, 李伯伯想在这块地中划出一块直角三角形土地 $\triangle ADC$ 进行水稻试验, 他进行了如下操作:

① 作 $\angle ACB$ 的平分线 CD ; ② 再过点 A 作 $AD \perp CD$ 交 CD 于点 D

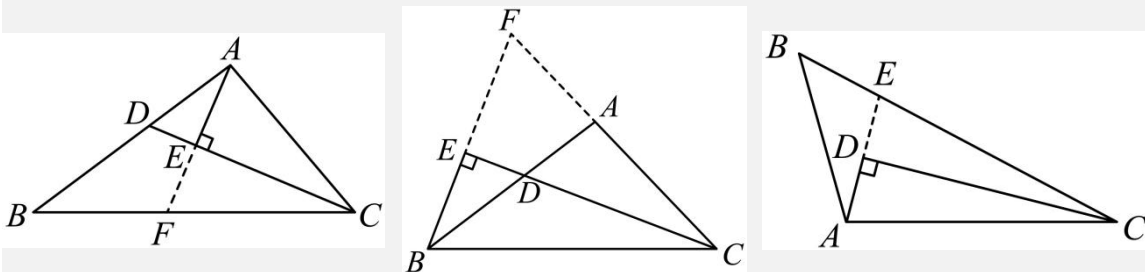
已知 $BC = 13$ 米, $AC = 10$ 米, $\triangle ABC$ 面积为 20 平方米, 求划出的 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】(1) $\angle DAE = 26^\circ$; (2) $BE = \frac{1}{2}CD$, 理由见解析; (3) $S_{\triangle ACD} = \frac{100}{13}$.

【详解】(1) 如图 2, 延长 AE 交 BC 于点 F, 由已知可知 $AC = FC$, $\therefore \angle EFC = \angle EAC = 63^\circ$,
 $\therefore \angle EFC = \angle B + \angle DAE$, $\therefore \angle DAE = \angle EFC - \angle B = 63^\circ - 37^\circ = 26^\circ$;

(2) $BE = \frac{1}{2}CD$ ，证明如下：如图，延长 BE 、 CA 交于点 F ，则 $\angle BAF = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ$ ，

$\because BE \perp CD$ ， $\therefore \angle BED = 90^\circ = \angle BAC$ ， $\therefore \angle BDC = \angle ABF + \angle BED = \angle ACD + \angle BAC$ ， $\therefore \angle ABF = \angle ACD$ ，

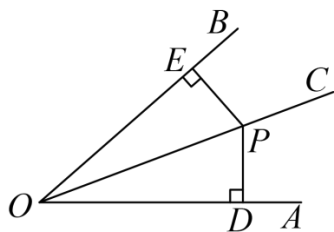


又 $\because AB = AC$ ， $\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACD$ (ASA)， $\therefore BF = CD$ ，由已知可知， $BE = FE = \frac{1}{2}BF$ ， $\therefore BE = \frac{1}{2}CD$ ；

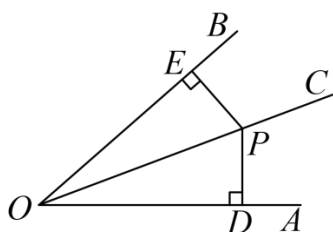
(3) 如图，延长 AD 交 BC 于 E ，由已知可知， $AD = ED$ ， $EC = AC = 10$ ， $\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ECD}$ ，

$\because S_{\triangle ABC} = 20$ ， $\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{10}{13}S_{\triangle ABC} = \frac{10}{13} \times 20 = \frac{200}{13}$ ， $\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACE} = \frac{100}{13}$ 。

19. 【教材呈现】下面是华师版八年级上册数学教材 96 页的部分内容：已知：如图， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 是 OC 上的任意一点， $PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ，垂足分别为点 D 和点 E 。求证： $PD = PE$ 。



图①



图②

分析：图中有两个直角 $\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$ ，只要证明这两个三角形全等，便可证得 $PD = PE$ 。

(1) 【问题解决】请根据教材分析，结合图①写出证明过程。

(2) 【类比探究】如图②， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线， P 是 OC 上任意一点，点 M 、 N 分别在 OB 、 OA 上，连接 PM 和 PN ，若 $\angle PMO + \angle PNO = 180^\circ$ ，求证： $PM = PN$ 。

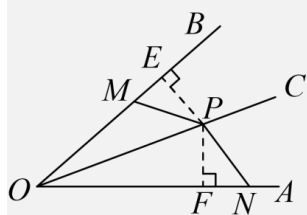
【答案】(1)见解析(2)见解析

【详解】(1) 证明： $\because PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ， $\therefore \angle PDO = \angle PEO = 90^\circ$ ，

$\because OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线， $\therefore \angle AOC = \angle BOC$ ，

在 $\triangle OPE$ 和 $\triangle OPD$ 中，
$$\begin{cases} \angle PEO = \angle PDO \\ \angle BOC = \angle AOC \\ OP = OP \end{cases}$$
 $\therefore \triangle OPE \cong \triangle OPD$ (AAS)， $\therefore PD = PE$ ；

(2) 证明：如图②，过点 P 作 $PE \perp OB$ 于 E ， $PF \perp OA$ 于 F ，



图②

$\because OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线, $PE \perp OB$, $PF \perp OA$, $\therefore PE = PF$,

$\because \angle PMO + \angle PME = 180^\circ$, $\angle PMO + \angle PNO = 180^\circ$, $\therefore \angle PME = \angle PNO$,

在 $\triangle PME$ 和 $\triangle PNF$ 中,
$$\begin{cases} \angle PME = \angle PNF \\ \angle PEM = \angle PFN, \therefore \triangle PME \cong \triangle PNF (AAS), \therefore PM = PN. \\ PE = PF \end{cases}$$

20. (1) 如图 1, 射线 OP 平分 $\angle MON$, 在射线 OM , ON 上分别截取线段 OA , OB ; 使 $OA = OB$; 在射线 OP 上任取一点 D , 连接 AD , BD . 则 AD 与 BD 的数量关系为_____.

(2) 如图 2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, CD 平分 $\angle ACB$, 求证: $BC = AC + AD$;

(3) 如图 3, 在四边形 $ABDE$ 中, $AB = 7$, $DE = 3$, $BD = 8$, C 为 BD 边中点, 若 AC 平分 $\angle BAE$, EC 平分 $\angle AED$, $\angle ACE = 120^\circ$, 求 AE 的值.

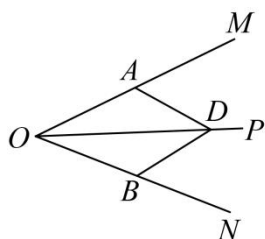


图 1

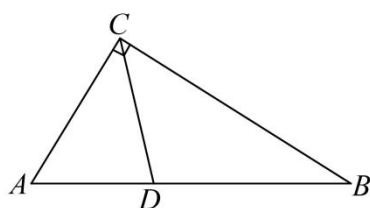


图 2

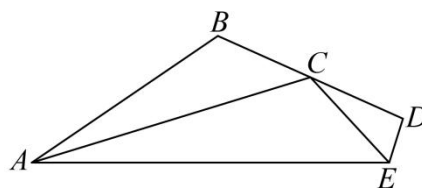


图 3

【答案】(1) $AD = BD$ (2) 详见解析 (3) $AE = 14$

【详解】(1) 证明: $\because$ 射线 OP 平分 $\angle MON$, $\therefore \angle AOD = \angle BOD$,

又 $\because OA = OB$, $OD = OD$, $\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOD (SAS)$, $\therefore AD = BD$, 故答案为: $AD = BD$;

(2) 证明: 在 CB 上截取 $CE = AC$, 连接 DE , 如图 2 所示:

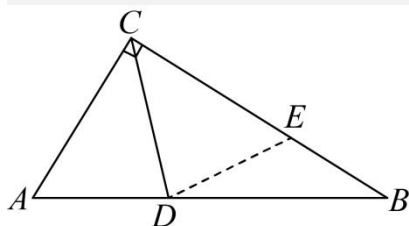


图 2

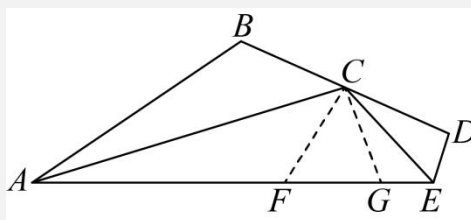


图 3

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$, $\therefore \angle BCD = \angle ACD$, 又 $\because CD = CD$, $\therefore \triangle ECD \cong \triangle ACD (SAS)$,

$\therefore EC = AC$, $DE = AD$, $\angle CED = \angle A = 60^\circ$, $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\therefore \angle B = 30^\circ$,

又 $\because \angle CED = \angle EDB + \angle B$, $\therefore \angle EDB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, $\therefore \angle EDB = \angle B$, $\therefore BE = DE$, $\therefore BE = AD$,

$\therefore BC = EC + BE$, $\therefore BC = AC + AD$;

(3) 解: 在 AE 上取点 F , 使 $AF = AB$, 连接 CF , 在 AE 上取点 G , 使 $EG = ED$, 连接 CG , 如图 3 所示:

$\because C$ 是 BD 边的中点, $BD = 8$, $\therefore CB = CD = \frac{1}{2}BD = 4$,

$\because AC$ 平分 $\angle BAE$, $\therefore \angle BAC = \angle FAC$, 又 $\because AC = AC$, $\therefore \triangle ACB \cong \triangle ACF$ (SAS),

$\therefore CB = CF = 4$, $AF = AB = 7$, $\angle BCA = \angle FCA$. 同理可证: $\triangle CGE \cong \triangle CDE$ (SAS),

$\therefore CG = CD = 4$, $GE = DE = 3$, $\angle DCE = \angle GCE$, $\because CB = CD$, $\therefore CG = CF$,

$\because \angle ACE = 120^\circ$, $\therefore \angle BCA + \angle DCE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\therefore \angle FCA + \angle GCE = 60^\circ$,

$\therefore \angle FCG = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, $\therefore \triangle FGC$ 是等边三角形, $\therefore FG = FC = 4$, $\therefore AE = AF + GE + FG = 7 + 3 + 4 = 14$.

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872