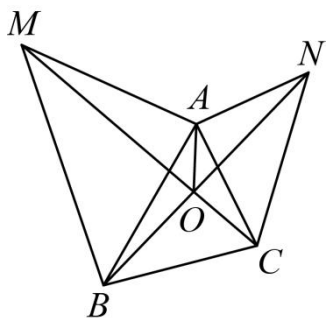


三角形全等重要模型（三）

手拉手全等模型

1. 已知：如图，分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 为腰向外作等腰直角 $\triangle ABM$ 、等腰直角 $\triangle ACN$ ，连接 MC 、 NB ， MC 、 NB 相交于点 O ，连接 AO ，① $MC = NB$ ，② $\triangle BOM \cong \triangle CON$ ，③ $MC \perp NB$ ，④ AO 平分 $\angle MON$ ，⑤ AO 平分 $\angle BAC$ ，则以上结论正确的有（ ）



- A. ①③⑤ B. ②③④ C. ③④⑤ D. ①③④

2. 如图1，等边 $\triangle ABC$ 与等边 $\triangle DCP$ 的顶点 B ， C ， P 三点在一条直线上，连接 AP 交 BD 于 E 点，连 EC 。(1)求证： $AP = BD$ ；(2)求证： EC 平分 $\angle BEP$ ；

- (3)设 $AE = a$ ， $DE = b$ ， $CE = c$ ，若 $BP = 4CP$ ，直接写出 a ， b ， c 之间满足的数量关系。

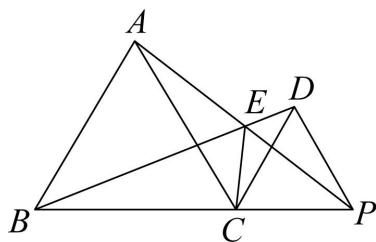
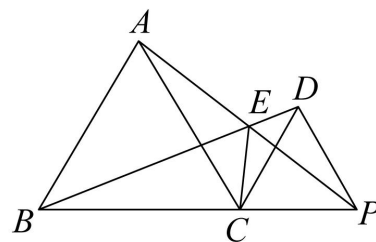


图1



备用图

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 为锐角，点 D 为直线 BC 上一动点，以 AD 为直角边且在 AD 的右侧作等腰直角三角形 ADE ， $\angle DAE=90^\circ$ ， $AD=AE$ 。

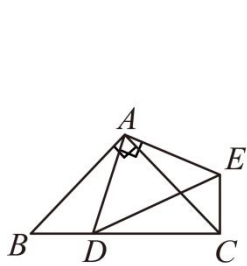


图1

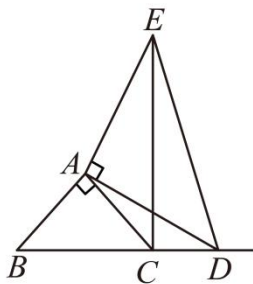


图2

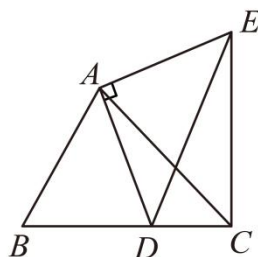


图3

(1) 如果 $AB=AC$ ， $\angle BAC=90^\circ$ 。① 当点 D 在线段 BC 上时，如图 1，线段 CE 、 BD 的位置关系为 _____，数量关系为 _____；② 当点 D 在线段 BC 的延长线上时，如图 2，① 中的结论是否仍然成立，请说明理由。(2) 如图 3，如果 $AB \neq AC$ ， $\angle BAC \neq 90^\circ$ ，点 D 在线段 BC 上运动。探究：当 $\angle ACB$ 多少度时， $CE \perp BC$ ？请说明理由

4. 已知: $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDE$ 都是等腰三角形. $BA=BC$, $BD=BE$ ($AB>BD$) 且有 $\angle ABC=\angle DBE$. (1)

如图 1, 如果 A 、 B 、 D 在一直线上, 且 $\angle ABC=60^\circ$, 求证: $\triangle BMN$ 是等边三角形; (2) 在第 (1) 问的情况下, 直线 AE 和 CD 的夹角是_____°;

(3) 如图 2, 若 A 、 B 、 D 不在一直线上, 但 $\angle ABC=60^\circ$ 的条件不变则直线 AE 和 CD 的夹角是_____°;

(4) 如图 3, 若 $\angle ACB=60^\circ$, 直线 AE 和 CD 的夹角是_____°.

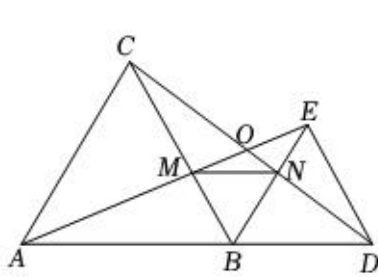


图1

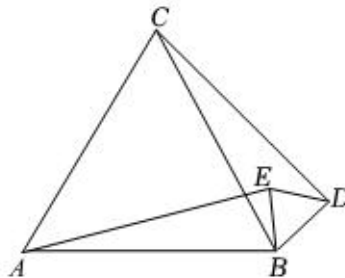


图2

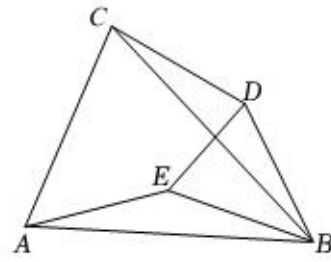


图3

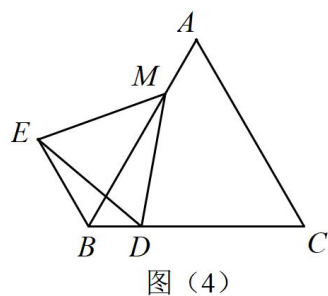
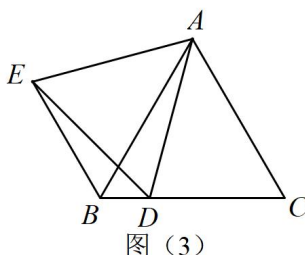
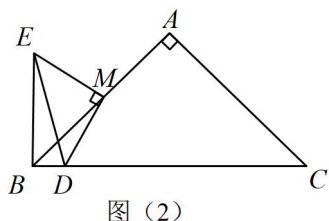
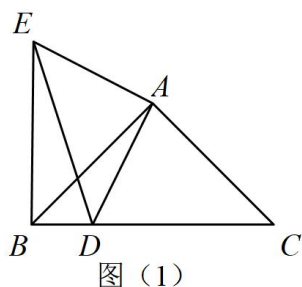
5. 【知识背景】我们在第十一章《三角形》中学习了三角形的边与角的性质，在第十二章《全等三角形》中学习了全等三角形的性质和判定，在第十三章《轴对称》中学习了等腰三角形的性质和判定．在一些探究题中经常用以上知识转化角和边，进而解决问题．

(1) 【问题初探】如图（1）， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 是 BC 上一点，连接 AD ，以 AD 为一边作 $\triangle ADE$ ，使 $\angle DAE = 90^\circ$ ， $AD = AE$ ，连接 BE ，猜想 BE 和 CD 有怎样的数量关系，并说明理由．

(2) 【类比再探】如图（2）， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 M 是 AB 上一点，点 D 是 BC 上一点，连接 MD ，以 MD 为一边作 $\triangle MDE$ ，使 $\angle DME = 90^\circ$ ， $MD = ME$ ，连接 BE ，则 $\angle EBD =$ _____．（直接写出答案，不写过程；需要作辅助线的，请说明辅助线的作法，并在图（2）中作出辅助线）

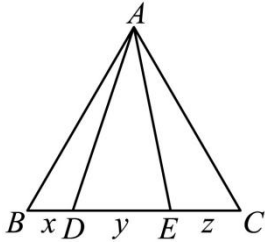
(3) 【方法迁移】如图（3）， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 是 BC 上一点，连接 AD ，以 AD 为一边作等边三角形 ADE 连接 BE ，则 BD ， BE ， BC 之间有怎样的数量关系？（直接写出答案，不写过程）．

(4) 【数学思考】如图（4）， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 M 是 AB 上一点，点 D 是 BC 上一点，连接 MD ，以 MD 为一边作等边三角形 MDE ，连接 BE 猜想 $\angle EBD$ 的度数，并说明理由．



半角模型

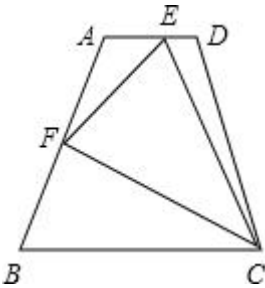
6. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，在 BC 边上取两点 D 、 E ，使 $\angle DAE = 30^\circ$ 。若 $BD = x$ ， $DE = y$ ， $CE = z$ ，则以 x 、 y 、 z 为边长的三角形的形状为（ ）



A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 随 x 、 y 、 z 的值而定

7. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = BC = DC$ ，点 E 、 F 分别在 AD 、 AB 上，且 $\angle FCE = \frac{1}{2} \angle BCD$ 。

(1) 求证： $BF = EF - ED$ ；(2) 连结 AC ，若 $\angle B = 80^\circ$ ， $\angle DEC = 70^\circ$ ，求 $\angle ACF$ 的度数。



8. 已知：正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB ， DC （或它们的延长线）于点 M ， N ，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时（如图1），易证 $BM + DN = MN$ 。

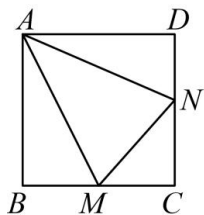


图 1

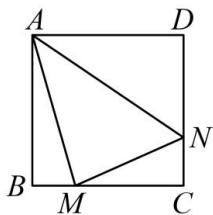


图 2

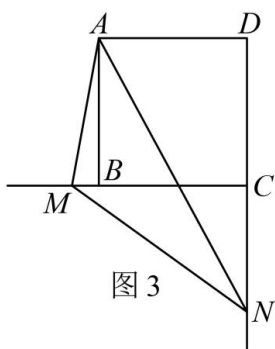


图 3

(1) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时（如图2），上面的结论还成立吗？说明理由。

(2) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图3的位置时，线段 BM ， DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？说明理由。

(3) 图3中，若 $AB = 3$ ， $MN = 5$ ，求 $\triangle AMN$ 的面积为_。

9. 如图 1, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 5 的等边三角形, 以 BC 为底边作一个顶角为 120° 的等腰三角形 BDC . 点 M, N 分别是 AB 边与 AC 边上的点, 并且满足 $\angle MDN = 60^\circ$.

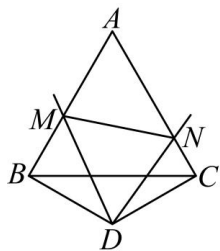


图1

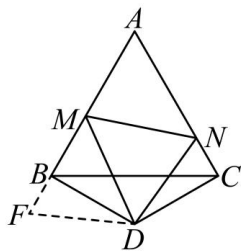
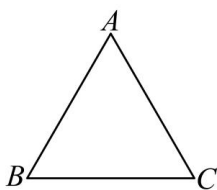


图2



备用图

- (1) 尝试探究: 要想证明 MD 为 $\angle BMN$ 的平分线, 小诚做了如下思考, 如图 2, 延长 AB 至点 F , 使 $BF = CN$, 连接 DF , 通过证明 $\triangle BDF \cong$ _____, 得到 $DF = DN$, 进而证得 $\triangle DMF \cong$ _____, 得证 MD 为 $\angle BMN$ 的平分线; (2) 类比延伸: 在 (1) 的思路下求 $\triangle AMN$ 的周长;
- (3) 拓展迁移: 当点 D 在 $\triangle ABC$ 内部时, 其他条件不变, 直接写出 $\triangle AMN$ 的周长.

10. (1) 如图①, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点, 且

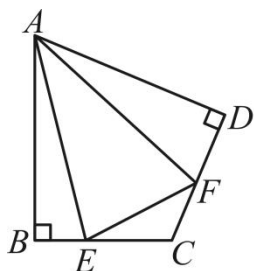
$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. 请直接写出线段 EF, BE, FD 之间的数量关系: $\underline{\quad}$;

(2) 如图②, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点, 且

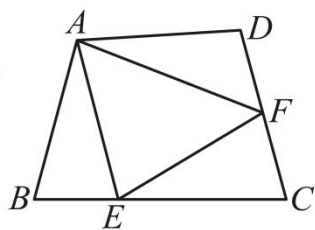
$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. (1) 中的结论是否仍然成立? 请写出证明过程:

(3) 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 所在直线上的点, 且

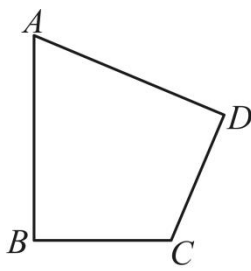
$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. 请直接写出线段 EF, BE, FD 之间的数量关系: $\underline{\quad}$.



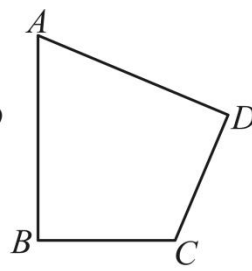
图①



图②



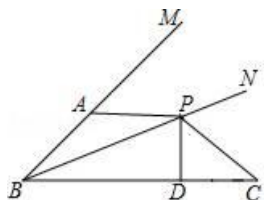
备用图



备用图

对角互补模型

11. 如图, BN 为 $\angle MBC$ 的平分线, P 为 BN 上一点, 且 $PD \perp BC$ 于点 D , $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$, 给出下列结论: ① $\angle MAP = \angle BCP$; ② $PA = PC$; ③ $AB + BC = 2BD$; ④ 四边形 $BAPC$ 的面积是 $\triangle PBD$ 面积的 2 倍, 其中结论正确的个数有 ()



- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

12. 小宇和小明一起进行数学游戏: 已知 $\angle MON = 90^\circ$, 将等腰直角三角板 $\triangle ABC$ 摆放在平面内, 使点 A 在 $\angle MON$ 的内部, 且两个底角顶点 B, C 分别放在边 OM, ON 上.

(1) 如图 1, 小明摆放 $\triangle ABC$, 恰好使得 $AB \perp OM, AC \perp ON$, 又由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = AC$, 从而直接可以判断出点 A 在 $\angle MON$ 的角平分线上. 请回答: 小明能够直接作出判断的数学依据是_____.

(2) 如图 2, 小宇调整了 $\triangle ABC$ 的位置, 请判断 OA 平分 $\angle MON$ 是否仍然成立? 若成立, 请证明, 若不成立, 请举出反例.

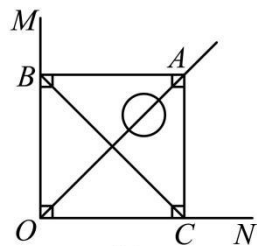


图1

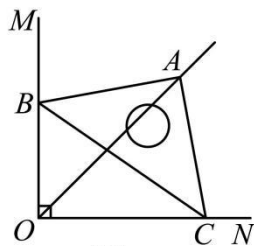
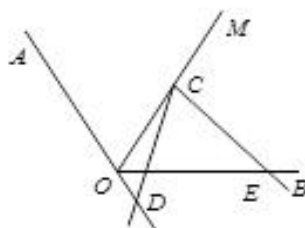
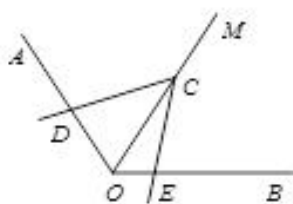
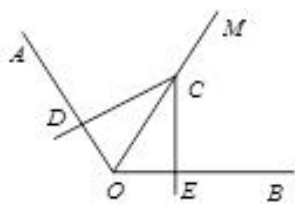


图2

13. 如图，已知 $\angle AOB = 120^\circ$ ，在 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上有一点 C ，将一个 60° 角的顶点与点 C 重合，它的两条边分别与直线 OA 、 OB 相交于点 D 、 E 。

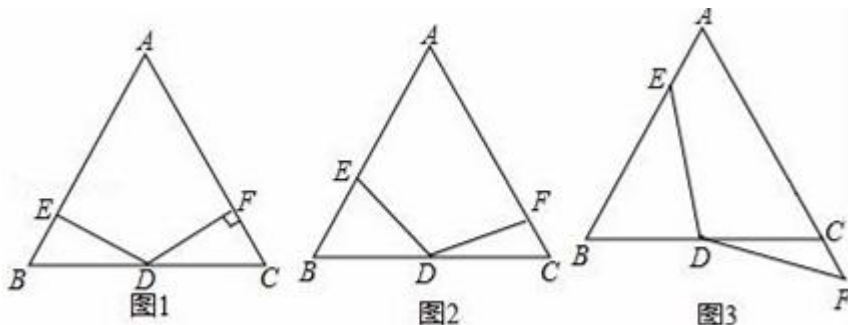
(1) 当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 垂直时 (如图 1)，请猜想 $OE + OD$ 与 OC 的数量关系，并说明理由；(2) 当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 不垂直时，到达图 2 的位置，(1) 中的结论是否成立？并说明理由；(3) 当 $\angle DCE$ 绕点 C 旋转到 CD 与 OA 的反向延长线相交时，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，线段 OD 、 OE 与 OC 之间又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明。



14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=60^\circ$, 点 D 是线段 BC 的中点, $\angle EDF=120^\circ$, DE 与线段 AB 相交于点 E , DF 与线段 AC (或 AC 的延长线) 相交于点 F .

(1) 如图 1, 若 $DF \perp AC$, 垂足为 F , $AB=4$, 求 BE 的长;

(2) 如图 2, 将 (1) 中的 $\angle EDF$ 绕点 D 顺时针旋转一定的角度, DF 仍与线段 AC 相交于点 F . 求证:
 $BE+CF=\frac{1}{2}AB$. (3) 如图 3, 若 $\angle EDF$ 的两边分别交 AB 、 AC 的延长线于 E 、 F 两点, (2) 中的结论还成立吗? 如果成立, 请证明; 如果不成立, 请直接写出线段 BE 、 AB 、 CF 之间的数量关系.



15. 已知：点 P 是 $\angle MON$ 平分线上一点，点 A 在射线 OM 上，作 $\angle APB + \angle MON = 180^\circ$ ，交直线 ON 于点 B ，作 $PC \perp ON$ 于点 C 。

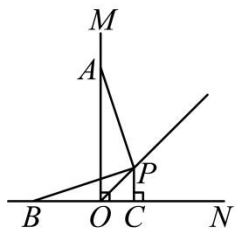


图1

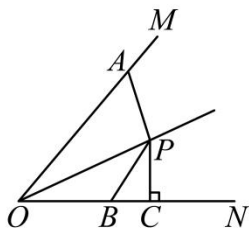


图2

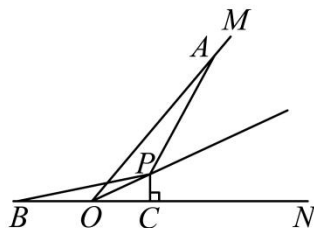
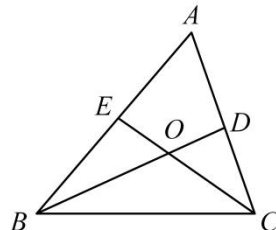
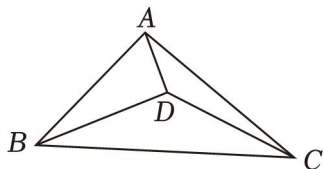


图3

(1)观察猜想：如图1，当 $\angle MON = 90^\circ$ 时，写出 PA 和 PB 的数量关系，并说明理由。(2)探究证明：如图2，当 $\angle MON = 50^\circ$ 时，写出 OA ， OC 和 BC 之间的等量关系，并说明理由。(3)拓展延伸：如图3，当 $\angle MON = \alpha$ ，点 B 在射线 ON 的反向延长线上时，请直接写出线段 OA 、 OC 和 BC 之间的数量关系。

角平分线的全等模型（三类）

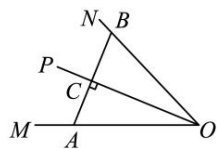
16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，且 $AD \perp BD$ ，则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的面积和是_____.



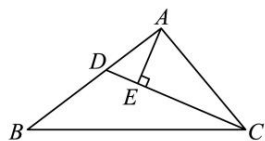
17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线 BD 、 CE 相交于点 O ， BD 交 AC 于点 D ， CE 交 AB 于点 E ，若已知 $\triangle ABC$ 周长为 20， $BC = 7$ ， $AE : AD = 4 : 3$ ，则 AE 长为（ ）

- A. $\frac{18}{7}$ B. $\frac{24}{7}$ C. $\frac{26}{7}$ D. 4

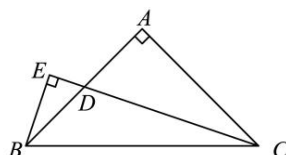
18. 利用角平分线构造全等三角形是常用的方法，如图①， OP 平分 $\angle MON$ ，点 A 为 OM 上一点，过点 A 作 $AC \perp OP$ ，垂足为 C ，延长 AC 交 ON 于点 B ，可证得 $\triangle AOC \cong \triangle BOC$ ，则 $AO = BO$ ， $AC = BC$ 。



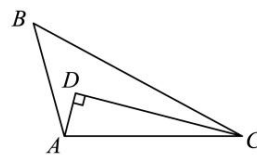
图①



图②



图③



图④

【问题提出】(1) 如图②，在 $\triangle ABC$ 中， CD 平分 $\angle ACB$ ， $AE \perp CD$ 于点 E ，若 $\angle EAC = 63^\circ$ ， $\angle B = 37^\circ$ ，通过上述构造全等的办法，求 $\angle DAE$ 的度数；

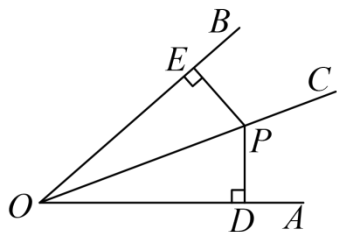
【问题探究】(2) 如图③，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， CD 平分 $\angle ACB$ ， $BE \perp CD$ ，垂足 E 在 CD 的延长线上，试探究 BE 和 CD 的数量关系；

【问题解决】(3) 如图④是一块肥沃的土地 $\triangle ABC$ ，其中 AC 边与灌渠相邻，李伯伯想在这块地中划出一块直角三角形土地 $\triangle ADC$ 进行水稻试验，他进行了如下操作：

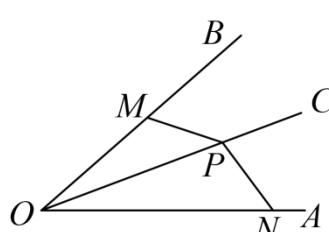
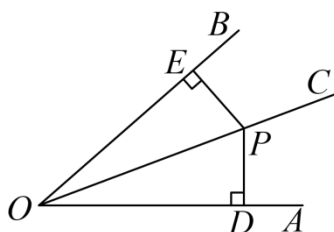
- ① 作 $\angle ACB$ 的平分线 CD ；② 再过点 A 作 $AD \perp CD$ 交 CD 于点 D

已知 $BC = 13$ 米， $AC = 10$ 米， $\triangle ABC$ 面积为 20 平方米，求划出的 $\triangle ACD$ 的面积。

19. 【教材呈现】下面是华师版八年级上册数学教材 96 页的部分内容：已知：如图， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 是 OC 上的任意一点， $PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ，垂足分别为点 D 和点 E 。求证： $PD = PE$ 。



图①



图②

分析：图中有两个直角 $\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$ ，只要证明这两个三角形全等，便可证得 $PD = PE$ 。

(1) 【问题解决】请根据教材分析，结合图①写出证明过程。

(2) 【类比探究】如图②， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线， P 是 OC 上任意一点，点 M 、 N 分别在 OB 、 OA 上，连接 PM 和 PN ，若 $\angle PMO + \angle PNO = 180^\circ$ ，求证： $PM = PN$ 。

20. (1) 如图 1, 射线 OP 平分 $\angle MON$, 在射线 OM , ON 上分别截取线段 OA , OB ; 使 $OA = OB$; 在射线 OP 上任取一点 D , 连接 AD , BD . 则 AD 与 BD 的数量关系为_____.

(2) 如图 2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, CD 平分 $\angle ACB$, 求证: $BC = AC + AD$;

(3) 如图 3, 在四边形 $ABDE$ 中, $AB = 7$, $DE = 3$, $BD = 8$, C 为 BD 边中点, 若 AC 平分 $\angle BAE$, EC 平分 $\angle AED$, $\angle ACE = 120^\circ$, 求 AE 的值.

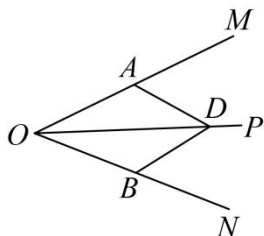


图 1

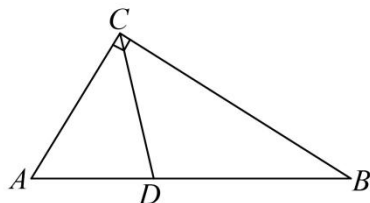


图 2

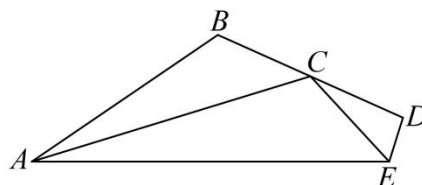


图 3

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872