

三角形全等重要模型（二）

倍长中线模型

1. 综合与实践：小明遇到这样一个问题，如图 1， $\triangle ABC$ 中， $AB=7$ ， $AC=5$ ，点 D 为 BC 的中点，求 AD 的取值范围。

小明发现老师讲过的“倍长中线法”可以解决这个问题，所谓倍长中线法，就是将三角形的中线延长一倍，以便构造出全等三角形，从而运用全等三角形的有关知识来解决问题的方法，他的做法是：如图 2，延长 AD 到 E ，使 $DE=AD$ ，连接 BE ，构造 $\triangle BED \cong \triangle CAD$ ，经过推理和计算使问题得到解决

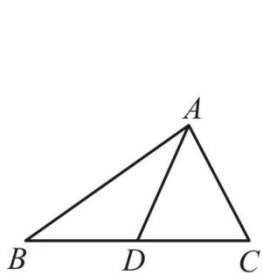


图1

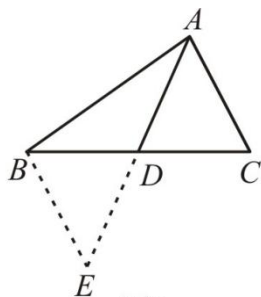


图2

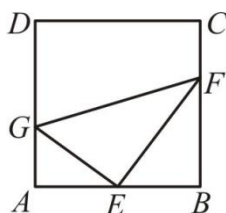


图3

请回答：(1)小明证明 $\triangle BED \cong \triangle CAD$ 用到的判定定理是：_____；（填入你选择的选项字母）

A. SAS B. SSS C. AAS D. ASA

(2) AD 的取值范围是_____.

小明还发现：倍长中线法最重要的一点就是延长中线一倍，完成全等三角形模型的构造。

参考小明思考问题的方法，解决问题：

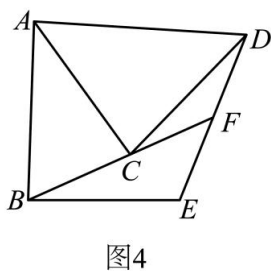
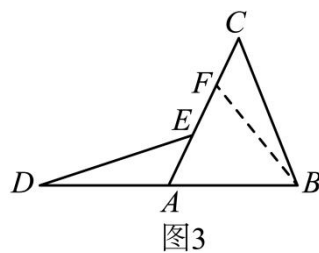
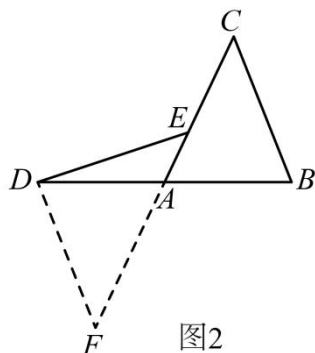
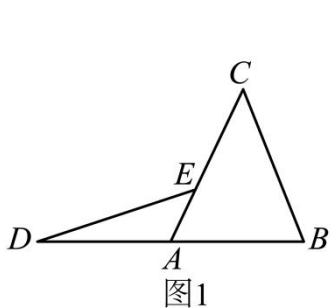
如图 3，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 AB 边的中点， G 、 F 分别为 AD ， BC 边上的点，若 $AG=2$ ， $BF=4$ ， $\angle GEF=90^\circ$ ，求 GF 的长。

2. 【问题提出】期末复习课上，数学丁老师出示了下面一个问题：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BA 延长线的点， E 是 AC 边上一点，且满足 $DE = BC$, $\angle DEA = \angle ACB$ ，那么 A 是 BD 的中点，请你说明理由。

【思路探究】小王同学从条件出发分析解题思路：以 DE 为腰构造等腰 $\triangle DEF$ 和平行八字型全等三角形，如图 2，以点 D 为圆心，以 DE 长为半径画弧，交 CA 的延长线于点 F ，先应用等腰三角形的轴对称性，再应用三角形全等“ AAS ”（或“ ASA ”）的判定方法即可得 $AB = AD$ ，小张同学从结论出发分析解题思路：以 AB 为腰构造等腰 $\triangle ABF$ ，将说明 $AD = AB$ 的问题转化为说明 $AD = BF$ 的问题，如图 3，以点 B 为圆心，以 AB 长为半径画弧，交 AC 于点 F ，于是可得 $\angle BFA = \angle BAF$ ，再应用三角形全等“ AAS ”（或“ ASA ”）的判定方法即可得 $AB = BF = AD$ 。

（1）请你选择小张同学或小王同学的思路或按自己的思路写出完整的解题过程；

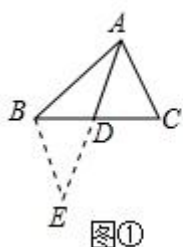
【学以致用】（2）请你在理解了小张同学或小王同学解题思路的基础上，解答下面一道图形较为复杂的同类问题：如图 4，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AC = CD$, $\angle ACD = 90^\circ$ ，过点 B 作线段 $BE \perp AB$ ，且 $BE = AB$ ，连接 DE ，交 BC 的延长于点 F ，猜想 DF 与 EF 的数量关系并说明理由。



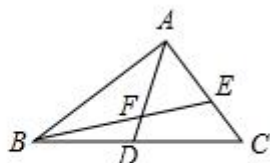
3. 【问题情境】课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：

如图①， $\triangle ABC$ 中，若 $AB=8$ ， $AC=6$ ，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围．

小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法：延长 AD 至点 E ，使 $DE=AD$ ，连接 BE ．请根据小明的方法思考：



图①



图②

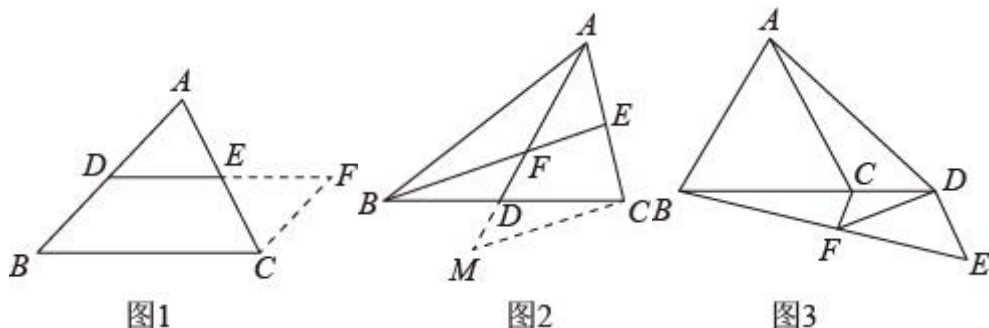
(1)由已知和作图能得到 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ ，依据是_____． A. SAS； B. SSS； C. AAS； D. HL

(2)由“三角形的三边关系”可求得 AD 的取值范围是_____．

解后反思：题目中出现“中点”、“中线”等条件，可考虑延长中线构造全等三角形，把分散的已知条件和所求证的结论集中到同一个三角形之中．

(3)【初步运用】如图②， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， BE 交 AC 于 E ，交 AD 于 F ，且 $AC=BF$ ．求证 $AE=FE$ ．

4. 阅读材料：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别是边 AB ， AC 的中点，小亮在证明“三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半”时，通过延长 DE 到点 F ，使 $EF = DE$ ，连接 CF ，证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ ，再证四边形 $DBCF$ 是平行四边形即得证。



类比迁移：(1) 如图 2， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AC 上的一点， BE 交 AD 于点 F ，且 $AE = EF$ ，求证： $AC = BF$ 。

小亮发现可以类比材料中的思路进行证明。

证明：如图 2，延长 AD 至点 M ，使 $MD = FD$ ，连接 MC ，.....

请根据小亮的思路完成证明过程。

方法运用：(2) 如图 3，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 是射线 BC 上一动点（点 D 在点 C 的右侧），连接 AD 。把线段 CD 绕点 D 逆时针旋转 120° 得到线段 DE ， F 是线段 BE 的中点，连接 DF 、 CF 。请你判断线段 DF 与 AD 的数量关系，并给出证明。

5. 阅读与思考：下面是小宇同学的数学日记，请仔细阅读，并完成相应的任务.

“倍长中线法”中线是三角形中的重要线段之一，利用中线解决几何问题时，常常采用“倍长中线法”加辅助线.

如图 1. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ，且 D 恰好是边 BC 的中点. 求证： $AB = AC$.

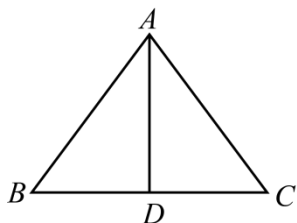


图1

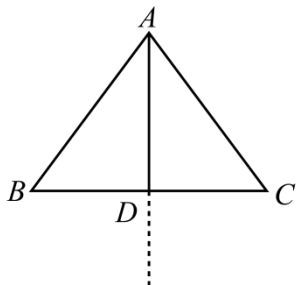


图2

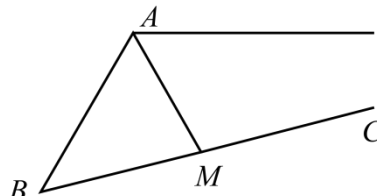


图3

证明：如图 2，延长 AD 至点 E ，使 $DE = AD$. $\because D$ 是边 BC 的中点 $\therefore BD = CD$.

$\because \angle ADB = \angle EDC$, $DE = AD$, $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$ (依据). $\therefore \angle BAD = \angle E$.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAD = \angle CAD$, $\therefore \angle CAD = \angle E$, $\therefore AC = CE$, $\therefore AB = AC$.

任务：(1)材料中的“依据”是_____. (填选项)

A. SAS B. ASA C. AAS D. SSS

(2)在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6\text{ cm}$ ， $AC = 4\text{ cm}$ ，则 BC 边上的中线 AD 长度的取值范围是_____.

(3)如图 3，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， AM 平分 $\angle BAD$ ，且 M 是 BC 的中点， $AB = 2$ ， $AD = 3$ ，求 DC 的长.

截长补短模型

6. 【方法探究】如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ， $\angle ABC = 2\angle C$ ，探究 AC ， AB ， BD 之间的数量关系；

嘉铭同学通过思考发现，可以通过“截长、补短”两种方法解决问题：

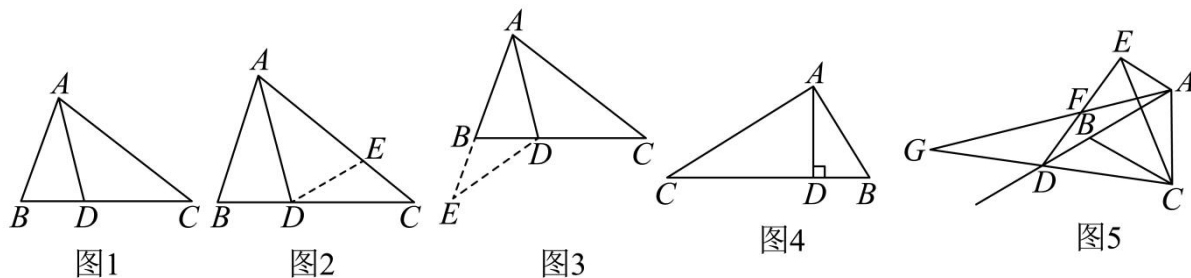
方法 1：如图 2，在 AC 上截取 $AE = AB$ ，连接 DE ，可以得到全等三角形，进而解决此问题。

方法 2：如图 3，延长 AB 到点 E ，使得 $BE = BD$ ，连接 DE ，可以得到等腰三角形，进而解决此问题。

(1) 根据探究，直接写出 AC ， AB ， BD 之间的数量关系；

【迁移应用】(2) 如图 4，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 上一点， $\angle B = 2\angle C$ ， $AD \perp BC$ 于 D ，探究 CD ， AB ， BD 之间的数量关系，并证明。

【拓展延伸】(3) 如图 5， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 为 AB 延长线上一动点，连接 CD 。以 CD 为边在 CD 上方作等边 $\triangle CDE$ ，点 F 是 DE 的中点，连接 AF 并延长，交 CD 的延长线于点 G 。若 $\angle G = \angle ACE$ ，求证： $GF = AE + AF$ 。



7. (1) 阅读理解：问题：如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 BD 平分 $\angle ABC$ ， $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 。

求证： $DA = DC$ 。

思考：“角平分线+对角互补”可以通过“截长、补短”等构造全等去解决问题。

方法 1：在 BC 上截取 $BM = BA$ ，连接 DM ，得到全等三角形，进而解决问题；

方法 2：延长 BA 到点 N ，使得 $BN = BC$ ，连接 DN ，得到全等三角形，进而解决问题。

结合图 1，在方法 1 和方法 2 中任选一种，添加辅助线并完成证明。

(2) 问题解决：如图 2，在 (1) 的条件下，连接 AC ，当 $\angle DAC = 60^\circ$ 时，探究线段 AB ， BC ， BD 之间的数量关系，并说明理由；

(3) 问题拓展：如图 3，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ， $DA = DC$ ，过点 D 作 $DE \perp BC$ ，垂足为点 E ，请写出线段 AB 、 CE 、 BC 之间的数量关系。

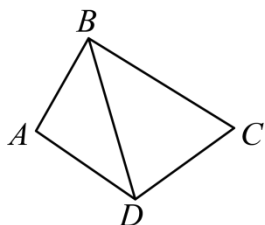


图1

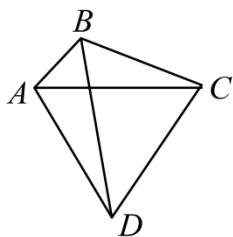


图2

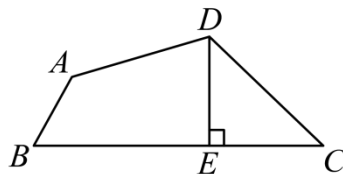


图3

8. 李老师善于通过合适的主题整合教学内容, 帮助同学们用整体的、联系的、发展的眼光看问题, 形成科学的思维习惯, 下面是李老师在“利用角的对称性构造全等模型”主题下设计的问题, 请你解答.

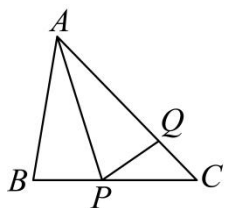


图1

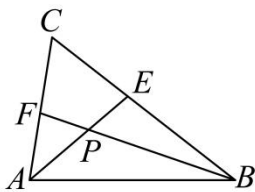


图2

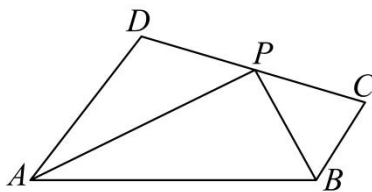


图3

(1) 【观察发现】①如图 1, AP 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $AB < AC$, 在 AC 上截取 $AQ = AB$, 连接 PQ , 则 PB 与 PQ 的数量关系是_____;

②如图 2, $\triangle ABC$ 的角平分线 AE 、 BF 相交于点 P . 当 $\angle C = 60^\circ$ 时, 线段 PE 与 PF 的数量关系是_____;

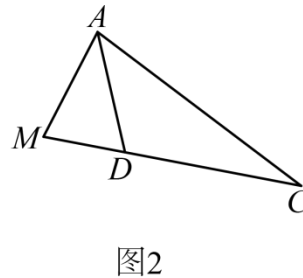
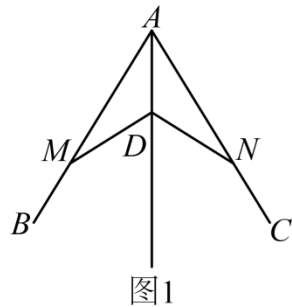
(2) 【探究迁移】如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD + BC$, $\angle DAB$ 的平分线与 $\angle ABC$ 的平分线恰好交于 CD 边上的点 P , 试判断 PD 与 PC 的数量关系, 并说明理由.

9.【实际情境】手工课堂上，老师给每个制作小组发放一把花折伞和制作花折伞的材料及工具。同学们认真观察后，组装了花折伞的骨架，粘贴了彩色伞面，制作出精美的花折伞。

【模型建立】(1) 如图 1，从花折伞中抽象出“伞形图”。 $AM = AN$ ， $DM = DN$ 。求证：

$\angle AMD = \angle AND$ 。

【模型应用】(2) 如图 2， $\triangle AMC$ 中， $\angle MAC$ 的平分线 AD 交 MC 于点 D 。请你从以下两个条件：① $\angle AMD = 2\angle C$ ；② $AC = AM + MD$ 中选择一个作为已知条件，另一个作为结论，并写出结论成立的证明过程。（注：只需选择一种情况作答）



10. 阅读材料：截长补短法，是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法．截长就是在长边上截取一条线段与某一短边相等，补短是通过在一条短边上延长一条线段与另一长边相等，从而解决问题．依据上述材料，解答下列问题：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ，交 BC 于点 D ，且 $\angle B = 2\angle C$ ，求证：

$$AB + BD = AC.$$

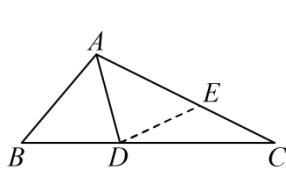


图1

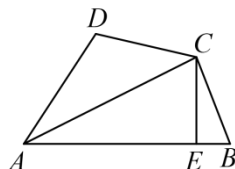


图2

(1) 为了证明结论“ $AB + BD = AC$ ”，小亮在 AC 上截取 AE ，使得 $AE = AB$ ，连接 DE ，解答了这个问题，请按照小亮的思路写证明过程；（提示：如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等）

(2) 如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\angle D = 110^\circ$ ， $\angle ACD = 40^\circ$ ， $\angle ACB = 80^\circ$ ， CE 是 $\triangle ABC$ 的高， $AD = 10$ ， $EB = 2$ ，求 AB 的长．

一线三等角（K 字型）模型

11. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle B=40^\circ$ ， D 为线段 BC 上一动点（不与点 B ， C 重合），连接 AD ，作 $\angle ADE=40^\circ$ ， DE 交线段 AC 于 E ，以下四个结论：

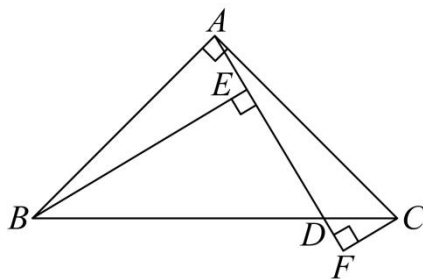
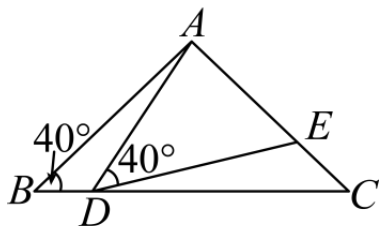
- ① $\angle CDE = \angle BAD$ ；② 当 D 为 BC 中点时， $DE \perp AC$ ；③ 当 $\triangle ADE$ 为等腰三角形时， $\angle BAD = 20^\circ$ ；
④ 当 $\angle BAD = 30^\circ$ 时， $BD = CE$ 。其中正确的结论的个数是（ ）

A. 1

B. 2

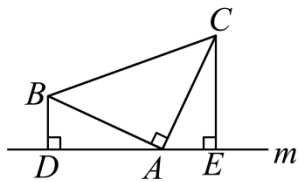
C. 3

D. 4

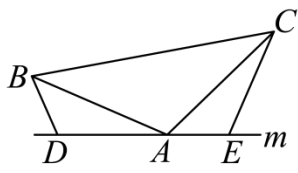


12. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ，点 D 为 BC 上一点，连接 AD 。过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，过点 C 作 $CF \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 F 。若 $BE=4$ ， $CF=1$ ，则 EF 的长度为_____。

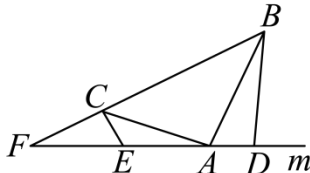
13. (1) 已知：如图①，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ，直线 m 经过点 A ， $BD \perp$ 直线 m ， $CE \perp$ 直线 m ，垂足分别为 D ， E 。求证： $DE=BD+CE$ 。



①



②



③

(2) 拓展：如图②，将 (1) 中的条件改为：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， D ， A ， E 三点都在直线 m 上，并且有 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC = \alpha$ ，其中 α 为任意锐角或钝角：那么结论 $DE=BD+CE$ 是否仍成立？若成立，请你给出证明；若不成立，请说明理由。

(3) 应用：如图③，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 是钝角， $AB=AC$ ， $\angle BAD > \angle CAE$ ， $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$ ，直线 m 与 BC 的延长线交于点 F ，若 $BC=2CF$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 15，求 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CEF$ 的面积之和。

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 直线 MN 经过点 C , 且 $AD \perp MN$ 于 D , $BE \perp MN$ 于 E .

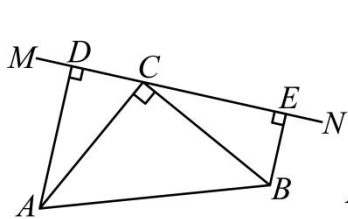


图1

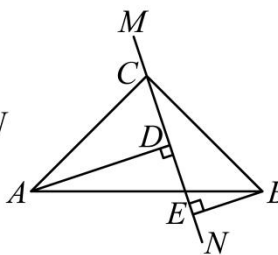


图2

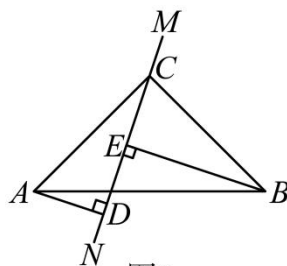


图3

- (1) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 1 的位置时, 求证: ① $\triangle ADC \cong \triangle CEB$; ② $DE = AD + BE$;
- (2) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 2 的位置时, 求证: $DE = AD - BE$;
- (3) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 3 的位置时, 试问 DE 、 AD 、 BE 具有怎样的等量关系? 请写出这个等量关系, 并加以证明.

15. (1) 如图①, $\angle MAN = 90^\circ$, 射线 AE 在这个角的内部, 点 B 、 C 分别在 $\angle MAN$ 的边 AM 、 AN 上, 且 $AB = AC$, $CF \perp AE$ 于点 F , $BD \perp AE$ 于点 D . 求证: $\triangle ABD \cong \triangle CAF$;

(2) 如图②, 点 B 、 C 分别在 $\angle MAN$ 的边 AM 、 AN 上, 点 E 、 F 都在 $\angle MAN$ 内部的射线 AD 上, $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 分别是 $\triangle ABE$ 、 $\triangle CAF$ 的外角. 已知 $AB = AC$, 且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$. 求证: $EF = BE - CF$;

(3) 如图③, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AB > BC$. 点 D 在边 BC 上, $CD = 3BD$, 点 E 、 F 在线段 AD 上, $\angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 17, 求 $\triangle ACF$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和.

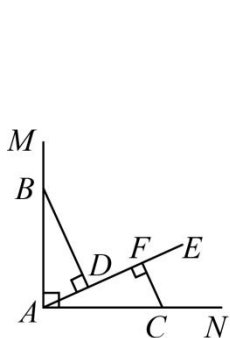


图 ①

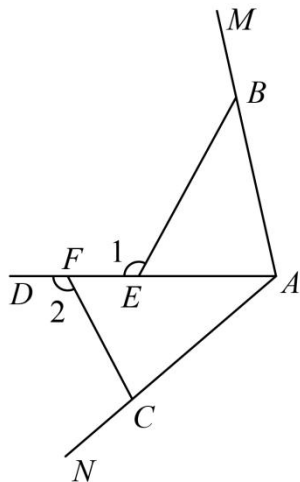


图 ②

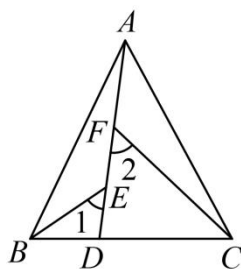


图 ③

未来参加提招的家长，可以加入交流群

群聊：昆震提招交流群2027



如果二维码过期，请添加 17751295132 邓老师添加

QQ 群：564965872