绝密★启用前

2026年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 $6, 8, 4, 5, 12$ 的中位数为

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线，且 $2\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则

A. $x=2,\ y=-3$　　B. $x=-2,\ y=3$

C. $x=2,\ y=3$　　D. $x=-2,\ y=-3$

3. 已知集合 $A=\left(\sin\frac{7\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{3}, \tan\frac{5\pi}{4}\right)$，$B=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$，则 $A\cap B=$

A. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$　　B. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$

C. $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$　　D. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right\}$

4. 曲线 $y=5x+8\ln x$ 在点 $(1,5)$ 处的切线方程为

A. $y=3x+2$　　B. $y=5x$　　C. $y=8x-3$　　D. $y=13x-8$

5. 已知抛物线 $C_1: y^2=2p_1x(p_1>0)$ 和 $C_2: x^2=2p_2y(p_2>0)$ 均经过点 $(4,8)$，则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为

A. 12　　B. $4\sqrt{5}$　　C. 6　　D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1，则 $a=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

7. 一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市，以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩，该塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排成 12 行，将第 i 行中塔的座数记为 $a_i(i=1,2,\cdots,12)$，其中 $a_1=1$，$a_2=a_3=3$，$a_4=a_5=5$，且 $a_6,a_7,\cdots,a_{12}$ 是一个首项为 7，公差为 2 的等差数列。将 $a_1,a_2,\cdots,a_{12}$ 分为 6 组，每组 2 个数，使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 $d(d>0)$ 的等差数列，则 $d=$

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 设 $U=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\{-2,-1,1,2\},\ i=1,2,3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合，点 $P(1,1,1)$，记样本空间 $\Omega=\complement_U(P)$．从 Ω 中随机取一个点．定义随机变量 X 如下：对 Ω 中的每个点 $A(x_1,x_2,x_3)$，令 $X(A)=x_1+x_2+x_3$，则 X 的数学期望值为

A. $-\dfrac{1}{21}$　　B. $-\dfrac{1}{63}$　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 设 $z=3+2i$，则

A. $\bar{z}=3-2i$　　B. $|z|=5$

C. $z^2=5+12i$　　D. $\dfrac{z+3}{z-i}\in\mathbb{R}$

10. 在空间中，A,B 为两个定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1．若二面角 $C-AB-D$ 为 60°，则

A. $\angle CAD\geq 60^\circ$

B. $CD\geq\sqrt{3}$

C. 当 $AB\perp CD$ 时，$CD\perp$ 平面 ABD

D. 当 $AB\perp$ 平面 ACD 时，$AC\perp AD$

11. 已知圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$，圆 $C_3:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$，直线 $l:y=kx+b$ 与 C_1,C_2,C_3 均有两个交点. 记 l 被 C_1,C_2,C_3 截得的弦长分别为 s_1,s_2,s_3，则

A. k 可以取任意实数

B. 满足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条

C. 满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 多于 3 条

D. 当 $b=0$ 时，$s_1+s_2+s_3$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 双曲线 $5x^2-6y^2=1$ 的离心率为____________.

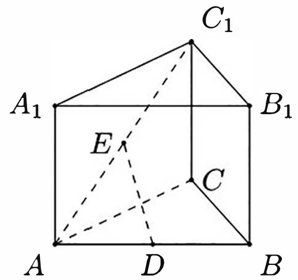
13. 已知 $f(x)=2\sin(ax+\theta)$ $(a\in\mathbb{Z},0\le\theta<2\pi)$ 是偶函数；$f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增. 则 $\theta=$____________，$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=$____________.

14. 设实数 q 满足:存在数列 $\{a_n\}$,使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$,均有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2+n$,且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_j,a_{j+1},\cdots,a_{j+8}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 q 的最大值为____________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AC=BC$, D,E 分别为 AB,AC_1 的中点。



（1）证明：$DE\parallel$ 平面 BCC_1B_1；

(2) 设 $CC_1=2$, 直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 $45°$, 求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离。

16.（15 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3, BC=2\sqrt{3}, \cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

（1）求 $\cos A$;

（2）设 D, E 两点满足：D 在 BA 的延长线上，$DE \parallel BC$，$AE \perp AC$. 若 $DE=\sqrt{6}$，求 CE.

17.（15 分）

设整数 $N \geq 2$. 某同学用一个球进行投篮练习，至多投篮 N 次，当且仅当被中 1 次时或 N 次均未投中时，停止练习. 设该同学每次投中的概率为 $p(0<p<1)$，各次投中与否相互独立. 记 X 为停止练习时该同学的投篮次数。

（1）当 $N=4, p=\dfrac{1}{3}$ 时，求 X 的分布列;

（2）设 k, m 均为自然数.

（i）当 $k \leq N-1$ 时，求 $P(X>k)$;

（ii）当 $k+m \leq N-1$ 时，证明：$P(X>k+m \mid X>k)=P(X>m)$.

18.（17 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$。

（1）求 C 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P,Q 两点，其中 Q 在第三象限，直线 PO 与 C 的另一个交点为 R。

（i） 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍，求 l 的方程；

（ii） 求 $\tan\angle PQR$ 的最小值。

19.（17 分）

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，且当 $x<0$ 时，$f(x)=2^x$．对任意 $x_0\in\mathbb{R}$，定义集合

$$D(x_0)=\{d\in\mathbb{R}\mid f(x_0+d)>f(x_0)\}.$$

（1）若当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=1-x$，求 $D(-1)$；

（2）若 $f(x)$ 是奇函数，$f(x_1)\leq f(x_2)$，且 $x_1x_2\neq 0$，证明：$D(x_2)\subseteq D(x_1)$；

(3) 设 $f(x)$ 满足: (1) 若 $f(x_1)\leq f(x_2)$, 则 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$; (2) 当 $0<x<1$ 时, $f(x)<f(0)$。

（i）证明：$f(0)\geq 1$；

（ii）证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增。

2026 年普通高等学校全国统一考试

数学试题参考答案及评分建议

一、选择题

1．B　　2．A　　3．C　　4．D　　5．D　　6．B

7．B　　8．A

二、选择题

9．ACD　　10．BC　　11．BCD

三、填空题

12．$\dfrac{\sqrt{66}}{6}$　　13．$\dfrac{3\pi}{2}$；1　　14．$\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

注：第 13 题答对第一空得 2 分，第二空得 3 分。

四、解答题

15．解：

（1）取 CC_1 中点 F，BC 中点 G，连接 EF，FG，DG．

在 $\triangle ACC_1$ 中，E，F 为 AC_1，CC_1 中点，所以 $EF /\!/ AC$，$EF=\dfrac{1}{2}AC$．

在 $\triangle ABC$ 中，D，G 为 AB，BC 中点，所以 $DG /\!/ AC$，$DG=\dfrac{1}{2}AC$．　　（2 分）

所以 $EF /\!/ DG$，$EF=DG$，四边形 $EDGF$ 为平行四边形，所以 $DE /\!/ FG$．

（4 分）

因为 $FG\subset$ 平面 BCC_1B_1，$DE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1．所以 $DE /\!/$ 平面 BCC_1B_1．　　（5 分）

（2）取 AC 中点 H，连接 DH，EH．因为 D，H 为 AB，AC 中点，所以 $DH /\!/ BC$．

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC．

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp BC$．因为 $\angle ACB=90°$，所以 $AC\perp BC$．

因为 $AC\cap CC_1=C$，所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，所以 $DH\perp$ 平面 ACC_1A_1．

点D在平面ACC_1A_1的垂足为H，直线DE与平面ACC_1A_1所成角为$45°$．（7分）

在$\triangle ACC_1$中，EH为中位线，所以$EF=\frac{1}{2}CC_1=1$．

在$\mathrm{Rt}\triangle DHE$中，$DH\perp EH$，所以$DH=EH\tan 45°=1$．

因为$BC=2DH=1$，所以$AC=BC=2$．（10分）

因为DE//平面BCC_1B_1，所以直线DE到平面BCC_1B_1的距离等价于点D到平面BCC_1B_1的距离．因为$DG//AC$，同理$AC\perp$平面BCC_1B_1．

因为$DG\not\subset$平面BCC_1B_1，所以$DG\perp$平面BCC_1B_1．

所以$DG=\frac{1}{2}AC=1$，故直线DE到平面BCC_1B_1的距离为1．（13分）

16．**解：**

（1）在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=9+12-2\times3\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=9$

所以$AC=3$．（3分）

则$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+9-12}{2\times3\times3}=\frac{1}{3}$．（6分）

（2）设$\overrightarrow{AD}=-\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda>0)$．因为$DE//BC$，设$\overrightarrow{DE}=\mu\overrightarrow{BC}$．

因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=-\lambda\overrightarrow{AB}+\mu(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-(\lambda+\mu)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$．（8分）

又$AE\perp AC$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$-(\lambda+\mu)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AC}^2=0$．

因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times3\times\frac{1}{3}=3$，$\overrightarrow{AC}^2=9$，所以$-3(\lambda+\mu)+9\mu=0$，$\lambda=2\mu$．（11分）

因为$\lambda>0$，所以$\mu>0$．

因为$|\overrightarrow{DE}|=\mu|\overrightarrow{BC}|$，所以$\sqrt{6}=2\sqrt{3}\mu$，$\mu=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

$\overrightarrow{AE}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}+(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)\overrightarrow{AC}$，（13分）

$$\overrightarrow{CE}^2=\frac{9}{2}\overrightarrow{AB}^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2\overrightarrow{AC}^2-3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{81}{2}+9(\frac{3}{2}-\sqrt{2})-9\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)=45$$

$CE=3\sqrt{5}$．（15分）

17．解：

（1）$X=1$，2，3，4 （1 分）

$P(X=1)=p=\frac{1}{3}$，

$P(X=2)=(1-p)p=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，

$P(X=3)=(1-p)^2p=(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(X=4)=(1-p)^3p+(1-p)^4=(1-p)^3=(\frac{2}{3})^2=\frac{8}{27}$， （4 分）

X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

（6 分）

（2）（ⅰ）$X>k$ 等价于前 k 次投篮均未投中， （7 分）

则 $P(X>k)=(1-p)^k$ （9 分）

（ⅱ）因为 $m\in\mathbf{N}$，所以 $\{X>k+m\}\subseteq\{X>k\}$，

则 $P(\{X>k+m\}\cap\{X>k\})=P(X>k+m)$， （10 分）

$P(X>k+m\mid X>k)=\frac{P(\{X>k+m\}\cap\{X>k\})}{P(X>k)}=\frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}$． （12 分）

因为 $k+m\le N-1$，$k\le N-1$，$m\le N-1$．

由（1）可知 $P(X>k)=(1-p)^k$，$P(X>m)=(1-p)^m$，$P(X>k+m)=(1-p)^{k+m}$，

所以 $P(X>k+m\mid X>k)=\frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}=\frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k}=(1-p)^m=P(X>m)$，得证．

（15 分）

18．解：

（1）由题意得，$c=1$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2$． （2 分）

又$b^2=a^2-c^2=3$，所以$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．（3分）

（2）设$l:y=k(x+1)(k>0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$．

联立$\begin{cases}y=k(x+1)\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消$y$得$(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$．

由韦达定理得$x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$．由对称性知$R(-x_1,-y_1)$．

（5分）

（ⅰ）由题意易知$S_{\triangle PQR}=2S_{\triangle PQO}$，$S_{\triangle PQO}=S_{PFO}+S_{\triangle QFO}=\dfrac{1}{2}|y_1|+\dfrac{1}{2}|y_2|$．

因为$k>0$，点Q在第三象限，所以$x_2<-1$，$y_2<0$．

又$x_1>x_2$，$y_1>0$，所以$S_{\triangle PQO}=\dfrac{1}{2}(y_1-y_2)$，$S_{\triangle PQR}=y_1-y_2$．

因为$S_{\triangle PQR}=3S_{\triangle PFO}$，所以$y_1-y_2=\dfrac{3}{2}y_1$，$y_1=-2y_2$，（7分）

$k(x_1+1)=-2k(x_2+1)$，则$x_1=-2x_2-3$．

由$x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{3+4k^2}$，则$-x_2-3=\dfrac{-8k^2}{3+4k^2}$，$x_2=\dfrac{-9-4k^2}{3+4k^2}$，$x_1=\dfrac{9-4k^2}{3+4k^2}$．

由$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，则$\dfrac{16k^4-81}{(3+4k^2)^2}=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，$16k^4-81=16k^4-36k^2-36$，$36k^2=45$，

解得$k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．故$l:\sqrt{5}x-2y+\sqrt{5}=0$．（10分）

（ⅱ）设直线l的斜率为k，易知$k_{PQ}=k$，

$$k_{QR}=\frac{y_2-(-y_1)}{x_2-(-x_1)}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{k(x_1+1)+k(x_2+1)}{x_1+x_2}=k(1+\frac{2}{x_1+x_2})=k[1+\frac{2(3+4k^2)}{-8k^2}]=-\frac{3}{4k}$$

（13分）

故$\tan\angle PQR=|\dfrac{k_{PQ}-k_{QR}}{1+k_{PQ}k_{QR}}|=|\dfrac{k+\frac{3}{4k}}{1-\frac{3}{4}}|=4(k+\dfrac{3}{4k})$．（15分）

因为$k>0$，所以$\tan\angle PQR=4(k+\dfrac{3}{4k})\geq 4\cdot 2\sqrt{k\cdot\dfrac{3}{4k}}=4\sqrt{3}$（当且仅当$k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时取等）．

故 $\tan\angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$． （17 分）

19．解：

（1）$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$，因为 $D(-1)=\{d\in\mathbf{R}\mid f(-1+d)>\frac{1}{2}\}$，令 $t=-1+d$，解 $f(t)>\frac{1}{2}$． （1 分）

若 $t<0$ 时，$f(t)=2^t$，$2^t>\frac{1}{2}=2^{-1}$．易知 $y=2^x$ 单调递增，故 $t>-1$，则 $-1<t<0$；

若 $t\geq 0$ 时，$f(t)=1-t$，则 $1-t>\frac{1}{2}$，解得 $t<\frac{1}{2}$，则 $0\leq t<\frac{1}{2}$． （2 分）

综上所述，t 的取值范围是 $(-1,\frac{1}{2})$． （3 分）

代入 $t=-1+d$ 可得 $-1<-1+d<\frac{1}{2}$，则 $0<d<\frac{3}{2}$，故 $D(-1)=\{d\in\mathbf{R}\mid 0<d<\frac{3}{2}\}$． （4 分）

（2）因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)=-f(-x)=-2^{-x}$，$f(0)=0$． （5 分）

则 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ 0, & x=0\\ -2^{-x}, & x<0\end{cases}$．

当 $x<0$ 时，$f(x)\in(0,1)$，$d\in D(x)$，等价于 $f(x+d)>f(x)>0$，则 $x+d<0$，且 $2^{x+d}>2^x$，$d<-x$ 且 $d>0$，所以 $D(x)=(0,-x)$．

当 $x>0$ 时，$f(x)\in(-1,0)$，$d\in D(x)$，等价于 $f(x+d)>-2^{-x}$．

若 $x+d<0$，$f(x+d)>0>-2^{-x}$，得 $d<-x$；若 $x+d=0$，$f(0)=0>-2^{-x}$，得 $d=-x$；

若 $x+d>0$，$f(x+d)=-2^{-(x+d)}>-2^{-x}$，则 $-(x+d)<-x$，得 $d>0$．

所以 $D(x)=(-\infty,-x]\cup(0,+\infty)$． （7 分）

已知 $f(x_1)\leq f(x_2)$ 且 $x_1x_2\neq 0$：

①若 $x_1<0$，$x_2<0$，$2^{x_1}\leq 2^{x_2}$，$x_1\leq x_2<0$，$-x_1\geq -x_2>0$，$D(x_1)=(0,-x_1)$，$D(x_2)=(0,-x_2)$．因为 $(0,-x_2)\subseteq(0,-x_1)$，所以 $D(x_1)\supseteq D(x_2)$．

②若 $x_1>0$，$x_2>0$，$-2^{-x_1}\leq -2^{-x_2}$，$-x_1\geq -x_2$，$0<x_1\leq x_2$，$D(x_1)=(-\infty,-x_1]\cup(0,+\infty)$，$D(x_2)=(-\infty,-x_2]\cup(0,+\infty)$．因为 $(0,-x_2]\subseteq(0,-x_1]$，所以 $D(x_1)\supseteq D(x_2)$．

③若 $x_1>0$，$x_2<0$，$f(x_1)<0<f(x_2)$，满足 $f(x_1)\le f(x_2)$．$D(x_1)=(-\infty,-x_1]\cup(0,+\infty)$，$D(x_2)=(0,-x_2)$．因为 $-x_2>0$，$(0,-x_2)\subseteq(0,+\infty)\subseteq D(x_1)$，所以 $D(x_1)\supseteq D(x_2)$．

④若 $x_1<0$，$x_2>0$，$f(x_1)>0>f(x_2)$，与 $f(x_1)\le f(x_2)$ 矛盾．

综上所述，$D(x_1)\supseteq D(x_2)$ 得证．（9 分）

（3）（ⅰ）假设 $f(0)<1$．若 $f(0)\le 0$，取 $x_1=-\frac{1}{2}$，$f(x_1)=2^{-\frac{1}{2}}>0$，$f(0)<f(x_1)$，则 $D(0)\supseteq D(x_1)$．（10 分）

取 $d=\frac{1}{4}$，$x_1+d=-\frac{1}{4}<0$，$f(x_1+d)=2^{-\frac{1}{4}}>2^{-\frac{1}{2}}=f(x_1)$，$d\in D(x)$．

因为 $D(0)\supseteq D(x_1)$，所以 $d\in D(x_0)$，$f(d)>f(0)$．又 $d=\frac{1}{4}\in(0,1)$，由②知 $f(d)<f(0)$，矛盾．（11 分）

若 $0<f(0)<1$，令 $x_0=\log_2 f(0)$，则 $x_0<0$，$f(x_0)=2^{x_0}=f(0)$．$f(x_0)\le f(0)$，则 $D(x_0)\supseteq D(0)$．$f(0)\le f(x_0)$，则 $D(0)\supseteq D(x_0)$．所以 $D(x_0)=D(0)$．

记 $x=\min\{a,b\}$ 为取 a，b 中的较小值，取 $d_0=\min\{-\frac{x_0}{2},\frac{1}{2}\}$．

因为 $x_0<0$，所以 $0<d_0\le\frac{1}{2}<1$．由②知 $f(d)<f(0)$，则 $d_0\notin D(0)$．

又 $x_0+d_0\le x_0-\frac{x_0}{2}=\frac{x_0}{2}<0$．$f(x_0+d_0)=2^{x_0+d_0}>2^{x_0}=f(x_0)$，所以 $d_0\in D(x_0)$，与 $D(x_0)=D(0)$ 矛盾．

综上所述，假设不成立．所以 $f(0)\ge 1$．（13 分）

（ⅱ）若 $x\in(0,1)$，假设 $f(x)>0$．取 $c<0$ 使得 $f(c)=2^c<f(x)$．

由②知 $f(x)<f(0)$，$f[x+(-x)]=f(0)>f(x)$，所以 $-x\in D(x)$．

由①知，$f(c)<f(x)$，则 $D(c)\supseteq D(x)$，$-x\in D(x)$．$f[c+(-x)]=f(c-x)>f(c)$．

因为 $c<0$，$x>0$，所以 $c-x<c<0$．当 $x<0$ 时，$f(x)=2^x$ 单调递增，所以 $f(c-x)<f(c)$，矛盾．所以 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)\le 0$．（14 分）

若 $x\ge 1$，假设 $f(x)>0$．取 $b<0$ 使得 $f(b)=2^b<f(x)$．

$f[b+(x-b)]=f(x)>f(b)$，则 $x-b\in D(b)$．

令 $b'=\frac{1}{2}-(x-b)$．因为 $x\geq 1$，$b<0$，所以 $x-b>1$，则 $b'<-\frac{1}{2}<b<0$．所以

$f(b')2^{b'}<2^{b}=f(b)$．

由①知，$D(b')\supseteq D(b)$，则 $x-b\in D(b')$．$f[b'+(x-b)]=f(\frac{1}{2})>f(b')>0$．与 $\frac{1}{2}\in(0,1)$，

$f(\frac{1}{2})\leq 0$ 矛盾．所以 $\forall x>0$，$f(x)\leq 0$． （15 分）

取 $0<x<y$，因为 $y-x>0$，则 $-(y-x)-1<-1<0$，$f[-(y-x)-1]=2^{-(y-x)-1}>0$．

又 $x>0$，则 $f(x)\leq 0$，所以 $f(x)<f[-(y-x)-1]$．由①知，$D(x)\supseteq D[-(y-x)-1]$．

因为 $-(y-x)-1<-1<0$，所以 $f[-(y-x)-1]<f(-1)$．

$f[-(y-x)-1+(y-x)]=f(1)>f[-(y-x)-1]$，所以 $y-x\in D(x)$． （16 分）

$f[x+(y-x)]>f(x)$，$f(y)>f(x)$．所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得证．

（17 分）