

七上数学重难点解析

数轴——数形结合入门

【思维入门】

1. 如图 1-2-1，数轴上一点 A 向左移动 2 个单位长度到达点 B ，再向右移动 5 个单位长度到达点 C 。若点 C 表示的数为 1，则点 A 表示的数是 (D)

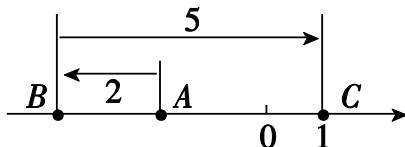


图 1-2-1

- A. 7 B. 3 C. -3 D. -2

【解析】 逆向移动，即把 C 点左移 5 个单位，再右移 2 个单位得到 A 。

2. 在数轴上和表示 -3 的点的距离等于 5 的点所表示的数是 (C)
 A. -8 B. 2 C. -8 和 2 D. 1
 3. 如图 1-2-2，数轴的一部分被墨水污染，被污染的部分内含有的整数为 $-1, 0, 1, 2$ 。



图 1-2-2

4. 如图 1-2-3，直径为 1 个单位长度的圆从原点沿着数轴无滑动的逆时针滚动一周到达 A 点，则 A 点表示的数是 $-\pi$ 。

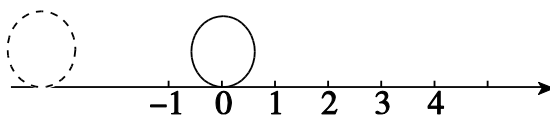
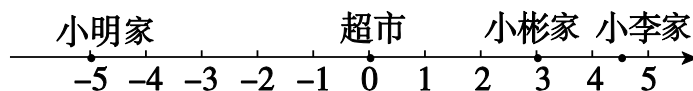


图 1-2-3

5. 一辆货车从超市出发，向东行驶 3 km 到达小彬家，继续向东行驶 1.5 km 到达小李家，又向西行驶 9.5 km 到达小明家，最后回到超市。
 (1) 请以超市为原点，以向东方向为正方向，用 1 个单位长度表示 1 km，画出数轴，并在数轴上表示出小明家、小李家、小彬家的位置；
 (2) 小明家距小彬家有多远？
 (3) 货车一共行驶了多少千米？

解：(1) 如答图所示；



第 5 题答图

- (2) 小明家距小彬家 $3+5=8(\text{km})$ ；
 (3) $3+1.5+9.5+5=19(\text{km})$ 。

答：小明家距小彬家有 8 km，货车一共行驶了 19 km。

【思维拓展】

6. 如图 1-2-4, 在数轴上有六个点, 且 $AB=BC=CD=DE=EF$, 则这条数轴的原点在

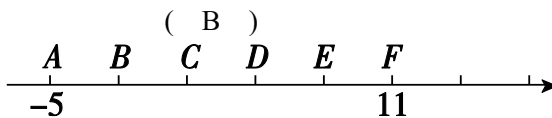


图 1-2-4

- A. 点 A, B 之间 B. 点 B, C 之间
C. 点 C, D 之间 D. 点 D, E 之间

【解析】 $\because |11 - (-5)| = 16, AB=BC=CD=DE=EF,$
 $\therefore AB=BC=CD=DE=EF=3.2,$
 $\therefore$ 这条数轴的原点在 B 与 C 之间.

7. 数轴上表示整数的点称为整点. 某数轴的单位长度是 1 cm , 若在这个数轴上随意画出一条长为 2015 cm 的线段 AB , 则线段 AB 盖住的整点的个数是 (C)

- A. 2013 或 2014 B. 2014 或 2015
C. 2015 或 2016 D. 2016 或 2017

【解析】 若线段 AB 的两个端点正好在两个整数点上, 则线段 AB 覆盖住 2016 个整数点; 若 AB 的两个端点都不在整数点上, 则 AB 覆盖住 2015 个整数点.

8. 在数轴上, 点 A 对应的数是 -2012 , 点 B 对应的数是 19 , 点 C 对应的数是 -4032 , 记 A, B 两点间的距离为 d_1 , A, C 两点间的距离为 d_2 , B, C 两点间的距离为 d_3 , 则有

- (A)
A. $d_1 > d_2$ B. $d_2 > d_3$
C. $d_1 > d_3$ D. $d_3 = 2d_1 + 1$

【解析】 根据点 A, B, C 在数轴上的分布, 可知 $d_1 = |-2012 - 19| = 2031, d_2 = |-4032 - (-2012)| = 2020, d_3 = |-4032 - 19| = 4051$. 故可得 $d_1 > d_2$.

9. 在数轴上有若干个点, 每相邻两点之间的距离是 1 个单位长度, 有理数 a, b, c, d 所表示的点是这些点中的 4 个, 且在数轴上的位置如图 1-2-5 所示, 如果 $3a=4b-3$, 那么 $c+2d=$ -2.

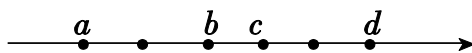


图 1-2-5

【解析】 由数轴可知, $b=a+2$, 又 $3a=4b-3$, 得 $3a=4(a+2)-3, a=-5$, 所以 $c=a+3=-2, d=a+5=0, c+2d=-2+0=-2$.

【思维升华】

10. 电子跳蚤落在数轴上的某点 k_0 , 第一步从 k_0 向左跳 1 个单位到 k_1 , 第二步由 k_1 向右跳 2 个单位到 k_2 , 第三步由 k_2 向左跳 3 个单位到 k_3 , 第四步由 k_3 向右跳 4 个单位到 k_4 , $\dots$, 按以上规律跳了 100 步时, 电子跳蚤落在数轴上的点 k_{100} 所表示的数恰是 19.94 . 求电子跳蚤的初始位置 k_0 点所表示的数.

解: k_0 点所对应的数为 $19.94 - 100 + 99 - 98 + 97 - \dots - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = -30.06$.

相反数与绝对值

【思维入门】

1. 如图 1-3-1，数轴上有 A, B, C, D 四个点，其中表示互为相反数的点是(A)

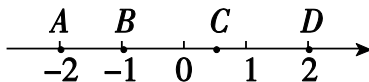


图 1-3-1

- A. 点 A 与点 D B. 点 A 与点 C
C. 点 B 与点 D D. 点 B 与点 C
2. 下列说法中，正确的个数为 (B)
①若 $m > n$ ，则 $|m| > |n|$ ；②若 $|m| > |n|$ ，则 $m > n$ ；③若 $m = n$ ，则 $|m| = |n|$ ；④若 $|m| = |n|$ ，则 $m = n$ ；⑤若 $|a| = a$ ，则 $a > 0$ ；⑥若 $x < 0, y < 0$ ，且 $x < y$ ，则 $|x| < |y|$ 。
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 绝对值不大于 2 的整数的个数为 (C)
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
4. 有理数 a, b, c 在数轴上的位置如图 1-3-2 所示，且 a 与 b 互为相反数，则 $|a-c| - |b+c| = \underline{0}$ 。

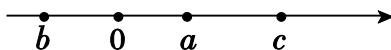


图 1-3-2

【解析】由图知， $a > 0, b < 0, c > a$ ，且 $a + b = 0$ ，

$$\therefore |a-c| - |b+c| = c-a-c-b = -(a+b) = 0.$$

5. (1)若 $|x| = 5$ ，则 $x = \underline{5 \text{ 或 } -5}$ ；
(2)若 $|x| = |-3|$ ，则 $x = \underline{3 \text{ 或 } -3}$ 。

【思维拓展】

6. 有理数 a, b, c, d 满足 $a < b < 0 < c < d$ ，并且 $|b| < c < |a| < d$ ，则 $a+b+c+d$ 的值 (A)
A. 大于 0 B. 等于 0 C. 小于 0 D. 与 0 的大小关系不确定
7. 方程 $|x-2014| = 2014-x$ 的正整数解有 (B)
A. 2013 个 B. 2014 个
C. 2015 个 D. 无穷多
8. 若 $a+b+c=0$ ，则 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|ab|}{ab} + \frac{|ac|}{ac} + \frac{|bc|}{bc} + \frac{|abc|}{abc}$ 的值为 (B)
A. -7 B. -1 C. 1 D. 7

【解析】 $\because a+b+c=0$ ，又 $\because abc$ 出现在分母上，则 abc 都不为 0，则 abc 中肯定存在一个数或者两个数是负数。不妨设 $a=-2, b=1, c=1$ 代入所求原式可得：

$$\text{原式} = (-1) + 1 + 1 + (-1) + (-1) + 1 + (-1) = -1.$$

9. 已知 a, b, c, d 都是整数，且 $|a+b| + |b+c| + |c+d| + |d+a| = 2$ ，则 $|a+d| = \underline{1 \text{ 或 } 0}$ 。

【解析】由题意得 $|a+b|, |b+c|, |c+d|, |d+a|$ 是整数，所以有两种可能：

①3 个为 0，1 个为 2，②2 个为 0，2 个为 1，

所以 $|a+d|$ 只可能取 0，1，2。若为 2，

则 $|a+b| = |b+c| = |c+d| = 0$ ，

不难得出 $a = -d$ ，所以 $|a+d| = 0$ ，与假设 $|a+d| = 2$ 矛盾。

所以 $|a+d|$ 只可能取 0，1。

$a=0, b=0, c=-1, d=1$ 时 $|a+d|=1$ ； $a=-1, b=0, c=0, d=1$ 时 $|a+d|=0$ 。

10. 有理数 x, y 在数轴上对应点的位置如图 1-3-3 所示.

(1) 在数轴上表示 $-x, |y|$;

(2) 试把 $x, y, 0, -x, |y|$ 这五个数从小到大用 “ $<$ ” 连接起来;

(3) 化简 $|x+y|-|y-x|+|y|$.

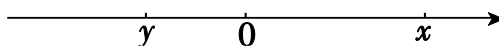
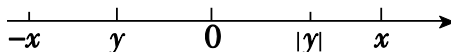


图 1-3-3

解: (1) 如答图所示;



第 10 题答图

(2) 根据答图, $-x < y < 0 < |y| < x$;

(3) 根据答图, $x > 0, y < 0$, 且 $|x| > |y|$,

$\therefore x+y > 0, y-x < 0$,

$\therefore |x+y|-|y-x|+|y|=x+y+y-x-y=y$.

11. 在数轴上, N 与原点的距离是 N 与 30 所对应点之间的距离的 4 倍, 那么 N 点表示的数是多少?

解: 依题意可知 $|N-0|=4|N-30|$,

$N=4N-120$ 或 $N=120-4N$,

$N=40$ 或 24 .

【思维升华】

12. 设 $abcde$ 是一个五位数, 其中 a, b, c, d, e 是阿拉伯数码, 且 $a < b < c < d$, 求 $y=|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|$ 的最大值.

解: 若 $a < b < c < d \leq e$,

$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|=(b-a)+(c-b)+(d-c)+(e-d)=e-a$,

当 $e=9, a=1$ 时取最大值为 8.

若 $a < b < c < d$, 且 $d > e$,

$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|=(b-a)+(c-b)+(d-c)+(d-e)=2d-a-e$,

当 $d=9, a=1, e=0$, 取最大值 17.

所以 $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|$ 的最大值是 17.

有理数的加减乘除运算

【思维入门】

1. 计算 $2 \times (-9) - 18 \times \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$ 的结果是 (B)
- A. 24 B. -12 C. -9 D. 6
2. 法国的“小九九”从“一一得一”到“五五二十五”和我国的“小九九”是一样的，后面的就改用手势了. 下面两个图框是用法国“小九九”计算 8×9 和 7×8 的两个示例. 若用法国的“小九九”计算 7×9 ，左、右手依次伸出手指的个数是 (C)

$8 \times 9 = ?$  左手 右手 $\because$ 两手伸出的手指数的和为 7，未伸出的手指数的积为 2 $\therefore 8 \times 9 = 72$ [$8 \times 9 = 10 \times (3+4) + 2 \times 1 = 72$]
$7 \times 8 = ?$  左手 右手 $\because$ 两手伸出的手指数的和为 5，未伸出的手指数的积为 6 $\therefore 7 \times 8 = 56$ [$7 \times 8 = 10 \times (2+3) + 3 \times 2 = 56$]

A. 2, 3 B. 3, 3 C. 2, 4 D. 3, 4

【解析】 计算 8×9 的过程为：左手伸出 $8-5=3$ (个)，右手伸出 $9-5=4$ (个)，
 $\therefore 8 \times 9 = 10 \times (3+4) + 2 \times 1 = 72$.

计算 7×8 的过程为：左手应伸出 $7-5=2$ (个)，右手伸出 $8-5=3$ (个)，
 $\therefore 7 \times 8 = 10 \times (2+3) + 3 \times 2 = 56$.

故 7×9 的过程为：左手伸出 $7-5=2$ (个)，右手伸出 $9-5=4$ (个)，所以 $7 \times 9 = 10 \times (2+4) + 3 \times 1 = 63$.

3. 计算： $(1+1)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{100}+1\right) = \underline{101}$.

【解析】 原式 $= 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \times \frac{101}{100} = 101$.

4. 计算： $\frac{1}{2} - 2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{12} - 4\frac{19}{20} + 5\frac{1}{30} + 6\frac{41}{42} - 7\frac{1}{56} + 8\frac{71}{72} - 9\frac{1}{90} = \underline{-9\frac{3}{10}}$.

5. 计算：

(1) $1.9 + (-4.4) - (-8.1) - (+5.6)$; (2) $3\frac{1}{2} - |- \frac{1}{2}| - (-\frac{1}{3}) + 2\frac{2}{3}$;

(3) $(-18) \div 2\frac{1}{4} \times \frac{4}{9} \div (-16)$; (4) $(\frac{7}{9} - \frac{5}{6} + \frac{3}{4}) \times (-36)$; (5) $39\frac{23}{24} \times (-12)$.

解：(1) 0; (2) 6; (3) $\frac{2}{9}$; (4) -25; (5) $-479\frac{1}{2}$.

【思维拓展】

6. 实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$, $abc=1$, 则 a, b, c 中正数的个数是 (B)

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 若有理数 a, b, c 两两不等, 则 $\frac{a-b}{b-c}, \frac{b-c}{c-a}, \frac{c-a}{a-b}$ 中负数的个数是 (B)

- A. 3 B. 2
C. 1 D. 0

【解析】 $\frac{a-b}{b-c} \times \frac{b-c}{c-a} \times \frac{c-a}{a-b} = 1$, 所以负数的个数是偶数个, 故选 B.

8. 已知 $a = \frac{20\ 142\ 013}{2\ 013}$, $b = \frac{20\ 132\ 014}{2\ 014}$, $c = \frac{20\ 132\ 014}{2\ 013}$, $d = \frac{20\ 142\ 013}{2\ 014}$, 则 a, b, c, d 大小的关系是

(D)

- A. $a > b > c > d$ B. $c > a > d > b$
C. $a > d > c > b$ D. $a > c > d > b$

【解析】 因为 $20\ 142\ 013 > 20\ 132\ 014$, 所以 $a = \frac{20\ 142\ 013}{2\ 013} > c = \frac{20\ 132\ 014}{2\ 013}$.

同理 $b < d$.

又因为 $c = \frac{2\ 013 \times 10\ 000 + 2\ 014}{2\ 013} = 10\ 000 + \frac{2\ 014}{2\ 013}$, $d = \frac{2\ 014 \times 10\ 000 + 2\ 013}{2\ 014} = 10\ 000 + \frac{2\ 013}{2\ 014}$,

所以 $c > d$. 故选 D.

9. 从 $-4, -2, -1.5, 0.5, 0, 2.5, 3$ 这七个数中任意选出几个做乘法, 乘积的最大值是 60, 最小值是 -90.

【解析】 乘积最大为 $(-4) \times (-2) \times 2.5 \times 3 = 60$, 最小值为 $(-4) \times (-2) \times (-1.5) \times 2.5 \times 3 = -90$.

10. 计算 $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ 的结果为 $\frac{1}{6}$.

【解析】 设 $a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$,

则原式 $= a\left(b + \frac{1}{6}\right) - \left(a - \frac{1}{6}\right)b = ab + \frac{1}{6}a - ab + \frac{1}{6}b = \frac{1}{6}(a+b)$,

$\because a+b = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 1$, $\therefore$ 原式 $= \frac{1}{6}$.

11. 观察下列等式:

第一个等式: $a_1 = \frac{3}{1 \times 2 \times 2^2} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2}$;

第二个等式: $a_2 = \frac{4}{2 \times 3 \times 2^3} = \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3}$;

第三个等式: $a_3 = \frac{5}{3 \times 4 \times 2^4} = \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{4 \times 2^4}$;

第四个等式: $a_4 = \frac{6}{4 \times 5 \times 2^5} = \frac{1}{4 \times 2^4} - \frac{1}{5 \times 2^5}$.

按上述规律, 回答以下问题:

(1) 用含 n 的代数式表示第 n 个等式: $a_n = \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$;

(2) 式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{21 \times 2^{21}}$.

【解析】(1)根据等式的规律可得出答案；

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3} + \cdots + \frac{1}{20 \times 2^{20}} - \frac{1}{21 \times 2^{21}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{21 \times 2^{21}}.$$

【思维升华】

$$12. \frac{1}{2 \ 002} + \frac{1}{3 \ 003} + \frac{1}{4 \ 004} + \frac{1}{6 \ 006} - \frac{1}{8 \ 008} = \quad (\text{C})$$

A. $\frac{1}{6 \ 006}$ B. $\frac{1}{7 \ 007}$ C. $\frac{9}{8 \ 008}$ D. $-\frac{1}{9 \ 009}$

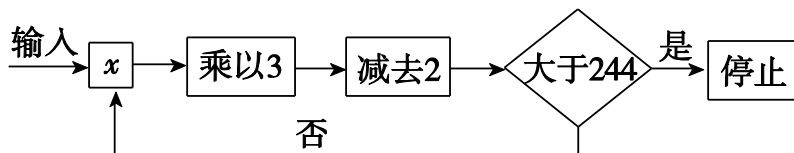
【解析】原式 = $\frac{1}{1 \ 001} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{1 \ 001} \times \frac{9}{8} = \frac{9}{8 \ 008}.$

13. 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 不重复地填写在下面连等式的方框中, 使这个连等式成立:

$$1 + \boxed{8} + \boxed{6} = 9 + \boxed{5} + \boxed{1} = 8 + \boxed{3} + \boxed{4} = 6 + \boxed{7} + \boxed{2}$$

【解析】 $1 + \boxed{8} + \boxed{6} = 9 + \boxed{5} + \boxed{1} = 8 + \boxed{3} + \boxed{4} = 6 + \boxed{7} + \boxed{2}.$

14. 按下列程序进行运算.



规定: 程序运行到“判断结果是否大于 244”为一次运算.

(1)若 $x=5$, 则运算进行 4 次才停止;

(2)若运算进行了 5 次才停止, 则 x 的取值范围是 $2 < x \leq 4$.

【解析】(1) $x=5$, 第一次: $5 \times 3 - 2 = 13$;

第二次: $13 \times 3 - 2 = 37$;

第三次: $37 \times 3 - 2 = 109$;

第四次: $109 \times 3 - 2 = 325 > 244 \rightarrow$ 停止.

(2)第 1 次, 结果是 $3x - 2$.

第 2 次, 结果是 $3 \times (3x - 2) - 2 = 9x - 8$;

第 3 次, 结果是 $3 \times (9x - 8) - 2 = 27x - 26$;

第 4 次, 结果是 $3 \times (27x - 26) - 2 = 81x - 80$;

第 5 次, 结果是 $3 \times (81x - 80) - 2 = 243x - 242$,

$$\therefore 243x - 242 > 244$$

$$81x - 80 \leq 244,$$

$\therefore 2 < x \leq 4$, 即运算 5 次停止的 x 取值范围是 $2 < x \leq 4$.

15. 如图 2-4-1①是一个密封水瓶的切面图，上半部分为圆锥状，下半部分为圆柱状，底面直径是 10 cm，水瓶高度是 26 cm，瓶中液面的高度为 12 cm，将水瓶倒置后，如图 2-4-1②，瓶中液面的高度是 16 cm，则水瓶的容积等于 1 727 cm^3 . ($\pi = 3.14$ ，水瓶壁厚不计)

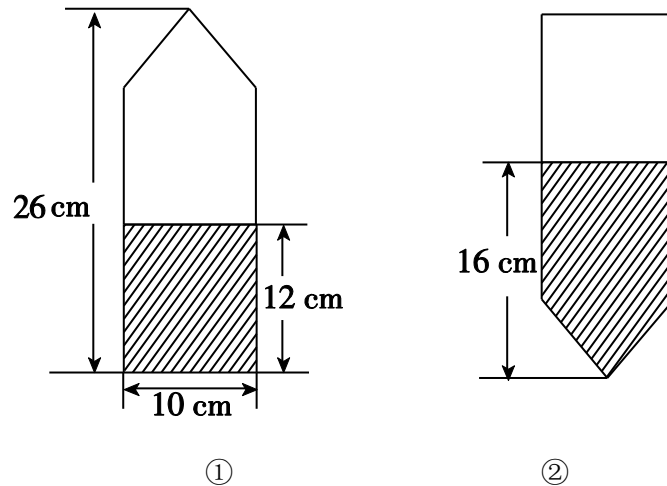


图 2-4-1

【解析】水瓶的容积为 $\pi \times 5^2 \times 12 + 10 \times \pi \times 5^2 = 25\pi \times 22 = 550\pi = 550 \times 3.14 = 1\,727(\text{cm}^3)$.